

中央大学 大学院 理工学研究科 数学専攻
統計数学特別講義第四

今野 良彦

大阪公立大学

2026 年 4 月 11 日

本日の講義内容

- 講義全体のガイダンス
- 第0章 なぜ経験過程理論を学ぶか
- 第1章 準備: 確率空間・事象・確率変数・期待値
 - 1.1. 記号
 - 1.2 確率と確率変数
 - 1.3 確率的独立性
 - 1.4 期待値の定義
 - 1.5 条件付き期待値

ガイダンス

- 日程: 4/11, 4/25, 5/9, 5/23, 6/6, 6/20, 7/11
- 講義のホームページ:
<https://mcm-www.jwu.ac.jp/~konno/stat-chuo.html>

この講義で学ぶこと

- ① 確率変数列の収束について説明できること.
- ② 確率の最大不等式を説明できること.
- ③ 経験過程理論における基本的な事項を説明できること.

第 0 章 なぜ経験過程を学ぶか (1)

正規分布からの 10 個の乱数を x_1, x_2, \dots, x_{10} と書く. 経験分布関数 \widehat{F}_{10} は

$$\widehat{F}_{10}(x) := \frac{\{x_i \leq x (i = 1, 2, \dots, 10)\} \text{ の個数}}{10} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

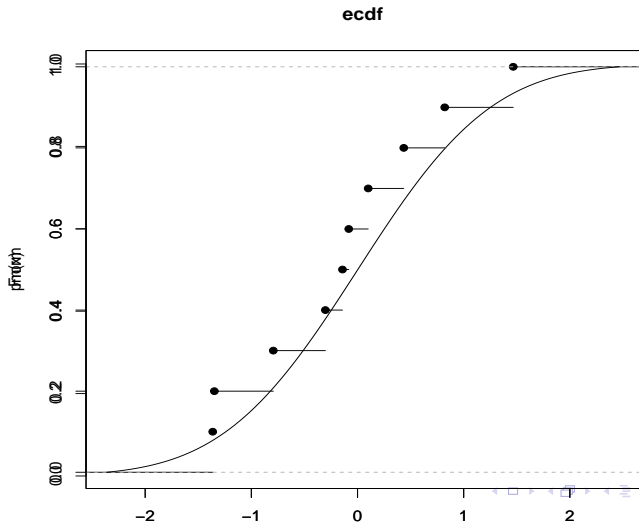
で定義される. また, 標準正規分布の分布関数 F は

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

である.

第 0 章 なぜ経験過程を学ぶか (2)

下記の図は標準正規分布からの **10** 個の乱数から作図した経験分布関数と標準正規分布の分布関数のグラフを並べたものである。



$$\widehat{F}_n(x) := \frac{\{X_i \leq x (i = 1, 2, \dots, n)\} \text{ の個数}}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

標本平均

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

が母平均 μ の推定量であるように、 \widehat{F}_n を分布関数 F の推定量と考えることができる。

標本平均は \bar{X}_n はよい性質を持っている。

$$E[\bar{X}_n] = \mu; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0 \quad (\forall \epsilon > 0).$$

同様に、固定した x に対して

$$E[\widehat{F}_n(x)] = F(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\widehat{F}_n(x) - F(x)| > \epsilon) = 0 \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が成立することが標本平均と同じ議論で証明できる。さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F(x)| > \epsilon\right) = 0 \quad (\forall \epsilon > 0) \quad (2)$$

正規分布 $\mathbf{N}(\mu, 1)$ の p.d.f. を \mathbf{p}_μ と書いたとき, それに対応する確率測度を

$$\mathbf{P}(B) = \int_B \mathbf{p}_\mu(x) dx \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

と定める. $x \in \mathbb{R}$ に対して, $B = (-\infty, x]$ とすると

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{F}(x).$$

(1) と同様に経験確率測度を

$$\widehat{\mathbf{P}}_n(B) := \frac{\{X_i \in B (i = 1, 2, \dots, n)\} \text{ の個数}}{n} \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

と定める. 固定した $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\widehat{\mathbf{P}}_n(B) - \mathbf{P}(B)| > \epsilon) = 0$$

であるが

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\widehat{\mathbf{P}}_n(B) - \mathbf{P}(B)| = 1 \quad (3)$$

となることが知られている. Borel 集合に関して一様にみると (2) のようにはうまくいかない. (2) と (3) の違いがどうして起こるかを理解するには, 経験過程理論が必要になってくる.

第 0 章 なぜ経験過程を学ぶか (5)

関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbf{P}g := \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbf{P}(x), \quad \widehat{\mathbf{P}}_n g := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(X_j)$$

と定める. さらに $v_n(g) := \sqrt{n}(\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P})g$

とおく. すると関数 g を動かすと, 関数族 $\mathcal{G}()$ 便宜的な記号で添え字付けられた確率過程 $\{v_n(g)\}_{g \in \mathcal{G}}$ が得られる. ただし, \mathcal{G} はある関数族である.

