

## 第3章 累積分布関数

### 3.1 累積分布関数の定義

定義 3.1. (1) 確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  上の確率変数  $X$  の累積分布関数 (c.d.f. と記す)  $F^X$  を

$$F^X(x) = \Pr(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める.

(2)  $X$  の分布  $P^X$  を

$$P^X(B) := \Pr(X \in B) := \Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

で定める. したがって,  $P^X((-\infty, x]) = F^X(x)$  である.

(3) 確率変数  $X, Y$  を  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  の確率変数とし, それぞれの c.d.f. を  $F^X, F^Y$  とする. このとき

$$F^X(x) = F^Y(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が成立するとき,  $X$  と  $Y$  の分布は同じである<sup>2</sup>という. これを  $X \stackrel{d}{=} Y$  と書く.

(4) 確率変数  $X$  が c.d.f.  $F$  を持つとき,  $X \sim F$  と書く.

注意 3.2. (1)  $P^X$  は可測空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  上の確率測度である. すなわち  $P^X$  は定義 1.7 をみたすことがわかる.

(2) c.d.f.  $F$  が与えられると

$$F(x) = P((-\infty, x]) \quad (x \in \mathbb{R})$$

をみたす  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  上の確率測度  $P$  が一意的に定まることが知られている. このことにより  $X$  の c.d.f. と分布を同一視する. さらに  $X \sim F$  とし, c.d.f.  $F$  から定まる確率測度を  $P$  としたとき,  $X \sim P$  とも書く.

(3) 確率変数  $X$  と  $Y$  の分布が同じとき

$$P^X(B) = P^Y(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

も成立する.

<sup>1</sup>簡単に分布関数ともいう.

<sup>2</sup> $F^X(x) = F^Y(x) (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow P^X(B) = P^Y(B) (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  となることが知られている. 注意 ??(2) を参照のこと.

**定理 3.3.** 確率変数  $X$  を確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  上の確率変数とし,  $F$  を  $X$  の c.d.f. とする. このとき  $F$  は次をみたす.

- (1)  $F$  は非減少関数:  $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
- (3)  $F$  は右連続関数:  $\lim_{y \rightarrow x+0} F(y) = F(x)$ .

*Proof.* 節 3.3.1 を参照のこと.

**注意 3.4.** (1) 定理 3.3 の (1) ~ (3) をみたす関数  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  が存在する. するとある確率変数  $X$  が存在して,  $F^X(x) = F(x) (x \in \mathbb{R})$  となることが知られている.

(2) 累積分布関数  $F$  の不連続点は高々可算個である. 実際, 以下の議論から確認できる.  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$A_n := \left\{ r \in \mathbb{R}; \Pr(X = r) > \frac{1}{n} \right\}$$

とおく.  $\#A_n \leq n$  となる. なぜならば,  $n$  個を越えてであると仮定すると, その中の  $n$  個を  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  となるように選ぶことができる. すると

$$\begin{aligned} F^X(x_n) &= \Pr(X = x_n) + \lim_{x \rightarrow x_n-0} F^X(x) > \frac{1}{n} + F^X(x_{n-1}) > \dots \\ &> \frac{n-1}{n} + F^X(x_1) > 1 \end{aligned}$$

となり,  $0 \leq F^X(x) \leq 1 (x \in \mathbb{R})$  に矛盾する.

$$A := \{r \in \mathbb{R}; \Pr(X = r) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

なので,  $\#A$  は高々加算となる. □

**補題 3.5 (Helly).**  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  は累積分布関数列とする. このとき, 非減少右連続関数  $F (0 \leq F(x) \leq 1 (x \in \mathbb{R}))$  と部分列  $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$  存在して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n(k)}(x) = F(x) \quad (x \text{ は } F \text{ の連続点})$$

となる.

*Proof.* 節 3.3.2 を参照のこと. □

**定義 3.6.** (1)  $\mathbb{R}$  上の測度の列  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  は緊密 (tight) であるとは, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して, ある  $K > 0$  が存在して

$$\mu_n([-K, K]) \geq 1 - \epsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つことをいう.

(2) 分布関数列  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  は稠密であるとは,  $\{P_n\}_{n=1}^\infty$  は稠密のときをいう. ただし,  $P_n$  は  $F_n$  に対応する確率測度である.

**補題 3.7.**  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  を非減少関数とし,  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を  $\mathbb{R}$  上の分布関数列とする. 関数  $F$  の連続点  $x$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

をみたすとする. 分布関数列  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  が緊密のとき,  $F$  は  $\mathbb{R}$  上の分布関数になる.

*Proof.*  $F_n$  に対応する確率測度を  $P_n$  とする. すると  $\{P_n\}_{n=1}^\infty$  は緊密になる. よって,  $\forall n \geq 1$  に対して

$$F_n(K) \geq P_n([-K, K]) \geq 1 - \epsilon$$

となるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

がわかる. また

$$F_n(-(K+1)) = P_n([-\infty, -(K+1)]) \leq 1 - P_n([-K, K]) \leq \epsilon$$

から

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

がわかる. □

## 3.2 有界右連続関数のなす空間

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  を確率空間とする.  $\mathcal{F}$  を  $\mathbb{R}$  上の有界右連続関数全体の成す空間とし, その上のノルム  $\|\cdot\|_\infty$  を

$$\|F\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| < \infty \quad (F \in \mathcal{F}')$$

で定める. すると  $\mathcal{F}'$  はノルム  $\|\cdot\|_\infty$  をもつ線型ノルム空間である.

