Dynkin の定理

今野 良彦
大阪公立大学

(2023 年 8 月 26 日 compiled)

概 要

与えられた 2 つの確率変数が同じ分布をもつかどうを確認するために Borel 集合族を生成するより扱いやすい集合族で確認すればよいことを保証するのが Dynkin の定理である．Dynkin の証明とその利用法を平易に説明するを目指した．数理統計学の教科書では, 測度論の議論が深くかかわるので詳しく触れられない．しかし, 基本的な事実を厳密に証明する上で非常に強力な定理である．[4] の 2 章を借用した.

目 次

0　記号について

ここに掲げる規則は Jordan Stoyanov (2023, IMS Bulletin **52**, Issue 4, 25-26) の借用である.

3 つの基本規則

- 規則 1: ひとつの項目や対象に対してひとつの文字か記号を使用すること.
- 規則 2: 対象の同じグループに対しては同じ字体を使用すること.
- 規則 3: 対象の異なるグループに対しては異なる字体を使用すること.

派生規則

- 確率, 確率分布, 期待値, 分散, 共分散には `\mathsf` を使用する. すなわち, Pr, P, E, Var, Cov のように記す.
- 重要な空間には `\mathbb` を使用する.
- 集合族には `\mathcal` を使用する.
- 略称/略語は「p.m.f.」等のように書く.
- 分布名は `\mathsf` を使用する. たとえば, $\mathsf{Poi}(\lambda)$ で母数 $\lambda > 0$ の Poisson 分布を表す.
- 母数と母数空間等の未知のものは Greek letters を使用する.
- ベクトルと行列は小文字と大文字の `\mathbf` を使用する.
- 内部等の数学の概念は `\mathrm` を使用する. たとえば, 母数空間 $\mathsf{\Theta}$ の内部を $\mathrm{int}\mathsf{\Theta}$ (`\mathrm{int}\mathsf{\Theta}`) と書く.

記号一覧

記号	説明
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{R}^n$	有限 n 個の実数空間の直積集合
$\mathbb{C}$	複素全体の集合
$\mathbb{R}^n$	有限 n 個の実数空間の直積集合
$\mathbb{1}_A(x)$	指示関数. 集合 A に対して, $$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$ である.
$\aleph_0$	自然数全体の濃度.
$\mathbf{I}_n$	n 次の単位行列
$\mathbf{0}_n$	$\mathbb{R}^n$ の零ベクトル
$\mathbf{A}^\top$	m 行 n 列の行列 $\mathbf{A}$ の転置行列.
$\mathbf{A}^{-1}$	正方行列 $\mathbf{A}$ の逆行列
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	σ 集合族.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ 上の Boerel 集合族. すなわち, $\mathbb{R}$ の開集合族を含む最小の σ 集合族.
p.d.f	確率密度関数.
p.m.f	確率関数 (確率質量関数).
c.d.f	分布関数.

1　Dynkin の定理

定義 1. Ω を空でない集合とし, $\mathcal{L}$ と $\mathcal{P}$ を Ω の部分集合族とする.
(1) 集合族 $\mathcal{P}$ が π **システム**であるとは

$$A,\, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$$

が成立するときをいう.
(2) 集合族 $\mathcal{L}$ が λ **システム**であるとは, つぎの条件 (i) ～ (iii) が成り立つときをいう.

(i) $\Omega \in \mathcal{L}$.

(ii) $A,\, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{L}$.

(iii) $A_j \in \mathcal{L}$ かつ $A_j \subset A_{j+1}\, (j = 1,\, 2,\, \ldots) \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$.

命題 2. 空でない集合 Ω の部分集合族 $\mathcal{L}$ が λ システムであるために必要十分条件は次の条件 (i) ～ (iii) をすべてみたすことである.

(i)$'$ $\Omega \in \mathcal{L}$.

(ii)$'$ $A \in \mathcal{L} \implies A^c \in \mathcal{L}$.

(iii)$'$ $A_j \in \mathcal{L}\, (j = 1,\, 2,\, \ldots)$ かつ $A_i \cap A_j \neq \varnothing\, (i \neq j) \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$.

