第 4 章　標本分布論と漸近分布論

4.1　標本分布論の枠組み

4.1.1　ランダム標本

定義 4.1　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が母集団分布 $f(x)$ からの標本の大きさが n の/**ランダム標本**であるとは，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立な確率変数列であって，各 $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ は確率関数または確率密度関数 $f(x)$ に従うときをいう．また，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に確率関数または確率密度関数 $f(x)$ に従うともいう．

注意 4.1　多くの場合は $n > 1$ である．また，$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時確率関数または同時確率密度関数は

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_i)$$

である．

4.1.2　統計量と標本分布

定義 4.2　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ をある母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本とし，$T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をランダム標本 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の値域上で定義された実数値または実ベクトル値関数とする．このとき，確率変数または確率ベクトル $Y = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を**統計量**という．さらに，統計量 Y の確率分布を Y の**標本分布**とよぶ．

例 4.1　ランダム標本の算術平均は統計量であり，**標本平均**という．通常

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

と記す.

　また,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

で定義される統計量を**標本分散**という．

補題 4.1　$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を実数列とし，$\bar{x}_n = (1/n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ と $s_n^2 = (1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$ とおく．このとき,

(1)　$\min_a \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$.

(2)　$(n-1)s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}_n^2$.

となる．

証明 (1) を証明するために，$\bar{x}_n$ を加えて引けば，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n+\bar{x}_n-a)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)(\bar{x}_n-a)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_n-a)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2+n(\bar{x}_n-a)^2 \qquad (4.1)\end{aligned}$$

となる．最後の等式は

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)(\bar{x}_n-a)=(\bar{x}_n-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)=0$$

よりわかる．(4.1) は $a=\bar{x}_n$ の時に最小になることがわかる．

(2) を示すためには，(4.1) において，$a=0$ とすればよい． □

定理 4.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をある母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本とし，g を X_1 の値域上で定義された実数値関数とする． $g^2(X_2)$ の期待値が存在するとき，

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n}g(X_i)] = n\mathbb{E}[g(X_1)], \qquad (4.2)$$

$$\mathbb{VAR}[\sum_{i=1}^{n}g(X_i)] = n\mathbb{VAR}[g(X_1)] \qquad (4.3)$$

が成立する．

証明 (4.2) は期待値の線形性と

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n}g(X_i)]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[g(X_i)]=n\mathbb{E}[g(X_1)]$$

からわかる[(4-1)]．

(4.3) を示すために，分散の定義と期待値の線形性から

$$\begin{aligned}\mathbb{VAR}[\sum_{i=1}^{n}g(X_i)] &= \mathbb{E}[\{\sum_{i=1}^{n}g(X_i)-\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n}g(X_i)]\}^2]\\ &= \mathbb{E}[\{\sum_{i=1}^{n}(g(X_i)-\mathbb{E}[g(X_i)])\}^2]\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(g(X_i)-\mathbb{E}[g(X_i)])^2+\sum_{i\neq j}g(X_i)-\mathbb{E}[g(X_i)])g(X_j)-\mathbb{E}[g(X_j)])\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(g(X_i)-\mathbb{E}[g(X_i)])^2]\\ &\quad +\sum_{i\neq j}\mathbb{E}[g(X_i)-\mathbb{E}[g(X_i)])g(X_j)-\mathbb{E}[g(X_j)])] \qquad (4.4)\end{aligned}$$

となる．しかし，

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(g(X_i)-\mathbb{E}[g(X_i)])^2]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{VAR}[g(X_i)]=n\mathbb{VAR}[g(X_1)]$$

と $i \neq j$ に対して，

$$\mathbb{E}[g(X_i) - \mathbb{E}[g(X_i)])(g(X_j) - \mathbb{E}[g(X_j)])] = \mathbb{E}[g(X_i)g(X_j)] - \mathbb{E}[g(X_i)]\mathbb{E}[g(X_j)] = 0$$