**命題 3.8.**  $\mathcal{F}'$  はノルム  $\|\cdot\|_\infty$  をもつ Banach 空間である.

*Proof.* 節 3.3.3 を参照のこと. □

**命題 3.9.**  $\mathcal{F}$  を  $\mathbb{R}$  上の分布関数全体の集合とする.  $\mathcal{F}$  は  $(\mathcal{F}', \|\cdot\|_\infty)$  の閉部分空間である.

*Proof.* 節 3.3.4 を参照のこと. □

**注意 3.10.**  $\mathcal{F}'$  はコンパクトであることが ALEGRO-BANACH の定理よりわかるので,  $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)$  はコンパクト空間であることも知られている. □

## 3.3 証明

### 3.3.1 定理 3.3 の証明

確率変数  $X$  の分布を  $P$  とする. すなわち  $P(B) := \Pr(X \in B)$  ( $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ) である.

(1)  $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$  に注意して, 補題 1.5(4) を  $P$  に適用すればよい.

(2)  $A_n = (-\infty, n]$  と  $A_n = (-\infty, -n]$  として,  $P$  に補題 1.5(6)(7) を適用すればよい.

(3)  $A_n = \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$  として,  $P$  に補題 1.5(7) を適用すればよい. □

### 3.3.2 補題 3.5 の証明

各  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$  は有界列なので, ある部分列  $\{F_{n(k)}(x)\}_{k=1}^\infty$  は収束する. その収束先を  $F(x)$  と書く.

①  $F$  の非減少性の証明:

②  $F$  の右連続性: □

### 3.3.3 命題 3.8 の証明

$\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を  $\mathcal{F}'$  の Cauchy 列とする. 各  $x \in \mathbb{R}$  と  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \|F_n - F_m\|_\infty$$

となるので,  $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  も Cauchy 列である. よって,  $\mathbb{R}$  の完備性から, 各  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $G(x) \in \mathbb{R}$  が存在して

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

となる. (3.1) で定めた関数  $G$  は ① 有界 かつ ② 右連続であることを以下で確認する.

①  $G$  の有界性の証明:  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を  $\mathcal{F}'$  の Cauchy 列なので, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して, ある  $\exists N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: m, n \geq N \Rightarrow \|F_n - F_m\|_\infty < \epsilon$$

となる. したがって, すべての  $x \in \mathbb{R}$  と  $n \geq N$  に対して

$$|F(x) - F_n(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |F_m(x) - F_n(x)| \leq \epsilon$$

となる. すなわち

$$\|F - F_n\|_\infty \leq \epsilon \quad (3.2)$$

となる.  $n \geq N$  とする.  $F_n$  の有界性に注意すると

$$\|F\|_\infty \leq \|F_n\|_\infty + \|F_n - F\|_\infty \leq \|F_n\|_\infty + \epsilon$$

となるので,  $F$  は有界であることが示せた.

②  $G$  の右連続性の証明: (3.2) から, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して, ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$n \geq N \Rightarrow \|F - F_n\|_\infty \leq \epsilon$$

となる.  $F_n$  の右連続性から, ある  $\delta > 0$  が存在して

$$y \in (x, x + \delta) \Rightarrow |F_n(x) - F_n(y)| < \epsilon$$

となる. したがって,  $y \in (x, x + \delta)$  と  $n \geq N$  に対して

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(y)| + |F_n(y) - F(y)| \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned}$$

となる. よって,  $F$  は右連続であることが示せた.

以上から

$$F \in \mathcal{F}' \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|F - F_n\|_\infty = 0$$

となるので, 命題は証明された. □

### 3.3.4 命題 3.9 の証明

$\{F_n\}_{n=1}^\infty$  は  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$  の収束列とする.  $\mathcal{F}'$  は Banach 空間だったので, ある  $F \in \mathcal{F}'$  が存在して

$$\|F - F_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

となる. 各  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \|F_n - F\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

となるので

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$$

とある.

$F \in \mathcal{F}$  の証明: そのために, 以下の ① ~ ③ を示せばよい: ①  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ , ②  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ , ③  $F$  の非減少性.

① の証明: 任意の  $\epsilon > 0$  に対して, ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$n \geq N \Rightarrow \|F_n - F\|_\infty < \epsilon$$

となる.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n = 0$  なので, ある  $M \in \mathbb{R}$  が存在して, 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$x < M \Rightarrow |F_n(x)| < \epsilon$$

となる. したがって,  $x < M$  なる  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$|F(x)| \leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x)| \leq \|F - F_n\|_\infty + \epsilon < 2\epsilon$$

となる. したがって

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

が示せた.

② の証明: ① と同様である.

③ の証明:  $F_n \in \mathcal{F}$  なので, すべての  $n \in \mathbb{N}$  と  $x < y$  に対して

$$F_n(x) \leq F_n(y)$$

となる. よって

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = F(y)$$

となるので,  $F$  は非減少であることが示せた.

以上から,  $\mathcal{F}$  は  $\mathcal{F}'$  の閉部分空間であることが示せた.  $\square$