古典的経験過程に関わる可測性についてのノート

今野良彦*

2021 年 8 月 30 日

Abstract

古典的経験過程とは, 閉区間 [0, 1] を添字付けられている経験過程のことをいう. このノートは, 古典的経験過程に関わる可測性の問題を初歩的に解説することを目的とする. Billingsley (1999, p.157) の有名な例を初等的に解説したものである. このノートを読むに当たって予備知識がなるべく必要ないように, 自己完結な記述に努めたつもりである.

Contents

*日本女子大学理学部数物科学科

0 記号一覧

記号	説明
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathcal{B}([0,\,1])$	閉区間 $[0,\,1]$ 上の開集合族を含む最小の σ 加法族.
$\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$	$\mathcal{B}([0,\,1])$ の完備化.
$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}\{(a,\,b]\} = b - a\,(a,\,b \in [0,\,1]$ をみたす $\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$ 上の完備な測度. $[0,\,1]$ 上の Lebesgue 可測集合族上の Lebesgue 測度である.
X	$X:\,[0,\,1] \ni \omega \mapsto X(\omega) = \omega.$
$\ell^\infty([0,\,1])$	$[0,\,1]$ 上で定義された有界函数全体のなす函数族.
$\mathrm{C}([0,\,1])$	$[0,\,1]$ 上で定義された連続函数全体のなす函数族.
$\mathbb{1}_B(x)$	$[0,\,1]$ の部分集合 B と点 $x \in [0,\,1]$ に対して, $\mathbb{1}_B(x) := \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}.$
$\mathcal{I}([0,\,1])$	$\mathcal{I}([0,\,1]) := \{\mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,) :\, [0,\,1] \ni t \mapsto \mathbb{1}_{[0,\,x]}(t) \in \{0,\,1\};\, x \in [0,\,1]\}.$
$\\|\cdot\\|_{\sup}$	$\ell^\infty([0,\,1])$ 上の一様ノルム. すなわち, $g \in \ell^\infty([0,\,1])$ に対して, $\\|g\\|_{\sup} := \sup_{x\in[0,\,1]} \|g(x)\|.$
$\imath$	$\imath:\,[0,\,1] \ni x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,) \in \mathcal{I}([0,\,1])$
$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$ 可測	$(\Omega_1,\,\mathcal{F}_1),\,(\Omega_2,\,\mathcal{F}_2)$ を測度空間としたとき, 写像 $f:\,\Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ が, 任意の $A \in \mathcal{F}_2$ に対して, $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega;\, f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1$ をみたすもの.
$B_\epsilon(g)$	$\epsilon > 0$ と $g \in \ell^\infty([0,\,1])$ に対して, $B_\epsilon(g) := \{\tilde{g} \in \ell^\infty([0,\,1]);\, \\|\tilde{g} - g\\|_{\sup} < \epsilon\}.$
$\mathfrak{O}$	ある集合上の位相.
$\mathfrak{O}_{\\|\cdot\\|_{\sup}}$	ノルム $\\|\cdot\\|_{\sup}$ で誘導された $\ell^\infty([0,\,1])$ の開集合族を含む最小の位相.
$\mathcal{B}_{\\|\cdot\\|_{\sup}}$	ノルム $\\|\cdot\\|_{\sup}$ で誘導された $\ell^\infty([0,\,1])$ の開集合族を含む最小の σ 加法族. $\mathcal{B}_{\\|\cdot\\|_{\sup}} := \sigma[\mathfrak{O}_{\\|\cdot\\|_{\sup}}].$

注意 0.1 位相をフランクトゥーア体の大文字, 可測集合族を Latin letters の筆記体大文字で書いている.

1　閉区間 $[0,\,1]$ で添字づけられている古典的な経験過程の可測性

$([0,\,,\,1],\,\mathcal{B}([0,\,1]),\,\mu)$ を確率空間とする．ただし，$\mathcal{B}([0,\,1])$ は閉区間 $[0,\,1]$ 上の開集合族[1]を含む最小の σ 集合族で，μ は $(a,\,b]\subset[0,\,1]\,(0\le a\le b\le 1)$ に対して，

$$\mu((a,\,b])=b-a$$

をみたす可算加法的測度である．さらに，$([0,\,,\,1],\,\mathcal{B}([0,\,1]),\,\mu)$ を完備化したものを

$$([0,\,,\,1],\,\overline{\mathcal{B}([0,\,1])},\,\mathbb{P})$$

と書くことにする．すなわち，任意の $N\subset[0,\,1]$ に対して，

$$\mathbb{P}(N)=0 \quad \Longrightarrow N\in\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$$