第0章 なぜ経験過程を学ぶか (6)

たとえば, $\mathcal{G}_1 = \{\mathbb{1}_{(-\infty, t]}(x); t \in \mathbb{R}\}$ とおくと

$$\{v_n(g); g \in \mathcal{G}_1\} = \{\sqrt{n}(\widehat{F}_n(t) - F(t)); t \in \mathbb{R}\}$$

となる. また, $\mathcal{G}_2 = \{\mathbb{1}_B(x); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ とすると

$$\{v_n(g); g \in \mathcal{G}_2\} = \{\sqrt{n}(\widehat{P}_n(B) - P(B)); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

となる. \mathcal{G}_1 で添え字付けられた経験過程はうまく扱うことが期待されるが, \mathcal{G}_2 で添え字付けられた経験過程はうまく扱うことができないようである.

このことから, 経験過程を添え字付けられている関数族の大きさが問題であることが想像される. さらに, 関数族で添え字づけられた経験過程を考えることで, 統計推測において有効になる極限定理を扱うこともできることに注意しておく.

第 1 章 1.1 記号 (1)

d, p を自然数とし, ν を \mathbb{R}^d 上の σ 有限な測度¹ とする.

- $C_b(\mathbb{R}^d)$: \mathbb{R}^d 上で定義された有界連続実数値関数全体の集合.
- $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \nu)$: \mathbb{R}^d 上の実数値可測関数で $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\nu(x) < \infty$ なるものの全体の集合.

指示関数: $B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

と定める. 特に, $\mathbb{1}_{(-\infty, a]}(x)$ ($a \in \mathbb{R}$) を簡単に $\mathbb{1}\{x \leq a\}$ と記すことにする.

¹可測な $A_n \subset \mathbb{R}^d$ ($n = 1, 2, \dots$) で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^d$ としたとき, $\nu(A_n) < \infty$ となる測度のこと.

第 1 章 1.2. 確率と確率変数 (1)

定義 1.1 Ω を空でない集合とし, \mathcal{A} を Ω の部分集合族とする.
 \mathcal{A} は次の 3 条件をみたすとき, σ 加法族 と呼ばれる.

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(3) $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

ただし $A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$ である. Ω と \mathcal{A} の組 (Ω, \mathcal{A}) を 可測空間 と呼ぶ.

第 1 章 1.2. 確率と確率変数 (2)

注意 1.2 C を Ω の部分集合族とする. 部分集合族 C は σ 加法性をみたしてなくともよい. このとき, 集合族 $\sigma[C]$ を

$$\sigma[C] := \bigcap \{ \mathcal{F}; \mathcal{F} \supset C, \mathcal{F} \text{ は } \sigma \text{ 加法族} \}$$

で定める. すると $\sigma[C]$ は σ 加法族となることを確かめることができる. さらに \mathcal{G} を C を含む σ 加法族としたとき

$$\sigma[C] \subseteq \mathcal{G}$$

となることが直ちにわかる. すなわち $\sigma[C]$ は C を含む最小 (包含関係の意味) の σ 加法族となる. \square

第 1 章 1.2. 確率と確率変数 (3)

定義 1.3 $\Omega = \mathbb{R}$ とし

$$\mathcal{O} = \{O \subset \mathbb{R}; O \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合}\}$$

とする. $\sigma[\mathcal{O}]$ を \mathbb{R} の **Borel** 集合族と呼び, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と記す. また

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, x) \subset \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}\}$$

とする. このとき \mathcal{C} は \mathcal{O} の真部分集合であるが $\sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{O}]$ となる²ことが知られている.

² $\sigma[\mathcal{C}] \subset \sigma[\mathcal{O}]$ は明らかであるが, 逆の包含関係も示すことができる. この逆の証明は, Dynkin の定理と Euclid 位相の事実を用いて証明ができる.

定義 1.4 (Ω, \mathcal{A}) を可測空間とする. \mathcal{A} 上の関数

$$\nu : \mathcal{A} \ni A \mapsto \nu(A) \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

は次の 2 条件をみたすとき, 可測空間 (Ω, \mathcal{A}) 上の測度³ と呼ばれる.


- (1) $\nu(\emptyset) = 0$ である.
- (2) 互いに排反⁴ な事象列 $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots)$ に対して

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \nu(A_n)$$

をみたす.

これらの 3 つの組 $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ を 測度空間 という. とくに, $\nu(\Omega) = 1$ のとき, 確率測度 といい, $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ を 確率空間 という.

³簡単に Ω 上の測度ともいう.

⁴ $m \neq n$ ならば, $A_m \cap A_n = \emptyset$ が成立していること. 

補題 1.5 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ を確率空間とする. このとき以下が成立する.

- (1) $\Pr(\emptyset) = 0$ である.
- (2) $A \in \mathcal{A}$ に対して, $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$ となる. ただし, A^c は A の補事象で, $A^c := \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$ で定義される.
- (3) $N \in \mathbb{N}$ とする. $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{A}$ は互いに排反ならば

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \Pr(A_n).$$

- (4) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(A)$ となる.
よって

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

が成立する.

補題 1.5 の続き

(5) $A_n \in \mathcal{A}$ が $A_n \subset A_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) をみたすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となる.

