

## 第2章 1 次元の確率分布の代表的モデル

### 2.1 離散型確率変数のモデル

ベルヌーイ分布 確率変数を  $X$  が母数  $p$  のベルヌーイ分布に従うとは、 $X$  が確率関数は

$$f_X(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

ときをいう。ただし、 $0 < p < 1$  である。この分布を  $\text{Ber}(p)$  と記す。成功の確率が  $p$  ( $0 < p < 1$ )、失敗の確率が  $1-p$  の試行をベルヌーイ試行とよび、この試行の成功を 1、失敗を 0 に対応させたものが  $X$  である。

定理 2.1 (ベルヌーイ分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= p \\ \text{VAR}[X] &= p(1-p)\end{aligned}$$

証明 略。

□

二項分布 確率変数を  $X$  が母数  $n$  と  $p$  の二項分布に従うとは、 $X$  が確率関数は

$$f_X(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

ときをいう。ただし、 $n \geq 1$  は整数、 $0 < p < 1$  である。この分布を  $\text{BN}(n, p)$  と記す。

定理 2.2 (二項分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np \\ \text{VAR}[X] &= np(1-p) \\ M_X(t) &= (pe^t + (1-p))^n, \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

証明 略。

□

幾何分布 確率変数を  $X$  が母数  $p$  の幾何分布に従うとは、 $X$  が確率関数は

$$f_X(x|p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

ときをいう。ただし、 $0 < p < 1$  である。この分布を  $\text{G}(p)$  と記す。

定理 2.3 (幾何分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{p}{1-p} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{1-p}{p^2} \\ M_X(t) &= \frac{p}{1-t(1-p)}, \quad t < \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

負の二項分布 確率変数を  $X$  が母数  $n$  と  $p$  の負の二項分布に従うとは,  $X$  が確率関数は

$$f_X(x|n, p) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ときをいう. ただし,  $n \geq 1$  は整数,  $0 < p < 1$  である. この分布を  $\text{NBN}(n, p)$  と記す. 負の二項展開式:

$$\frac{1}{p^n} = (p - (1-p))^n = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-n}{x} (-1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{n-1} (1-p)^x$$

の両辺に  $p^n$  をかけた式の各項が確率関数である. ここで負の二項係数は

$$\binom{-n}{x} = \frac{1}{x!} (-n)(-n+1)\cdots(-n-x+1) = (-1)^x \binom{n+x-1}{n-1}$$

である.

定理 2.4 (負の二項分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= n \frac{p}{1-p} \\ \text{VAR}[X] &= n \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

ポアソン分布 確率変数を  $X$  が母数  $\lambda$  のポアソン分布に従うとは,  $X$  が確率関数は

$$f_X(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ときをいう. ただし,  $\lambda > 0$  である. この分布を  $\text{Po}(\lambda)$  と記す.

定理 2.5 (ポアソンの平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \lambda \\ \text{VAR}[X] &= \lambda \\ M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

分布	母数	確率関数 $P(X = x)$	平均	分散
ベルヌーイ分布	$0 < p < 1$	$p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$	$p$	$p(1-p)$
二項分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ ただし, $x = 0, 1, \dots, n$	$np$	$np(1-p)$
幾何分布	$0 < p < 1$	$p(1-p)^{x-1}$ ただし, $x = 1, 2, \dots$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
負の二項分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	$\binom{n+x-1}{n-1} p^n(1-p)^x$ ただし, $x = 1, 2, \dots$	$n\frac{p}{1-p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布	$0 < \lambda < \infty$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, \dots$	$\lambda$	$\lambda$

## 2.2 連続型確率変数のモデル

一様分布  $(U(\alpha, \beta))$  確率変数を  $X$  が区間  $(\alpha, \beta)$  の一様分布に従うとは,  $X$  が確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(\beta - \alpha), & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう.

定理 2.6 (一様分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

証明 略.

□

正規分布  $(N(\mu, \sigma^2))$  確率変数を  $X$  が母数  $(\mu, \sigma^2)$  の正規分布に従うとは,  $X$  が確率密度関数

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

を持つときをいう.

ただし,  $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$  である.

特に,  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$  のとき, 正規分布  $N(0, 1)$  のことを標準正規分布という.

定理 2.7 (正規分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mu \\ \text{VAR}[X] &= \sigma^2 \\ M_X(t) &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

証明 略.

□

指数分布  $(EX(\lambda))$  確率変数を  $X$  が母数  $\lambda$  の指数分布に従うとは,  $X$  が確率密度関数

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう.

ただし,  $-\infty < \lambda < \infty$  である.

定理 2.8 (指数分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad -\infty < t < \lambda \end{aligned}$$

証明 略 .

□

ガンマ分布 ( $GA(\alpha, \beta)$ ) 確率変数を  $X$  が母数  $\alpha, \beta$  のガンマ分布に従うとは,  $X$  が確率密度関数

$$f_X(x | \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう .

特に,  $\alpha = n/2, (n \in \mathbb{N})$  と  $\beta = 1/2$  のとき, ガンマ分布  $GA(n/2, 1/2)$  を自由度  $n$  のカイ自乗分布という .  
ただし,  $0 < \alpha, \beta < \infty$  である .

定理 2.9 (ガンマ分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\ \text{VAR}[X] &= \alpha\beta^2 \\ M_X(t) &= (1 - \beta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\beta \end{aligned}$$

証明 略 .

□

分布	母数	確率密度関数	平均	分散
一様分布	$\alpha, \beta (\alpha < \beta) \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(\beta - \alpha)}, \alpha < x < \beta$	$\frac{\alpha + \beta}{2}$	$\frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$
標準正規分布	なし	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$	0	1
正規分布	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x \in \mathbb{R}$	$\mu$	$\sigma^2$
指数分布	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
カイ自乗分布	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2} x^{(n/2)-1}, x > 0$	$n$	$2n$