Proof. ($\Rightarrow$): (ii)$'$ の確認. $A \in \mathcal{L}$ のとき, $A \subset \Omega$ かつ $\Omega \in \mathcal{L}$ なので, 定義 1(ii) から

$$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{L}$$

となる.
(iii)$'$ の確認. まず, $A,\, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \cap B \neq \varnothing$ のとき

$$A \cup B \in \mathcal{L} \tag{1}$$

を示す.
　仮定と (ii)$'$ から $A^c \in \mathcal{L}$ かつ $B \subset A^c$ である. なぜならば, $\forall \omega \in B$ のとき, $A \cap B = \varnothing$ なので, $\omega \notin A$ となる. よって $\omega \in A^c$ がわかるので, $B \subset A^c$ が示せた.
　このことと (ii) から $A^c \setminus B \in \mathcal{L}$ となる. さらに

$$A^c \cap B^c = A^c \setminus B \in \mathcal{L} \tag{2}$$

となることと (ii)$'$ より

$$A \cup B = \left(A^c \cap B^c\right)^c \in \mathcal{L}$$

がわかる．よって

$$A,\, B \in \mathcal{L} \implies A \cup B \in \mathcal{L} \tag{3}$$

がわかる．

$A_j \in \mathcal{L}\,(j = 1,\, 2, \ldots)$ と $A_i \cap A_j = \varnothing\,(i \neq j)$ とする．このとき

$$B_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく．(3) より $B_n \in \mathcal{L}$ となる．さらに，B_n の定め方から

$$B_n \subset B_{n+1}$$

となる．よって定理 1(iii) から

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$$

がわかる．よって (i)$'$ ∼ (iii)$'$ が確認できた．

(⇐): <u>(ii) の確認</u>. $A,\, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \subset B$ とする．すると (ii)$'$ から $A^c,\, B^c \in \mathcal{L}$ となる．さらに $A \subset B$ から $A \cap B^c = \varnothing$ となる．よって (iii)$'$ から $A \cup B^c \in \mathcal{L}$ となる．再度，(ii)$'$ を用いると

$$B \setminus A = B \cap A^c = \bigl(A \cup B^c\bigr)^c \in \mathcal{L}$$

がわかる．

<u>(iii) の確認</u>. $A_n \in \mathcal{L}$ かつ $A_n \subset A_{n+1}\,(n = 1,\, 2,\, \ldots)$ とする．ここで

$$B_n := A_{n+1} \setminus A_n\,(n = 1,\, 2,\, \ldots)$$

とおくと (ii) から $B_n \in \mathcal{L}$ となる．さらに B_n の定め方から

$$B_n \cap B_m = \varnothing\,(m \neq n)$$

となる．よって (iii)$'$ から

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$$

がわかる．以上から (i) ∼ (iii) が確認できた． □

命題 3. Ω を空でない集合とし，$\mathcal{C}$ を Ω の部分集合族とする．部分集合族 $\mathcal{C}$ が π システムかつ λ システムならば，$\mathcal{C}$ は σ 集合族となる．

Proof. まず, 部分集合族 $\mathcal{C}$ は体であることを示す.
(i) $\mathcal{C}$ は λ システムなので, 命題 2(ii)$'$ から $\Omega \in \mathcal{C}$ である.
(ii) $\mathcal{C}$ は π システムである. $A \in \mathcal{C}$ のとき, $\Omega \in \mathcal{C}$ なので, 命題 2(ii)$'$ から

$$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{C}$$

となる.
(iii) $A_j \in \mathcal{C}\,(j = 1, 2, \ldots)$ とする. $\mathcal{C}$ は π システムなので, 定義 1(1) から

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C}\,(n \in \mathbb{N})$$

となる. よって, (i) $\sim$ (iii) から $\mathcal{C}$ は体となることがわかる.
　$\mathcal{C}$ は体であるので, あとは

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$$

を示せばよい. $\mathcal{C}$ は体なので

$$B_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

となる. さらに B_n の定め方から $B_n \subset B_{n+1}\,(n = 1, 2, \ldots)$ となる. よって, $\mathcal{C}$ は λ システムなので, 定義 1(iii) から

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$$

がわかる. 以上から $\mathcal{C}$ は σ 集合族であることがわかる. □

命題 4. Ω を空でない集合とする. Ω の部分集合族 $\mathcal{P}$ を π システムとし, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を $\mathcal{P}$ を含む最小の λ システムとする. このとき, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムとなる.

Proof. $\sigma[\mathcal{P}]$ を $\mathcal{P}$ を含む最小の σ 加法族とする. $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を固定し, この A に対して

$$\mathcal{G}_A := \big\{B \in \sigma[\mathcal{P}];\, A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]\big\}$$

と定める. $\mathcal{G}_A$ に関する以下の主張を順に証明していく.
<u>主張 1</u>: $A \in \sigma[\mathcal{P}]$ のとき, $\mathcal{G}_A$ は λ システムである.