(6) $A_n \in \mathcal{A}$ が $A_n \supset A_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) をみたすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となる.

(7) (Boole の定理/ユニオン・バウンド) $A_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, 2, \dots$) に対して

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n)$$

となる.

補題 1.5(5) の証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

を示す.

証明 $F_1 := A_1, F_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, F_{n+1} := A_{n+1} \setminus A_n$ とおく.
 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反であり

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n F_i \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

となる. よって

$$\Pr(A) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(F_n) \quad (\because \text{定義 ??(2)})$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \Pr(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right) \quad (\because (3))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n).$$

第1章 1.2. 確率と確率変数 (7)

定義 1.6 (Ω, \mathcal{A}) を可測空間とする. 写像 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は (Ω, \mathcal{A}) から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への 可測写像 であるとは

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

をみたすときをいう.

定義 1.7 (1) $d \geq 2$ ($d \in \mathbb{N}$) とする. $X : \Omega, \rightarrow \mathbb{R}^d$ が可測写像のとき, X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の 確率ベクトル と呼ばれる. 定義されている確率空間に誤解がないときには, 簡単に確率ベクトルということもある.

(2) $d = 1$ のとき, X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の 確率変数 と呼ばれる. 定義されている確率空間に誤解がないときには, 簡単に確率変数ということもある.

定理 1.8 (Ω, \mathcal{A}) を可測空間とし, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を写像とし, C を \mathbb{R} の集合族とする. $\forall C \in \mathcal{C}$ に対して, $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in C\} \in \mathcal{A}$ であり, C が $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を生成する⁵ とき, X は可測となる.

証明 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}$ を $\{X \in B\}$ と書くことにする. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\left\{ X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in B_n\}$$

$$\{X \in B^c\} = \{X \in B\}^c$$

となる. したがって, 集合族 $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \{X \in B\} \in \mathcal{A}\}$ は σ 加法族 (必要ならば, \mathbb{R} も加える) となる. よって, $C \subset \mathcal{D}$ であり, C は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を生成するので, 最小性から $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$ となることから X は確率変数であることがわかる. \square

⁵ \mathcal{B} は C を含む最小の σ 集合族.

第 1 章 1.2. 確率と確率変数 (8)

注意 1.9 (1) $(\mathbb{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対して, 定理 ?? における C の選択として, $\{(-\infty, r]; r \in \mathbb{R}\}$ と $\{(-\infty, q]; q \in \mathbb{Q}\}$ などがある.
(2) $d \geq 2 (d \in \mathbb{N})$ とする. $(\mathbb{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ に対して, 定理 ?? における C の選択として

$\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d); -\infty < a_i < b_i < \infty (i = 1, \dots, d)\}$

がある.

□

注意 1.10 以下のことを証明できる.

(1) (Ω, \mathcal{A}) , $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{C})$ を可測空間とする. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ と $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ は可測写像のとき, $f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ は可測写像となる.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, X_1, X_2, \dots, X_n は確率変数とし, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とする. このとき, $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は確率変数となる.

(3) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とする. このとき

$$\inf_n X_n \quad \sup_n X_n \quad \liminf_n X_n \quad \limsup_n X_n$$

も確率変数となる. ただし

$$(\inf_n X_n)(\omega) = \inf_n \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\} \quad (\omega \in \Omega),$$

$$(\sup_n X_n)(\omega) = \sup_n \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\} \quad (\omega \in \Omega),$$

$$(\liminf_n X_n)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} \{X_k(\omega), X_{k+1}(\omega), \dots\}) \quad (\omega \in \Omega),$$

$$(\limsup_n X_n)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} \{X_k(\omega), X_{k+1}(\omega), \dots\}) \quad (\omega \in \Omega).$$

第 1 章 1.2. 確率的独立性 (1)

定義 1.11 $A, B \in \mathcal{A}$ として, 2 つの事象 A と B が独立であるとは

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

が成り立つときをいう.

定義 1.12 $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ とする. $A_k \in \mathcal{A}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) として, 事象の集まり $\{A_k\}_{k=1}^N$ が独立であるとは, 任意の $2 \leq \ell \leq N$ と任意の $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\ell \leq N$ に対して

$$\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{\ell} \Pr(A_{k_j}) \quad (4)$$

が成り立つときをいう.

第 1 章 1.2. 確率的独立性 (2)

定義 1.13 一般に非可算な集合族 Λ によって添え字付けられた事象の集まり $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$, $A_k \in \mathcal{A}$ が独立であるとは, Λ の任意の有限部分集合 $\{k_1, k_2, \dots, k_\ell\} \subset \Lambda$ に対して (4) が成り立つときをいう.

定義 1.14 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を \mathcal{A} の部分 σ 集合族, すなわち

各 \mathcal{A}_k ($k = 1, 2$) は σ 加法族で $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$

をみtas. 部分 σ 集合族 \mathcal{A}_1 と \mathcal{A}_2 は独立であるとは, 任意の $A_1 \in \mathcal{A}_1$ と $A_2 \in \mathcal{A}_2$ に対して

$$\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)$$

が成り立つときをいう.

