

～ウィシャート分布の基本性質～

定義

$\Rightarrow U \sim N_{\text{fnp}}(0, I_f \otimes \Sigma), \quad S \stackrel{\text{D}}{=} U^t U$

ランダムな $P \times P$ 行列 S は
パラメータ $f > 0$, 自由度 f の
ウィシャート分布に従う。 $S \sim W_P(f, \Sigma)$

- ・ 対称性
- ・ 非特異行列をかけた分布
- ・ 分割行列とウィシャート分布

ただし2つの性質

S_1 と S_2 は独立

$$S_1 \sim W_p(f_1, E), S_2 \sim W_p(f_2, E)$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 \sim W_p(f_1 + f_2, E)$$

$$A = \frac{\det S_1}{\det(S_1 + S_2)} \stackrel{D}{=} \prod_{i=1}^p X_i$$

ただし、 $X_1, \dots, X_p$ は独立

$$X_i \sim \text{Be}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{2}, \frac{f_i}{2}\right)$$

非特異行列をかけた分布

$A: p \times q$ 行列

$(p \geq q)$

$$S \sim W_p(f, E)$$

$\Rightarrow$

$${}^t A S A \sim W_p(f, {}^t A E A)$$

分割行列とウィナー分布

$S \sim W_p(f, E)$ とあり、 S と E の分割を

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}_r^q, \quad E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \quad (q+r=p)$$

とする。 $f \geq r$ の時、

$$S_{1.2} = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}, \quad E_{1.2} = E_{11} - E_{12} E_{22}^{-1} E_{21}$$

とすると、次のことが成り立つ。

(a) $S_{1.2}$ は (S_{21}, S_{22}) と独立
(b) $S_{1.2} \sim W_q(f-r, E_{1.2})$

(c) $S_{22} \sim W_r(f, E_{22})$