<u>主張 1 の証明</u>: 命題 2 の条件 (i)$'$ $\sim$ (iii)$'$ を確認する.
(i)$'$ $A \cap \Omega = A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ なので, $\mathcal{G}_A$ の定義から $\Omega \in \mathcal{G}_A$ がわかる.

(ii)$'$ $B \in \mathcal{G}_A$ とする．このとき

$$B^c \cap A = A \setminus (A \cap B)$$

に注意する．$B \in \mathcal{G}_A$ なので

$$A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \tag{4}$$

である．仮定と (4) から A, $A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ である．$\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は λ システムなので, 定義 1(2)(ii) から

$$B^c \cap A = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となる．よって $B^c \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ がわかる．
(iii)$'$ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な列で $B_n \in \mathcal{G}_A\,(n = 1, 2, \ldots)$ とする．このとき

$$A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigl(A \cap B_j\bigr) \tag{5}$$

となる．したがって $\{A \cap B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な列で, (4) から $A \cap B_n \in \mathcal{G}_A$ となることに注意する．よって, $A \cap B_n \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ かつ $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は λ システムなので, 命題 2(ii)$'$ から

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となる．このことと (5) から

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A$$

がわかる．

よって (i)$'$ $\sim$ (iii)$'$ から $\mathcal{G}_A$ は λ システムであることがわかる． $\square$

<u>主張 2</u>: $A \in \mathcal{P}$ ならば $\mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$ である．

<u>主張 2 の証明</u>: $A \in \mathcal{P} \subset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を取る．主張 1 から $\mathcal{G}_A$ は λ システムとなる．$B \in \mathcal{P}$ とする．$\mathcal{P}$ は π システムなので, 定義 1(1) から

$$A \cap B \in \mathcal{P} \subset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となるので, $\mathcal{G}_A$ は λ システムで $\mathcal{P}$ を含むので, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含むの最小性の λ システムなので

$$\mathcal{G}_A \supset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

が示せた. $\square$

<u>主張 3</u>: $A \in \mathcal{P}$ かつ $B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ ならば $A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ となる.

<u>主張 3 の証明</u>: 主張 2 から

$$B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$$

となる. よって, $\mathcal{G}_A$ の定義から

$$A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

がわかる. $\square$

<u>主張 4</u>: $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ ならば $\mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$ となる.

<u>主張 4 の証明</u>: $B \in \mathcal{P}$ と $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を取る. 主張 3 から

$$A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \tag{6}$$

となる. よって, $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ で (6) であることに注意して, $\mathcal{G}_A$ の定義を思い出すと $B \in \mathcal{G}_A$ となる. 以上から

$$B \in \mathcal{P} \implies B \in \mathcal{G}_A$$

がわかる. すなわち, $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ である. さらに, 主張 1 から $\mathcal{G}_A$ は λ システムである. 以上から, $\mathcal{G}_A$ は $\mathcal{P}$ を含む λ システムとであることがわかる. よって, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む最小の λ システムなので

$$\mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$$

がわかる. $\square$

<u>主張 5</u>: $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムである.

<u>主張 5 の証明</u>: $A, B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ とする. すると主張 4 から

$$B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \implies B \in \mathcal{G}_A$$

が成り立つ. $\mathcal{G}_A$ の定義から

$$A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となり, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムであることがわかる. $\square$

定理 5. Ω を空でない集合とする．Ω の部分集合族 $\mathcal{P}$ を π システムとし, $\mathcal{L}$ を λ システムかつ $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ とする．このとき

$$\sigma[\mathcal{P}] \subset \mathcal{L} \tag{7}$$

が成立する．

Proof. 命題 4 から $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムである．よって命題 3 より $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は σ 加法族である．よって $\sigma[\mathcal{P}]$ の最小性から

$$\mathcal{L}[\mathcal{P}] \supset \sigma[\mathcal{P}]$$

となる．さらに, $\mathcal{L}$ は $\mathcal{P}$ を含む λ システムである．一方, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む最初の λ システムある．この二つのことから

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}[\mathcal{P}] \supset \mathcal{P} \tag{8}$$