定義 1.15 (1) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_N$ を \mathcal{A} の部分 σ 集合族とする。
 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_N$ が独立であるとは、任意の
 $A_k \in \mathcal{A}_k (k = 1, 2, \dots, N)$ に対して

$$\Pr\left(\bigcap_{k=1}^N A_k\right) = \prod_{k=1}^N \Pr(A_k)$$

が成り立つときをいう。

(2) 一般に非可算集合 Λ で添え字付けられた \mathcal{A} の部分 σ 集合族の集まり $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であるとは、 Λ の任意の有限部分集合 $\{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}$ に対して、 $\{A_{k_j}\}_{j=1}^\ell$ が独立であるときをいう。

(3) $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から任意の組 $j \neq k (j, k \in \Lambda)$ をとるとき、 \mathcal{A}_j と \mathcal{A}_k が独立のとき、 $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は組ごとに独立という。

注意 1.16 一般に

部分 σ 加法族 $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^N$ は独立 \Rightarrow 部分 σ 加法族 $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^N$ は対独立

は成立する。しかし、逆は真ではない。

確率変数 X の期待値を以下の3つの段階, ① X の取りうる値の集合が有限である場合, ② 非負値確率変数の場合, ③ 一般の場合, の順に定義していく. ① ~ ③ の操作を行うことを標準機械という.

① 確率変数 X の取りうる値の集合が有限のとき

定義 1.18 確率変数 X は単純であるとは, X の取りうる値の集合 $\{X(\omega); \omega \in \Omega\}$ が有限であることをいう.

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{X(\omega); \omega \in \Omega\}$ と書く. ただし, x_1, x_2, \dots, x_n は異なる値である. このとき

$$A_j := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_j\} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{1}_{A_j}(\omega) \quad (5)$$

と書ける. $\{A_j\}_{j=1}^n$ は Ω の有限な分割となっていることに注意する. (5) のような形で表現される確率変数を単純 (simple) という.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (2)

定義 1.19 単純な確率変数 $X = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{1}_{A_j}$ ($x_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$) に対して, X の期待値 $\mathbf{E}[X]$ を

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^n x_j \mathbb{1}_{A_j}\right] = \sum_{j=1}^n x_j \Pr(A_j)$$

で定める.

命題 1.20 X, Y を単純な確率変数とし, $a, b \geq 0$ とする. このとき

$$\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$$

が成り立つ.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (3)

命題 1.20 の証明 $x_j, y_\ell \in \mathbb{R} (j = 1, \dots, m; \ell = 1, 2, \dots, n)$ とし, $\{A_j\}_{j=1}^m, \{B_\ell\}_{\ell=1}^n$ を Ω の分割とする. X, Y は単純なので

$$X = \sum_{j=1}^m x_j \mathbb{1}_{A_j}, \quad Y = \sum_{\ell=1}^n y_\ell \mathbb{1}_{B_\ell}$$

と書けたとする. すると $\{A_j \cap B_\ell\}_{j=1,2,\dots,m; \ell=1,2,\dots,n}$ も Ω の分割となる.

命題 1.20 の証明の続き このとき

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[aX + bY] &= \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^n (ax_j + by_\ell) \mathbb{1}_{A_j \cap B_\ell}\right] \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^n (ax_j + by_\ell) \Pr(A_j \cap B_\ell) \\
 &= a \sum_{j=1}^m x_j \Pr\left(\bigcup_{\ell=1}^n (A_j \cap B_\ell)\right) + b \sum_{\ell=1}^n y_\ell \Pr\left(\bigcup_{j=1}^m (A_j \cap B_\ell)\right) \\
 &= a \sum_{j=1}^m x_j \Pr\left(A_j \cap \underbrace{\left(\bigcup_{\ell=1}^n B_\ell\right)}_{=\Omega}\right) + b \sum_{\ell=1}^n y_\ell \Pr\left(\underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right)}_{=\Omega} \cap B_\ell\right) \\
 &= a \sum_{j=1}^m x_j \Pr(A_j) + b \sum_{\ell=1}^n y_\ell \Pr(B_\ell) \\
 &= a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].
 \end{aligned}$$

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (5)

命題 1.21 X, Y を単純かつ独立な確率変数とし, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. このとき

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

が成り立つ.

命題 1.21 の証明 p. 12 を参照.

□

② 非負値確率変数に対する期待値

定義 1.22 非負値確率変数 X の期待値を

$$\mathbf{E}[X] = \sup\{\mathbf{E}[Y]; Y \text{ は単純な確率変数で } Y \leq X\}$$

で定める。ただし、 $\mathbf{E}[X] = \infty$ も許す。

注意 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \nearrow X$ であるとは、 $X_1 \leq X_2 \leq \dots$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) をみたすことである。

定理 1.23(単調収束定理) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数列⁶で $\mathbf{E}[X_1] > -\infty$ かつ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \nearrow X$ をみたすとする。このとき、 X は確率変数で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X].$$

⁶ここでは、非負値確率変数に対して期待値を定義したが、一般の確率変数 X の期待値を ③ の流儀で定義することになる。

定理 1.23 の証明 ① X は確率変数であることの証明: $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{X \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq x\} \in \mathbf{A}$$

となるので, X は確率変数である.