をみたしている．

写像 X を

$$[0,\,1]\ni\omega\mapsto X(\omega)=\omega\in[0,\,1]$$

で定義する．これは，$\forall B\in\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$ に対して，

$$\{\omega\in[0,\,1];\,X(\omega)\in B\}\in\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$$

をみたしている．すなわち，X は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}\Big/\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$ 可測写像である．

つぎに，ノルム $\|\cdot\|_{\sup}$ によって誘導される $\ell^\infty([0,\,1])$ 上の開集合族を $\mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}}$ と書くことにする．さらに，$\mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}}$ を含む最小の σ 加法族を

$$\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{\sup}}:=\sigma[\mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}}]$$

とする．

いま，$\ell^\infty([0,\,1])$ の部分集合として，

$$\mathcal{I}([0,\,1]):=\{[0,\,1]\ni t\mapsto \mathbb{1}_{[0,\,x]}(t)\in\{0,\,1\};\,x\in[0,\,1]\}$$

を考える．

任意の $\epsilon>0$ と $g_x=\mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,)\in\mathcal{I}([0,\,1])\,(x\in[0,\,1]$ に対して，

$$B_\epsilon(g_x):=\{g\in\mathcal{I}([0,\,1]);\,\|g-g_x\|_{\sup}<\epsilon\}$$

とおく．すると，

[1]閉区間 $[0,1]$ の開集合 A とは，$\mathbb{R}$ の開集合 U があって，$A=[0,\,1]\cap U$ と書けるときをいう．すなわち，相対位相である．

(i) $0 < \epsilon < 1$ と $g_x \in \mathcal{I}([0,\,1])\,(x \in [0,\,1])$ に対して, $B_\epsilon(g_x) = \{g_x\}$.

(ii) $\epsilon \geq 1$ に対して, $B_\epsilon(g_x) = \mathcal{G}_0$.

となることに注意する.

この開球を用いて, 次を定める:

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{ind}} := \{B_{1/2}(g);\, g \in \mathcal{I}([0,\,1])\}$$

とし,

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{B}_{\mathrm{ind}}) := \bigcap\{\mathfrak{O};\, \mathfrak{B}_{\mathrm{ind}} \subset \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \text{ は } \mathcal{I}([0,\,1]) \text{ の位相}\}$$

とする. すると $\mathfrak{O}(\mathfrak{B}_{\mathrm{ind}})$ は$\mathcal{I}([0,\,1])$ の位相となる. さらに, $\|\cdot\|_{\sup}$ ノルムで誘導された $\ell^\infty([0,\,1])$ の開集合族を含む最小の位相である $\mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}}$ に対して,

$$O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_{\mathrm{ind}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ある } U \in \mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}} \text{ が存在して, } O = U \cap \mathcal{I}([0,\,1])$$

となる. このことを

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{B}_{\mathrm{ind}}) =: \mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}} \cap \mathcal{I}([0,\,1])$$

と書くことにする.

各 $x \in [0,\,1]$ に対して, 写像 $\imath$ を

$$\imath :\, [0,\,1] \ni x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,) \in \mathcal{I}([0,\,1])$$

と定義する. 写像 $\imath$ は Euclid 空間 $[0,\,1]$ から準距離空間 $(\mathcal{I}([0,\,1]), \|\cdot\|_{\sup})$ は全単射だが, 連続ではない[2]. したがって, $\imath$ は同相写像ではない. しかし, 逆写像 $\imath^{-1}$ は連続であること[3]に注意せよ.

任意の部分集合 $O \subset \mathcal{I}([0,\,1])$ に対して,

$$O = \bigcup_{g \in O} B_{1/2}(g) \tag{1}$$

[2] $0 < \epsilon < 1$ と $\mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,) \in \mathcal{I}([0,\,1])$ に対して,

$$B_\epsilon(\mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,)) = \{\mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,)\}$$

となり, $\imath^{-1}(B_\epsilon(\mathbb{1}_{[0,\,x]}(\,\cdot\,)) = x$ は $[0,\,1]$ の開集合ではない.