となる． (7) と (8) を合わせると

$$\mathcal{L}{=}\sigma[\mathcal{P}]$$

がわかる． □

2 Dynkin の定理の応用例

2.1 その１

命題 6. P_1 と P_2 を標本空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度とする．集合族

$$\mathcal{L} := \{B \in \mathcal{B};\, \mathsf{P}_1(B) = \mathsf{P}_2(B)\}$$

は λ システムである．

Proof. 命題 2 の条件 (i)$'$ ∼ (iii)$'$ を順に確認していく．

(i)$'$ $\mathsf{P}_1(\mathbb{X}) = \mathsf{P}_2(\mathbb{X})$ なので, $\mathbb{X} \in \mathcal{L}$ がわかる．

(ii)$'$ $A \in \mathcal{L}$ とする．すなわち

$$\mathsf{P}_1(A) = \mathsf{P}_2(A)$$

である．よって

$$\mathsf{P}_1(A^c) = 1 - \mathsf{P}_1(A) = 1 - \mathsf{P}_2(A) = \mathsf{P}_2(A^c)$$

であるので, $A^c \in \mathcal{L}$ がわかる.

(iii)$'$ $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\mathcal{L}$ の互いに排反な列とする. このとき $j = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\mathsf{P}_1(A_j) = \mathsf{P}_2(A_j)$$

となる. よって

$$\mathsf{P}_1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}_1(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}_2(A_j) = \mathsf{P}_2\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

となるので

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$$

がわかる. □

系 7. P_1 と P_2 は標本空間 $\big(\mathbb{X}, \mathcal{B}\big)$ 上の確率測度とする. $\mathcal{P}$ は π システムで

$$\forall A \in \mathcal{P} \implies \mathsf{P}_1(A) = \mathsf{P}_2(A)$$

ならば

$$\forall B \in \mathcal{B} \implies \mathsf{P}_1(B) = \mathsf{P}_2(B)$$

が成り立つ.

Proof. 命題 6 から

$$\mathcal{L} := \big\{A \in \mathcal{B}; \mathsf{P}_1(A) = \mathsf{P}_2(A)\big\}$$

は λ システムである. しかし $\mathcal{L} \supset \mathcal{P}$ なので, 定理 5 から

$$\mathcal{L} \supset \sigma[\mathcal{P}]$$

となる. □

系 8. $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ とし, P_1 と P_2 を $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ 上の確率測度とし, 対応する分布関数を F_1 と F_2 は等しいとする. すなわち

$$\mathsf{F}_1(x) = \mathsf{P}_1\big((-\infty, x]\big) = \mathsf{F}_2(x) = \mathsf{P}_2\big((-\infty, x]\big)$$

である. このとき

$$\mathsf{P}_1(B) = \mathsf{P}_2(B) \qquad \big(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$$

が成り立つ.

Proof.

$$\mathcal{P} := \big\{(-\infty,\, x];\, x \in \mathbb{R}\big\}$$

とおく. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$(-\infty,\, x] \bigcap (-\infty,\, y] = (-\infty,\, x \wedge y] \in \mathcal{P}$$

となる. ここで $x \wedge y$ は x と y の大きくない方である. 以上から $\mathcal{P}$ は π システムである.

さらに $\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるので

$$\mathsf{F}_1(x) = \mathsf{F}_2(x)\,(\forall x \in \mathbb{R}) \implies \mathsf{P}_1(A) = \mathsf{P}_2(A)\,(\forall A \in \mathcal{P})$$

である. したがって, $\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\, \mathsf{P}_1(B) = \mathsf{P}_2(B)\}$ とすると系 7 から

$$\mathcal{L} \supset \sigma[\mathcal{P}]$$

となる. 一方, $\mathcal{L}$ の定義から $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. さらに, 定理 11 から $\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. よって, $\mathcal{L} = \sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となることがわかる. 以上から

$$\mathsf{P}_1(A) = \mathsf{P}_2(A) \qquad (\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

がわかる. □

2.2 その 2

$(\mathbb{X},\, \mathcal{B})$ と $(\mathbb{Y},\, \mathcal{C})$ を可測空間とし, μ を可測空間 $(\mathbb{X},\, \mathcal{B})$ 上の σ 有限測度とする. $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 可測関数 $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して, 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} f(x,\, y)\, d\mu(x) \tag{9}$$

は $\mathcal{C}$ 可測であることを Dynkin の補題と標準機械を落ちいて示そう.

補題 9. $(\mathbb{X},\, \mathcal{B})$ と $(\mathbb{Y},\, \mathcal{C})$ を可測空間とし, μ を可測空間 $(\mathbb{X},\, \mathcal{B})$ 上の σ 有限測度とする. 各 $L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ に対して, 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x,\, y)\, d\mu(x) \tag{10}$$

は $\mathcal{C}$ 可測である.