② $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$ の存在の証明: 単調性から

$E[X_1] \leq E[X_2] \leq \dots \leq E[X]$ となる. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$ は $+\infty$ も含めて存在する.

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$ の存在の証明: $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \geq E[X]$ を示せば

よい. $E[X_1] = \infty$ のときは, 自明なので, $E[X_1] < \infty$ と仮定して証明すればよい. $Z_n := X_n - X_1$ と $Z := X - X_1$ とおく. 仮定より Z は非負値確率変数となる. よって, $Y \leq Z$ なる単純確率変数 Y に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[Z_n] \geq E[Y]$$

を示せばよい.

定理 1.23 の証明の続き いま, $Y = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{A_j}$ ($x_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$) と書く. すると, $Z(\omega) \geq y_j$ ($\omega \in A_j$) のとき

$$\mathbf{E}[Z_n] \geq \sum_{j=1}^n y_j \Pr(A_j)$$

を示せばよい. 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$A_{jn} := \{\omega \in A_j; X_n(\omega) \geq y_j - \epsilon\}$$

と定める. $n \rightarrow \infty$ のとき, $\{A_{jn}\} \nearrow A_j$ となる. さらに

$$\mathbf{E}[X_n] \geq \sum_{j=1}^n (y_j - \epsilon) \Pr(A_{jn})$$

である. 確率の連続性から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (y_j - \epsilon) \Pr(A_{jn}) = \sum_{j=1}^n (y_j - \epsilon) \Pr(A_j)$$

となる.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (9)

定理 1.23 の証明の続き したがって

$$\mathbf{E}[X_n] \geq \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{Pr}(A_j) - \epsilon$$

となる. この不等式は, 任意の $\epsilon > 0$ に対して成立するので

$$\mathbf{E}[X_n] \geq \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{Pr}(A_j)$$

がわかる. よって, ③ が証明できた.

□

定理 1.23 を用いるために, 関数 $\Psi_n(x) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\Psi_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{2^n} \lfloor 2^n x \rfloor\right)$$

で定める. ただし, $\lfloor r \rfloor$ は $r \in \mathbb{R}$ を超えない最大の整数とする.

命題 1.24 X を非負値確率変数とし, $X_n = \Psi_n(X)$ とおく. このとき, $X_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $\{X_n\} \nearrow X$ で各 X_n は単純確率変数となる.

命題 1.24 の証明 節 1.7.4 を参照. □

③ 一般の確率変数に対する期待値: 確率変数 X に対して

$$X^+(\omega) := \max\{0, X(\omega)\}, \quad X^-(\omega) := \max\{0, -X(\omega)\}$$

と定める. すると X^+ と X^- はともに非負値確率変数となる.
 $E[X^+] < \infty$ または $E[X^-] < \infty$ のとき

$$E[X] := E[X^+] - E[X^-]$$

と定める. $E[X^+] = \infty$ かつ $E[X^-] = \infty$ のとき, $E[X]$ は定義されない.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (11)

すると, 一般の確率変数に対しても $E[|X|] < \infty$, $E[|Y|] < \infty$ のとき

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. さらに, X と Y が独立で $E[|XY|] < \infty$ のとき

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

が成立する.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (12)

記法 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上で定義された確率変数とする.

(1) $\mathbf{P}^X(B) := \Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}) =: \Pr(X \in B) (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ を X の 分布 という.

(2) $\mathbf{F}^X(x) = \Pr(X \leq x) = \mathbf{P}^X((-\infty, x]) (\forall x \in \mathbb{R})$ を X の 累積分布関数(簡単に分布関数ともいう) という.

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して確率変数 X の分布を \mathbf{P}^X とし, \mathbf{m} を \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度とする. 非負値関数 \mathbf{p}^X で $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}^X(x) \mathbf{d}\mathbf{m}(x) = 1$ をみたすものが存在して

$$\mathbf{P}^X(B) = \int \mathbf{p}^X(x) \mathbb{1}_B(x) \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad (6)$$

とみたすとき, \mathbf{p}^X を X の 確率密度関数(p.d.f.) という.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (13)

問 1.2 (1) 確率変数 X の分布 \mathbf{P}^X は可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度となることを確認せよ.

(2) 確率変数 X の分布関数 \mathbf{F}^X は以下の性質を満たすことを確認せよ.

- $0 \leq \mathbf{F}^X(x) \leq 1$ で, $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{F}^X(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{F}^X(x) = 0$.
- \mathbf{F}^X は \mathbb{R} 上で非減少. すなわち, $x < y \Rightarrow \mathbf{F}^X(x) \leq \mathbf{F}^X(y)$.
- \mathbf{F}^X は \mathbb{R} 上の右連続関数. すなわち,
 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0; \epsilon > 0} \mathbf{F}^X(x + \epsilon) = \mathbf{F}^X(x) (\forall x \in \mathbb{R})$.
- \mathbf{F}^X の不連続点は高々可算個.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (14)

定義 1.25 X, Y を確率変数とし, それぞれの分布関数を F^X, F^Y と書くとする. X と Y の分布が同じとは

$$F^X(x) = F^Y(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (7)$$

のときをいう.