[3] このことは, 以下の議論から $\mathfrak{O}_{\|\cdot\|_{\sup}} \cap \mathcal{I}([0,\,1])$ が $\mathcal{I}([0,\,1])$ の密着位相になっていることからわかる.

とかけるので, $O \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B}_{\mathrm{ind}})$ となる．したがって, $O \in \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{\sup}}$ である．さらに, 逆像の性質と (1) から

$$
\begin{aligned}
\{\omega;\ \mathbb{1}_{[0,\,X(\omega)]}(\,\cdot\,) \in O\} &= \left\{\omega;\ \mathbb{1}_{[0,\,X(\omega)]}(\,\cdot\,) \in \bigcup_{g \in O} B_{1/2}(g)\right\} \\
&= \bigcup_{g \in O} \{\omega;\ \mathbb{1}_{[0,\,X(\omega)]}(\,\cdot\,) \in B_{1/2}(g)\} \\
&= \bigcup_{g \in O} \{\omega;\ \mathbb{1}_{[0,\,X(\omega)]}(\,\cdot\,) = g\} \\
&= \imath^{-1}(O).
\end{aligned}
$$

選択公理[4]を仮定していること[5]で, $\imath^{-1}(O)$ を閉区間 $[0,\,1]$ 上の Lebesgue 可測でない集合とすることができる．したがって, 写像 $\imath$ は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1])} \Big/ \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{\sup}}$ 可測ではない．以上の議論より以下のことがわかる:

定理 1.1 写像

$$[0,\,1] \ni \omega \mapsto \mathbb{1}_{[0,\,X(\omega))]}(\,\cdot\,) \in (\mathcal{I}([0,\,1]),\,\|\,\cdot\,\|_{\sup})$$

は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1])} \Big/ \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{\sup}}$ 可測ではない．

系 1.1 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ を X の独立複製とし,

$$\widehat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\,X_i(\omega)]}(t) \qquad (t \in [0,\,1])$$

---

[4]集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\Lambda}$ に対して,

$$\text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して, } X_\lambda \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset.$$

[5]選択公理を仮定することでいろいろなことが保証されている．たとえば, $(X,\,d_X)$, $(Y,\,d_Y)$ は距離空間とし, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする．このとき, $a \in X$ とする．a に収束する X の任意の数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に対して, Y の点列 $\{f(a_n)\}_{n \geq 1}$ が $f(a)$ に収束するならば, f は a において連続であることを示すためにも（可算）選択公理が必要である．すなわち, $f(a)$ を含む任意の Y の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は X の開集合であることが成立することを示すために, （可算）選択公理が必要である．藤原 (2020, pp.143-144) を参照のこと．

とする. このとき, 写像

$$[0,\,1]^n \ni (\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_n) \mapsto \widehat{F}_n(\,\cdot\,) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\,X_i(\omega_i)]}(\,\cdot\,) \in (\ell^\infty([0,\,1]),\,\mathcal{B}_{\|\,\cdot\,\|_{\sup}})$$

は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1]^n)}\Big/\mathcal{B}_{\|\,\cdot\,\|_{\sup}}$ 可測ではない.

定理 1.2 任意の $t \in [0,\,1]$ に対して, 写像

$$[0,\,1] \ni \omega \mapsto \mathbb{1}_{[0,\,X(\omega))]}(t) \in \{0,\,1\}$$

は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}\Big/\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$ 可測である.

証明 (i) 任意の $r \geq 1$ に対して,

$$\{\omega \in [0,\,1];\,\mathbb{1}_{[0,\,X(\omega))]}(t) \leq r\} = [0,\,1] \in \overline{\mathcal{B}([0,\,1])}.$$

(ii) $0 \leq r < 1$ に対して,

$$\{\omega \in [0,\,1];\,\mathbb{1}_{[0,\,X(\omega))]}(t) \leq r\} = \{\omega \in \Omega;\,X(\omega) \geq t\} = [t,\,1] \in \overline{\mathcal{B}([0,\,1])}.$$

(iii) $r < 0$ に対して,

$$\{\omega \in [0,\,1];\,\mathbb{1}_{[0,\,X(\omega))]}(t) \leq r\} = \emptyset \in \overline{\mathcal{B}([0,\,1])}.$$

よって, (i)〜(iii) よりわかる. □

系 1.2 任意の $t \in [0,\,1]$ に対して, 写像

$$[0,\,1]^n \ni (\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_n) \mapsto \widehat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\,X_i(\omega_i)]}(t) \in [0,\,1]$$

は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1]^n)}\Big/\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$ 可測である.

