

# 目次

はじめに	vii
<b>第 0 章</b> なぜ経験過程理論を学ぶか	<b>1</b>
0.1 なぜ経験分布理論を学ぶか . . . . .	1
<b>第 1 章</b> 準備: 確率空間・事象・確率変数・分布・期待値	<b>5</b>
1.1 記号と定義 . . . . .	5
1.2 確率と確率変数の定義 . . . . .	5
1.3 事象, 部分 $\sigma$ 集合族, 確率変数列の独立性 . . . . .	9
1.4 期待値の定義 . . . . .	11
1.4.1 期待値の定義 . . . . .	11
1.4.2 期待値の不等式 . . . . .	17
1.4.3 収束定理 . . . . .	20
1.5 Borel-Cantelli の補題 . . . . .	22
1.6 条件付き期待値の定義とその基本的性質 . . . . .	24
1.7 証明 . . . . .	28
1.7.1 補題 1.5 の証明 . . . . .	28
1.7.2 定理 1.23 の証明 . . . . .	30
1.7.3 命題 1.24 の証明 . . . . .	31
1.7.4 定理 1.35 の証明 . . . . .	32
1.7.5 定理 1.39 の証明 . . . . .	33
1.7.6 定理 1.41 の証明 . . . . .	33
1.7.7 定理 1.51 の証明 . . . . .	34
<b>第 2 章</b> 確率変数列の収束	<b>37</b>
2.1 確率変数列の収束モード . . . . .	37
2.2 一様可積分性 . . . . .	39
2.3 Slutsky の定理 . . . . .	39
2.4 証明 . . . . .	40
2.4.1 定理 2.3 の証明 . . . . .	40
2.4.2 定理 2.4 の証明 . . . . .	43
2.4.3 補題 2.5 の証明 . . . . .	44
2.4.4 命題 2.7 の証明 . . . . .	45

2.4.5	定理 2.8 の証明 . . . . .	46
2.4.6	定理 2.9 の証明 . . . . .	47
2.4.7	定理 2.10 の証明 . . . . .	50
2.4.8	命題 2.11 の証明 . . . . .	51
<b>第 3 章</b>	<b>累積分布関数</b>	<b>53</b>
3.1	累積分布関数の定義 . . . . .	53
3.2	有界右連続関数のなす空間 . . . . .	55
3.3	証明 . . . . .	56
3.3.1	定理 3.3 の証明 . . . . .	56
3.3.2	補題 3.5 の証明 . . . . .	56
3.3.3	命題 3.8 の証明 . . . . .	56
3.3.4	命題 3.9 の証明 . . . . .	58
<b>第 4 章</b>	<b>大数の強法則と中心極限定理</b>	<b>59</b>
4.1	大数の弱法則と強法則 . . . . .	59
4.2	中心極限定理 . . . . .	61
4.3	デルタ法 . . . . .	63
4.4	証明 . . . . .	64
4.4.1	定理 4.1 の証明 . . . . .	64
4.4.2	補題 4.2 の証明 . . . . .	67
4.4.3	定理 4.3 の証明 . . . . .	68
4.4.4	定理 4.6 の証明 . . . . .	70
4.4.5	定理 4.8 の証明 . . . . .	74
<b>第 5 章</b>	<b>確率集中不等式</b>	<b>77</b>
5.1	Chernoff 限界 . . . . .	77
5.1.1	基本原理 . . . . .	77
5.1.2	例 . . . . .	79
5.1.3	劣 Gauss と劣 Gamma 確率変数 . . . . .	80
5.1.4	Hoeffding の不等式 . . . . .	87
5.1.5	Bennett の不等式 . . . . .	90
5.2	分散不等式 . . . . .	92
5.2.1	Efron-Stein の不等式 . . . . .	92
5.3	修正 log-Sobolev 不等式 . . . . .	94
5.4	Orlicz ノルム . . . . .	103
5.4.1	$\Phi_2(x) = e^{x^2} - 1$ の場合 . . . . .	108
5.5	基本的な情報不等式 . . . . .	114