注意 1.26 確率変数 X, Y の分布を P^X, P^Y と書くとする. このとき, X と Y の分布が同じであれば

$$P^X(B) = P^Y(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立つことが知られている. この事実を踏まえて, 分布が同じであることを (7) で定めている.

命題 1.27 (統計学者の怠け公式) \mathbf{p}^X を持つとする. 任意の可測関数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\mathbf{E}[h(X)]$ が定義されるとする. このとき

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \mathbf{p}^X(x) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x)$$

と表現できる.

命題 1.27 の証明 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $h = \mathbb{1}_B$ とおくと

$$\mathbf{E}[h(X)] = \mathbf{E}[\mathbb{1}_B(X)] = \mathbf{Pr}(B)$$

となる. 一方, (6) に注意すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \mathbf{p}^X(x) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_B(x) \mathbf{p}^X(x) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) = \mathbf{P}^X(B) = \mathbf{Pr}(X \in B)$$

となり, この場合には定理の主張が正しい. あとは, 標準機械

① ~ ③ の段階を踏めばよい.

注意 1.28 期待値に関する基本的な事実を証明なしで述べておく。証明は、単純な確率変数に対して、成立することを確認した後に、標準機械を用いればよい。

(1) X と Y を非負値確率変数とし、 $E[|Y|] < \infty$ とする。このとき

$$X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$$

が成立する。

(2) X と Y を確率変数とし、 $E[|X|] < \infty$ かつ $E[|Y|] < \infty$ とする。このとき

$$X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$$

が成立する。

(3) 確率変数 X は $E[|X|] < \infty$ とする。このとき、 $|E[X]| \leq E[|X|]$ となる。

定義 1.29 X を $E[X^2] < \infty$ なる確率変数とする. このとき, X の分散 $\text{Var}[X]$ を

$$\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$$

で定める.

注意 1.30 $E[X^2] < \infty$ ならば, $E[|X|] < \infty$ がわかる. なぜならば

$$|x| \leq \max(1, |x|) \leq 1 + x^2$$

なので

$$E[|X|] \leq E[\max(1, |X|)] \leq 1 + E[X^2]$$

からわかる. よって, $E[X^2] < \infty$ を仮定すると X の分散が定義されることがわかる.

第 1 章 1.4.1 期待値の定義 (18)

命題 1.31 X を非負値確率変数とする. このとき,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \Rightarrow \mathbf{Pr}(X = 0) = 1$$

となる.

命題 1.31 の証明 まず

$$A := \{\omega \in \Omega; X(\omega) > 0\} = \{X > 0\},$$
$$A_n := \left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) > \frac{1}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく. すると $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ となる.

命題 1.31 の証明の続き によって, 補題 ??(5) から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \Pr(A) \quad (8)$$

となる. 一方, $A_n \subset A$ なので, $0 \leq \mathbb{1}_{A_n}(\omega) \leq \mathbb{1}_A(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) である. 実際, $\mathbb{1}_A$ は $\mathbb{1}_A : \Omega \ni \omega \mapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \in A^c) \end{cases}$ なる確率変数である. したがって, $\Pr(A_n) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) がわかる. (8) と合わせると $\Pr(A) = 0$ となる. よって

$$\begin{aligned} 1 &= \Pr(A^c) \\ &= \Pr\left(\left(\{X \leq 0\} \cap \{X \geq 0\}\right) \cup \left(\{X \leq 0\} \cap \{X < 0\}\right)\right) \\ &= \Pr(X = 0) + \underbrace{\Pr(X < 0)}_{=0} \\ &= \Pr(X = 0) \end{aligned}$$

が示せた.

命題 1.32 X を非負値確率変数とし, $p \geq 1$ とする. このとき

$$\mathbf{E}[X^p] = \int_0^\infty px^{p-1} \Pr(X > x^{1/p}) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x)$$

となる. ただし, \mathbf{m} は \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度である.

命題 1.32 の証明 簡単のために, X は Lebesgue 測度に関する p.d.f. \mathbf{p}^X を持つとして証明を与える. Fubini の定理 (定理 1.42) の定理を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty px^{p-1} \Pr(X > x^{1/p}) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) &= \int_0^\infty px^{p-1} \left\{ \int_{x^{1/p}}^\infty \mathbf{p}^X(t) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(t) \right\} \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{p}^X(t) \underbrace{\left\{ \int_0^t px^{p-1} \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \right\}}_{=t^p} \mathbf{d}\mathbf{m}(t) \\ &= \int_0^\infty t^p \mathbf{p}^X(t) \, \mathbf{d}\mathbf{m}(t) \\ &= \mathbf{E}[X^p]. \end{aligned}$$

命題 1.33 (Markov の不等式) X は非負値確率変数とする. このとき

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{t} \quad (\forall t > 0).$$

命題 1.33 の証明 $\mathbf{E}[X] = \infty$ のときは, 不等式は自明なので, $\mathbf{E}[X] < \infty$ として証明すればよい.

$$X = X \mathbb{1}_{[t, \infty)}(X) + X \mathbb{1}_{[0, t)}(X)$$

と書けることに注意する. すると期待値の線型性から

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[X \mathbb{1}_{[t, \infty)}(X)] + \underbrace{\mathbf{E}[X \mathbb{1}_{[0, t)}(X)]}_{\geq 0} \\ &\geq \mathbf{E}[X \mathbb{1}_{[t, \infty)}(X)] \geq t \mathbf{E}[\mathbb{1}_{[t, \infty)}(X)] = t \Pr(X \geq t) \end{aligned}$$

よりわかる.