定理 1.3 写像

$$\begin{aligned}[0,\,1]^n \ni (\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_n) \quad &\mapsto \quad \sup_{t\in[0,\,1]} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| \\ &= \quad \sup_{t\in[0,\,1]} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\,X_i(\omega_i)]}(t) - F(t)\right| \in [0,\,1]\end{aligned}$$

は $\overline{\mathcal{B}([0,\,1]^n)}\Big/\overline{\mathcal{B}([0,\,1])}$ 可測である.

証明 $t = t_0 \in [0,\,1]$ で

$$|\widehat{F}_n(t_0) - F(t_0)| = \sup_{t\in[0,\,1]} |\widehat{F}_n(t) - F(t)|$$

とする．すると $[0,\,1] \cap \mathbb{Q}$ の減少列 $\{t_m\}_{m\geq 1}$ で $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ なるものが取れる．これより, 任意の $r \in [0,\,1]$ に対して,

$$\begin{aligned}
\left\{\underline{\omega} \in [0,\,1]^n;\ \sup_{t\in[0,\,1]} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| > r\right\} &= \left\{\underline{\omega} \in [0,\,1]^n;\ |\widehat{F}_n(t_0) - F(t_0)| > r\right\} \\
&= \left\{\underline{\omega} \in [0,\,1]^n;\ \sup_{m\geq 1} |\widehat{F}_n(t_m) - F(t_m)| > r\right\} \\
&= \bigcup_{m\geq 1} \left\{\underline{\omega} \in [0,\,1]^n;\ |\widehat{F}_n(t_m) - F(t_m)| > r\right\} \\
&\in \overline{\mathcal{B}([0,\,1]^n)}.
\end{aligned}$$

ただし, $\underline{\omega} = (\omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_n)$.

$\square$

注意 1.1 写像

$$[0,\,1]^n \ni (\omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_n) \mapsto \widehat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\, X_i(\omega_i)]}(t) \in [0,\,1]$$

は可測でないにもかかわらず, ランダムではない函数との差[6]の絶対値の上極限をとったものである写像

$$[0,\,1]^n \ni (\omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_n) \ \mapsto\ \sup_{t\in[0,\,1]} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| \in [0,\,1]$$

は可測になる．$\mathbb{R}$ が稠密な可算部分集合 $\mathbb{Q}$ をもつことから, その可測性が保証されることに注意せよ．

---

[6]ランダムでない函数を引いたり, 絶定値をとることは, 可測性の議論には影響を与えないことに注意せよ．

2　補遺１：数と濃度についての準備

この節は, DiBenedetto (2016, Ch.1) を参考にした.

定義 2.1 X, Y をふたつの集合とする. X から Y への１対１対応上への写像 f が存在するとき, X と Y の濃度は等しいといい, $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ と記す. X から Y への一対一対応が存在するとき, $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ と記す.

$\mathbb{N}$ と濃度が同じ集合を可算集合といい, 有限集合と可算集合をあわせて高々可算集合であるという.

命題 2.1 可算集合の有限個要素の列からなる集合もまた可算集合である.

証明　$\{2, 3, 5, 7, 1, \ldots, m_j, \ldots\}$ を素数列とする. 任意の正の整数は, 以下のような一意的な分解をもつ:

$$n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \cdots m_j^{\alpha_j}.$$

ただし, 列 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j\}$ 有限で, α_j は非負である. 可算集合を E とし, 有限個要素の列からなる集合を S_E と書く. S_E の任意の元を σ とすれば,

$$\sigma = \{e_1, e_2, \ldots, e_j\}, \qquad e_i \in E \, (i = 1, 2, \ldots, j).$$

E は可算集合なので, e_j は α_i に一意的に対応させることができる. したがって, 上記の分解を使い, σ は正の整数に一意的に対応させることができる. □

系 2.1 整数の組 $\{m, n\} \, (m, n \in \mathbb{N})$ から集合は可算集合.

系 2.2 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算.

命題 2.2 可算集合の可算個の集まりの和集合は可算.

証明　可算集合の可算個の集まりを $\{E_j\}$ とする. 各 E_j は可算集合なので, 要素を下記のように並べることができる:

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\} \\ E_2 & = & \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\} \\ \vdots & & \vdots \\ E_n & = & \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$\bigcup E_j$ の要素は自然数の組 $\{m, n\}$ と一対一対応する. □

命題 2.3 $\mathbb{R}$ の部分集合 $[0, 1]$ は可算集合ではない.