Proof. 各 $y \in \mathbb{Y}$ に対して, 写像

$$x \mapsto 1_L(x,\, y) \tag{11}$$

は $\mathcal{B}$ 可測となる. なぜならば, 写像

$$i_y : x \mapsto (x,\, y)$$

は $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 可測となること[1]がわかる. よって, (10) は $\mathcal{B}$ 可測となる. このことから (9) の右辺の積分は well-defined である.

つぎに

$$\mathcal{L} := \left\{ L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C};\ \ y \mapsto \textstyle\int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x,\, y)\, d\mu(x) \text{ は } \mathcal{C} \text{ 可測} \right\}$$

とおいたとき, $\mathcal{L} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ を示す.

そのために, $B \in \mathcal{B}$ と $C \in \mathcal{C}$ を取る. すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B \times C}(x,\, y)\, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_C(y)\, d\mu(x) = \mathbb{1}_C(y) \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_B(x)\, d\mu(x) \\ &= \mathbb{1}_C(y) \mu(B)\end{aligned}$$

となる. このことから, 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B \times C}(x,\, y)\, d\mu(x) = \mathbb{1}_C(y) \mu(B)$$

は, 明らかに $\mathcal{C}$ 可測となる. よって

$$B \times C \in \mathcal{L} \tag{12}$$

である. ここで集合族 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P} := \left\{ B \times C;\, B \in \mathcal{B},\, C \in \mathcal{C} \right\}$$

で定めると (12) から $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ であり, さらに $\mathcal{P}$ は π システムである. したがって, $\mathcal{L}$ が λ システムであることがわかると定理 5 から

$$\sigma[\mathcal{P}] \subset \mathcal{L}$$

がわかる. さらに, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ の定義を思い出すと

$$\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

であるので

$$\mathcal{L} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

がわかる. よって, (9) で定義された写像は $\mathcal{C}$ 可測であることがわかる. □

[1] Hansen (2009, Lemma 8.4) を参照のこと.

補題 10.

$$\mathcal{L} := \left\{ L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C};\ \ y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x,\,y)\,d\mu(x) \text{ は } \mathcal{C} \text{ 可測} \right\}$$

は λ システムである.

Proof. 定義 1 の (i) $\sim$ (iii) を確認する.
(i): $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \in \mathcal{L}$ であることは明らか.
(ii): $L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}$ かつ $L_1 \subset L_2$ に対して

$$\mathbb{1}_{L_1}(x,\,y) + \mathbb{1}_{L_2 \setminus L_1}(x,\,y) = \mathbb{1}_{L_2}(x,\,y) \qquad \big((x,\,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}\big)$$

である. $L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}$ なので, 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_1}(x,\,y)\,d\mu(x) \quad \text{と} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_2}(x,\,y)\,d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測である. 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_2 \setminus L_1}(x,\,y)\,d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測関数の差なので, $\mathcal{C}$ 可測となる. よって, $L_2 \setminus L_1 \in \mathcal{L}$ となる.
$L_n \in \mathcal{L}\,(n = 1,\,2,\,\ldots)$ かつ $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$ とする. $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ とおいたとき

$$\mathbb{1}_{L_n}(x,\,y) \nearrow \mathbb{1}_L(x,\,y) \qquad \big((x,\,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}\big)$$

となる. よって, 単調収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_n}(x,\,y)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x,\,y)\,d\mu(x)$$

となる. よって, 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x,\,y)\,d\mu(x)$$

も $\mathcal{C}$ 可測となる. よって, $L \in \mathcal{L}$ がわかる.
(i) $\sim$ (iii) から $\mathcal{L}$ は λ システムであることが示せた. □

(9) の可測性の証明: あとは標準機械を用いる. すなわち, 以下の手続きをふくことで証明をする.

① 指示関数 $\mathbb{1}_A$ に対してある性質を証明する.

② 有限個の $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \in \mathcal{A}$ で互いに排反なものと異なる $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ に対して単関数 $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_A$ に対して ① で示した性質を確認する.

③ 単関数の極限として非負の確率変数を定義し, ② で示した性質を非負値確率変数に対して証明する.

④ 一般の可測関数 f を非負の部分 f^+ と負の部分 f^- にわけたものに ③ を適用し, $f = f^+ - f^-$ にたいしてその結果を拡張して, X についての性質を確認する.