第 1 章 1.4.2 期待値の不等式 (2)

系 1.34 (Chebyshev の不等式) X を確率変数とし

$\mu = \mathbf{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] < \infty$ ($0 < \sigma < \infty$) とする. このとき
 $\forall t > 0$ に対して

$$\Pr(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

系 1.34 の証明 $(X - \mu)^2$ に対して Markov の不等式 (命題 1.33) を適用する. すると

$$\Pr(|X - \mu| \geq t) = \Pr((X - \mu)^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathbf{E}[(X - \mu)^2]}{t^2}$$

がわかる.

□

第 1 章 1.4.2 期待値の不等式 (3)

定理 1.35 (Cauchy–Schwarz の不等式) 確率変数 X と Y は 2 次の有限な期待値を持つとき

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

となる.

定理 1.35 の証明 節 1.7.4 を参照. □

定義 1.36 関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が凸であるとは各 $x, y \in \mathbb{R}$ と $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$$

が成立するときをいう. さらに $-g$ が凸のとき g は concave であるという.

定理 1.36 (Jensen の不等式) X を有限な期待値を持つ確率変数とする. (1) 関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は凸で $g(X)$ の期待値は有限のとき

$$\mathbf{E}[g(X)] \geq g(\mathbf{E}[X])$$

となる.

(2) g が concave のとき

$$\mathbf{E}[g(X)] \leq g(\mathbf{E}[X])$$

となる.

定理 1.36 の証明 $\forall x \in \mathbb{R}$ に対してある定数 $r \in \mathbb{R}$ が存在⁷して

$$g(\mathbf{E}[X]) + r\{x - \mathbf{E}[X]\} \leq g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

となる. x に X を代入して上の不等式の両辺の期待値を取れば

$$g(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[g(X)]$$

がわかる.

⁷定理 A.42 を参照.

定理 1.38 (Young の不等式) $p, q > 1$ とし

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

をみたすとする. このとき $\forall a, b > 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

となる.

定理 1.38 の証明 関数 g を凸とし, $Y \sim \mathbf{Unif}(0, 1)$ とする. 可積分関数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $X = h(Y)$ とすれば, 定理 1.37 (Jensen の不等式) から

$$g\left(\int_0^1 h(y) \, d\mathbf{m}(y)\right) = g(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[g(X)] = \int_0^1 g(h(y)) \, d\mathbf{m}(y)$$

を得る. ただし, \mathbf{m} は \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度である.

定理 1.38 の証明の続き ここで

$$g(x) = e^x, \quad h(y) = \begin{cases} p \log a & \left(0 \leq y < \frac{1}{p}\right) \\ q \log b & \left(\frac{1}{p} \leq y \leq 1\right) \end{cases}$$

とおく. すると関数 g は凸なので

$$\begin{aligned} ab &= \exp\left\{\frac{p \log a}{p} + \frac{q \log b}{q}\right\} \\ &= \exp\left\{\int_0^{1/p} p \log a \, d\mathbf{m}(y) + \int_{1/p}^1 q \log b \, d\mathbf{m}(y)\right\} \\ &= \exp\left\{\int_0^1 h(y) \, d\mathbf{m}(y)\right\} \leq \int_0^1 \exp\{h(y)\} \, d\mathbf{m}(y) \\ &= \frac{1}{p} \exp\{p \log a\} + \frac{1}{q} \exp\{q \log b\} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

がわかる.

定理 1.39 (1) (Hölder の不等式) $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ と $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし, 確率変数 X, Y は $\mathbf{E}[|X|^p] < \infty$, $\mathbf{E}[|Y|^q] < \infty$ をみたすとする. このとき, $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ で

$$\mathbf{E}[|XY|] \leq \{\mathbf{E}[|X|^p]\}^{1/p} \{\mathbf{E}[|Y|^q]\}^{1/q}$$

となる.

(2) (Minkowski の不等式) $1 \leq p \leq +\infty$ で $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし, 確率変数 X, Y は $\mathbf{E}[|X|^p] < \infty$, $\mathbf{E}[|Y|^p] < \infty$ をみたすとする. このとき, $\mathbb{E}[|X + Y|^p] < \infty$ で

$$\{\mathbf{E}[|X + Y|^p]\}^{1/p} \leq \{\mathbf{E}[|X|^p]\}^{1/p} + \{\mathbf{E}[|Y|^p]\}^{1/p}$$

となる.