証明 Cantor の対角線論法による. □

命題 2.4 X, Y を二つの集合とする. $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ となる必要十分条件は$\mathrm{card}(X) \le \mathrm{card}(Y)$ かつ $\mathrm{card}(X) \ge \mathrm{card}(Y)$ である.

証明 To be written. □

X を集合, m を正の整数としたとき,

$$X^m := X \times X \times \cdots \times X$$

を X の要素の m 個の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 全体から成る集合とする. また, 2^X を X のすべての部分集合からなる集合とする.

命題 2.5 m を自然数とする. $\mathrm{card}(\mathbb{N}^m) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. 任意の空でない集合 X に対して, $\mathrm{card}(2^X) > \mathrm{card}(X)$ が成立する.

系 2.3 $\mathrm{card}(\mathbb{R}) < \mathrm{card}(2^{\mathbb{R}})$.

命題 2.6 $\mathrm{card}(2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(2^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

証明 To be written. □

定義 2.2 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする. 集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

命題 2.7 3 つの任意の空でない集合 X, Y, Z に対して,

$$\mathrm{card}(X^{Y\times Z}) = \mathrm{card}[(X^Y)^Z].$$

証明 To be written. □

系 2.4 $\mathrm{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

系 2.5 $\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{選択公理}}$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする.

$$\text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して, } X_\lambda \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset.$$

3　補遺２：像と逆像

定義 3.1 X, Y を空でない集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする.
　$A \subset X$ とする. このとき, $f(A) \subset Y$ を

$$f(A) := \{f(x); x \in A\}$$

により定め, これを f による A の像という. ただし, $f(\emptyset) = \emptyset$ とする.
　$B \subset Y$ とする. このとき, $f^{-1}(B) \subset X$ を

$$f^{-1} := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

により定め, これを f による B の逆像という. ただし, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ と定める.

命題 3.1 X, Y を空でない集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とし, $A, A_1, A_2 \subset X, B, B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, (1) $\sim$ (10) が成り立つ.
(1) $A_1 \subset A_2 \quad \Longrightarrow \quad f(A_1) \subset f(A_2)$.
(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(3) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
(4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(5) $B_1 \subset B_2 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
(9) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
(10) $f(f^{-1}(B))) \subset B$.

注意 3.1 $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ のとき, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ を

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 3$$

と定める.
(4) についての注意:

$$f(\{1\} \setminus \{2\}) = \{3\}, \quad f(\{1\}) \setminus f(\{2\}) = \emptyset.$$

したがって,

$$f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$$

は一般には成立しない.

(9) についての注意:

$$f^{-1}(f(\{1\})) = \{1,\, 2\} \supset \{1\}$$

より

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

は一般には成立しない.

(10) についての注意:

$$f(f^{-1}(\{3,\, 4\})) = \{3\} \subset \{3,\, 4\}$$

より

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

は一般には成立しない.

命題 3.2 X, Y を空でない集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{B_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ をそれぞれ X, Y の部分集合族とする. このとき, 次の (1) ～ (6) は成立する.

(1) $\displaystyle \left\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right\}^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$

(2) $\displaystyle \left\{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right\}^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$

(3) $\displaystyle f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$

(4) $\displaystyle f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$ さらに, f が単射ならば, 等号が成立する.

(5) $\displaystyle f^{-1}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} B_\xi\right) = \bigcup_{\xi\in\Xi} f^{-1}(B_\xi).$

(6) $\displaystyle f^{-1}\left(\bigcap_{\xi\in\Xi} B_\xi\right) = \bigcap_{\xi\in\Xi} f^{-1}(B_\xi).$

4　補遺３：位相空間についての準備

5　補遺４：測度論についての準備

References

[1] Billingsley, Patrick (1999) : CONVERGENCE OF PROBABILITY MEASURES, 2nd. edition. John Wiley & Sons, INC.

[2] DiBenedetto, Emmanuele 2016 : REAL ANALYSIS, 2ed. editon. Birkhäuser.

[3] Dudley, R.M. : REAL ANALYSIS AND PROBABILITY. Cambridge University Press.

[4] 藤原敦 (2000) : 手をうごかしてまなぶ集合と位相. 裳華房.