すなわち, 補題 10 から出発して, ① ～ ④ の議論を実行することにより, (9) によって定義される写像は $\mathcal{C}$ であることがわかる. □

2.3 $\mathbb{R}$ の位相についての注意

定理 11. $U \subset \mathbb{R}$ が開集合ならば, 互いに排反な開区間 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ があって

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

と書ける.

Proof. U は開集合なので, 各 $x \in U$ に対して $y > x$ なる $y \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$(x,\, y) \subset U$$

とできる. このとき

$$a := \inf\{z;\, (z,\, x) \subset U\}, \quad b := \sup\{y;\, (x,\, y) \subset U\}$$

と定める. a と b は x に依存することに注意する. このとき

$$x \in (a,\, b) \quad \text{かつ} \quad I_x = (a,\, b) \text{ は開区間}$$

である. これらを踏まえて, 次の主張を示していく.

(i) $U = \bigcup \bigl\{ I_x;\, x \in U \bigr\}$.

(ii) $\forall x,\, y \in U$ に対して

$$x \neq y \implies I_x \cap I_y = \varnothing.$$

(iii) $\#\{I_x;\, x \in U\} \leq \aleph_0$. ただし $I_x = I_y$ なるものを除いてである.

まず, 次のことを注意する. $x \in U$ に対して, $I_x = (a,\, b)$ とすると $I_x \subset U$ かつ $a,\, b \notin U$ である. なぜならば $w \in (a,\, b)$ とすると $y > w$ なる $y \in \mathbb{R}$

が存在して, $(x,\, y) \subset U$ となる．よって $w \in U$ である．いま $b \in U$ と仮定するとある $\epsilon > 0$ が存在して

$$(b - \epsilon,\, b + \epsilon) \subset U$$

とできる．ϵ を十分小さくすると

$$\left(x,\, b - \frac{\epsilon}{2}\right) \subset U$$

となる．結局

$$(x,\, b + \epsilon) \subset U$$

となり, b の定義と矛盾する．よって $b \notin U$ が示せた.

(i) 各 $x \in U$ に対して, $x \in I_x \subset U$ なので

$$\bigcup_{x \in U} I_x \subset U$$

となる．逆は明らかなので

$$\bigcup_{x \in U} I_x = U$$

がわかる.

(ii) $x,\, y \in U$ とし, $I_x = (a,\, b)$ と $I_y = (c,\, d)$ と定める．$I_x \cap I_y \neq \varnothing$ と仮定する．このとき $a < d$ かつ $c < b$ となる．$c \notin U$ なので $c \in (a,\, b)$ である．$c < b$ なので

$$c \leq a \tag{13}$$

である．$a \notin U$ なので

$$a \notin (c,\, d)$$

である．よって $a < d$ なので

$$a \leq c \tag{14}$$

がわかる．(13) と (14) から

$$a = c$$

がわかる．同様に

$$b = d \tag{15}$$

を示すことができる．よって

$$I_x \cap I_y \neq \varnothing \implies I_x = I_y$$

がわかる．これの対偶を取ると

$$I_x \neq I_y \implies I_x \cap I_y = \varnothing$$

がわかる．

(iii) 各 $I_x\,(x \in U)$ に対して

$$q_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$$

を取る．$I_x \neq I_y$ ならば $I_x \cap I_y = \varnothing$ なので

$$q_x \neq q_y$$

がわかる．よって $\#(\mathbb{Q}) \leq \aleph_0$ なので, (iii) がわかる． □

3 文献についての注釈

節 1 は [4] の第 2 章を借用した．節 2.1 は [4] の第 2 章を借用した．節 2.2 は [3](pp.173-179) を借用した．節 2.3 は [1](p.4) を借用した．

参考文献

[1] Benedetto, J.J., Czaja, W. (2009). Integration and modern analysis. *Birkhäuser Advance Texts*. Birkhäuser.

[2] Durrett, R. (2019). Probability, 2nd. edition. *Cambridge Series in Statistical and Probalistic Mathematics.*

[3] Hansen, E. (2009). Measure Theory. Fourth edtion. *Department of Mathematical Scinences, University of Copenhagen.*

[4] Resnick, S.I. (2005). A probability Path. *Birkhäuser*

[5] 笠原勇二 (2013). 明解 確率論入門 (第 1 版第 2 刷). 日本評論社.

[6] 河野敬雄 (2013). 確率概論 (初版第 5 刷). 京都大学学術出版.