定理 1.39 の証明 節 1.7.5 を参照.

定理 1.40 (Fatou の補題) $C(> -\infty)$ を定数とし, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数数列とし, $X_n \geq C (\forall n \in \mathbb{N})$ とする. このとき

$$\mathbf{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n]$$

が成り立つ. ただし, 不等式は両辺が $+\infty$ の場合も含めている.

定理 1.40 の証明 $Y_n := \inf_{k \geq n} X_k$ とし

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$$

とおく. このとき, $Y_n \geq C$ で $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \nearrow Y$ となる. さらに, $Y_n \leq X_n$ である. 期待値の順序保存性と単調収束定理から

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Y_n] = \mathbf{E}[Y]$$

がわかる. よって, 補題の主張は証明された.

定理 1.41 X, X_1, X_2, \dots を確率変数列とし, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ とする. さらにある確率変数 Y が存在して, $|X_n| \leq Y (\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $E[Y] < \infty$ とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$$

が成り立つ.

定理 1.41 の証明 ① $E[X] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$ の証明: すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $Y + X_n \geq 0$ となることに注意する. 確率変数列 $\{Y + X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に Fatou の補題 (定理 ??) を適用すると

$$E[Y] + E[X] = E[Y + X] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[Y + X_n] = E[Y] + \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$$

がわかる. したがって

$$E[X] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]. \quad (9)$$

① $\mathbf{E}[X] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n]$ の証明: 同様に $Y - X_n \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N})$ に注意して, Fatou の補題 (定理 ??) を $\{Y - X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に適用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] - \mathbf{E}[X] &\leq \mathbf{E}[Y - X] = \mathbf{E}[Y] + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[-X_n] \\ &= \mathbf{E}[Y] - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] \end{aligned}$$

がわかる. がわかる. よって

$$\mathbf{E}[X] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] \quad (10)$$

がわかる. (9) と (10) を合わせると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n]$$

がわかる.

第 1 章 1.4.3 収束定理 (5)

② の証明の続き しかし

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n]$$

なので

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X]$$

がわかる. よって, 定理は証明された.

□

つぎに、ふたつのパタンの Fubini の定理を挙げておく。定理 1.42 は非負値確率変数に対するものである。一方、定理 1.43 は非負値とは限らない確率変数に対するものである。このため、可積分性が要求されることになる。

定理 1.42 (Fubini の定理) X を確率空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathbf{Pr}_1 \times \mathbf{Pr}_2)$ 上の非負値確率変数とする。このとき、以下が成立する。

- (1) 関数 $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto Y_1(\omega_1) = \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_2}[X(\omega_1, \cdot)]$ は確率空間 $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{Pr}_1)$ 上の確率変数である。
- (2) 関数 $\Omega_2 \ni \omega_2 \mapsto Y_2(\omega_2) = \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1}[X(\cdot, \omega_2)]$ は確率空間 $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbf{Pr}_2)$ 上の確率変数である。
- (3) $\mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1}[Y_1] = \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1 \times \mathbf{Pr}_2}[X] = \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_2}[Y_2]$.

定理 1.42 の証明 条件 (1) ~ (3) をみたす非負値確率変数の集合は Dynkin 族であることを示し、あとは標準機械を用いればよい。□

定理 1.43 (Fubini の定理) X を確率空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathbf{Pr}_1 \times \mathbf{Pr}_2)$ 上の確率変数で $\mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1 \times \mathbf{Pr}_2}[|X|] < \infty$ とする. このとき, 以下が成立する.

(1) \mathbf{Pr}_1 - a.s. な ω_1 に対して, 確率変数 $X(\omega_1, \cdot)$ は

$\mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_2}[|X(\omega_1, \cdot)|] < \infty$ をみたし

$$Y_1(\omega_1) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_2}[X(\omega_1, \cdot)] & (X(\omega_1, \cdot) \in L^1(\mathbf{Pr}_1)) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

は $L^1(\mathbf{Pr}_1)$ に属する確率変数である.

(1) \mathbf{Pr}_2 - a.s. な ω_2 に対して, 確率変数 $X(\cdot, \omega_2)$ は

$\mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1}[|X(\cdot, \omega_2)|] < \infty$ をみたし

$$Y_2(\omega_2) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1}[X(\cdot, \omega_2)] & (X(\cdot, \omega_2) \in L^1(\mathbf{Pr}_2)) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

は $L^1(\mathbf{Pr}_2)$ に属する確率変数である.

(3) $\mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1}[Y_1] = \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_1 \times \mathbf{Pr}_2}[X] = \mathbf{E}_{\mathbf{Pr}_2}[Y_2]$.

定理 1.43 の証明 証明は定理 1.42 と同じ方針である. □

本日の講義内容

- 講義全体のガイダンス
- 第0章 なぜ経験過程理論を学ぶか
- 第1章 準備: 確率空間・事象・確率変数・期待値
 - 1.1. 記号
 - 1.2 確率と確率変数
 - 1.3 確率的独立性
 - 1.4 期待値の定義
 - 1.5 条件付き期待値