<b>第 6 章</b>	<b>経験過程の収束</b>	<b>115</b>
6.1	導入 . . . . .	115
6.1.1	sup の可測性についての注意 . . . . .	115
6.2	経験過程の例 . . . . .	116
6.2.1	教育と雇用 . . . . .	116
6.2.2	Kullback-Leibler 偏差 . . . . .	118
6.3	計量エントロピー, 被覆数と $\epsilon$ 網 . . . . .	121
6.3.1	関数族のエントロピー . . . . .	122
6.3.2	$\epsilon$ 網 . . . . .	124
6.4	括弧付きエントロピーによる Glivenko-Cantelli 族の定理	128
6.5	対称化トリックと Dudley のエントロピー積分による Glivenko-Cantelli 族の定理 . . . . .	132
6.6	定理 6.20 の証明のための準備 . . . . .	134
6.6.1	対称化トリック . . . . .	134
6.6.2	縮小写像の原理 . . . . .	142
6.6.3	Dudley のエントロピー積分 . . . . .	143
6.7	定理 6.20 の証明 . . . . .	150
6.7.1	方針 ① の証明 . . . . .	150
6.7.2	方針 ② の証明 . . . . .	155
6.8	VC 集合族 . . . . .	157
6.9	VC 関数族 . . . . .	160
6.10	混合モデルの最尤推定量の一致性 . . . . .	165
6.11	最大不等式 . . . . .	171
<b>第 7 章</b>	<b>Peeling 議論</b>	<b>187</b>
7.1	第一の方法 . . . . .	187
7.2	第二の方法 . . . . .	193
<b>第 8 章</b>	<b>一様中心極限定理</b>	<b>195</b>
8.1	距離空間における弱収束の定義と性質 . . . . .	195
8.2	$\mathbb{R}^p$ 値確率変数列に対する中心極限定理 . . . . .	197
8.3	Donsker 型中心極限定理 . . . . .	198
8.4	Donsker 族 . . . . .	200
8.5	P-Donsker 族のための基本的な補題 . . . . .	203
8.6	P-Donsker の定理 . . . . .	207
8.7	一様エントロピー条件 . . . . .	210
<b>第 9 章</b>	<b>Birman-Solomjak 理論</b>	<b>217</b>
9.1	. . . . .	217

<b>第 10 章 M 推定法</b>	<b>219</b>
10.1 M 推定量とは	219
10.2 M 推定量の一致性	220
10.3 漸近正規性	225
10.4 M 推定量の漸近正規性のための強い十分条件	226
10.5 M 推定量の漸近正規性のためのより弱い十分条件	230
<b>第 11 章 正規分布の確率集中不等式</b>	<b>233</b>
11.1 正規分布の部分積分公式と補間公式	233
11.2 ガウス確率集中不等式	238
11.3 Gauss 分布比較	243
<b>第 12 章 Talagrand の集中不等式</b>	<b>255</b>
12.1 導入	255
12.2 証明のための技術的な補題	255
12.3 Talagrand の集中不等式	263
12.4 Talagrand の不等式の統計学版	268
12.5 Fuk-Nagaev 形の不等式	268
<b>第 13 章 モデル選択</b>	<b>269</b>
13.1 導入	269
13.2 罰則化	270
<b>第 A 章 補遺</b>	<b>271</b>
A.1 Dynkin の定理	271
A.1.1 Dynkin の定理の応用例	276
A.1.2 文献についての注釈	283
A.2 Radon-Nikodym の定理と条件付き期待値	283
A.3 補遺: 条件付き期待値の性質	288
A.4 Shannon エントロピーと Kullback-Leibler 偏差	292
A.5 直積空間のエントロピーと連鎖律	295
A.6 凸関数とその性質	297
A.7 共役関数と Young の不等式	305
A.8 距離空間とノルム空間	310
<b>参考文献</b>	<b>312</b>