となる．ただし，最後の等号は定理 3.1 からわかる．上のふたつの式を (4.4) に代入すれば，(2) は示される．□

系 4.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をある母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする． X_1^2 の期待値が存在するとき，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n a_i X_i)] &= \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i)], \\ \mathbb{VAR}[\sum_{i=1}^n a_i X_i] &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{VAR}[X_i] \end{aligned}$$

が成立する．ただし，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は定数である．

定理 4.2 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ と分散 $\sigma^2 < \infty$ の母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする．このとき，

(1) $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$,

(2) $\mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = \dfrac{\sigma^2}{n}$,

(3) $\mathbb{E}[S_n^2] = \sigma^2$.

となる．

証明 (1) を示すために，定理 において，$g(x) = x$ とすれば，

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} n\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1] = \mu$$

となることがわかる．

(2) は分散の性質と定理 を同様に利用すれば，

$$\mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2}\mathbb{VAR}[\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n^2} n\mathbb{VAR}[X_1] = \frac{1}{n}\mathbb{VAR}[X_1] = \frac{\sigma^2}{n}$$

となることがわかる．

(3) を示すために補題 4.1 を使えば，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right] = \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}_n^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left(n\mathbb{E}[X_1^2] - n\mathbb{E}[\bar{X}_n^2]\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．しかし，

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{VAR}[X_1] + (\mathbb{E}[X_1])^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$
$$\mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \mathbb{VAR}[\bar{X}_n] + (\mathbb{E}[\bar{X}_n])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

となる．これらと (4.5) をあわせれば，

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1}\left(n(\sigma^2 + \mu^2 - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) = \sigma^2$$

となることがわかる．□

定理 4.3 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を積率母関数 $M_X(t)$ を持つ母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする．このとき，

$$M_{\bar{X}_n}(t) = (M_X(t/n))^n$$

が成立する．

証明

$$M_{\bar{X}_n}(t) = \mathbb{E}[e^{t\bar{X}_n}] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i/n}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{tX_i/n}\right] = [M_X(t/n)]^n$$

からわかる． □

例 4.2 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とする．このとき，標本平均 $\bar{X}_n$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従うことがわかる．なぜならば，

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}_n}(t) &= \left[pe^{t/n} + (1-p)\right]^n = \exp\left[n\left(\frac{t}{n}\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\sigma^2\right)\right] \\ &= \exp\left[t\mu + \frac{(\sigma^2/n)t^2}{2}\right] \end{aligned}$$

からわかる．

例 4.3 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母数 p のベルヌーイ分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする．ただし，$0 < p < 1$ である．このとき，標本平均 $n\bar{X}_n$ は母数 n と p の二項分布に従うことがわかる．なぜならば，

$$M_{n\bar{X}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \left[pe^t + (1-p)\right]^n$$

からわかる．

4.2 正規分布からのランダム標本

定理 4.4 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とし，$\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ と $S_n^2 = (1/(n-1))\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ とおく．このとき，以下が成立する：

(1) $\bar{X}_n$ と S_n^2 は独立である．

(2) $\bar{X}_n$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う．

(3) $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ のカイ自乗分布に従う．

証明 (2) は例 4.2 からわかる．次に，(1) を示す．各 i に対して，$Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$ とすれば，Y_i は 正規分布 $N(0, 1)$ に従い，$(\bar{X}_n - \mu)/\sigma = \bar{Y}_n/\sigma = (1/n)\sum_{i=1}^n Y_i$ と $S_n^2/\sigma^2 = (1/(n-1))\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$ となるので，一般性を失わず，X_i は正規分布 $N(0, 1)$ に従うとして，$\bar{X}_n$ と S_n^2 の独立性を示せばよいことがわかる．

$X_i - \bar{X}_n$ は正規分布 $N(0, (1 - 1/n))$ に従うことがわかる．なぜならば，

$$
\begin{aligned}
M_{X_i - \bar{X}_n}(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(t(1-1/n)X_i - \sum_{j=\neq i}(t/n)X_j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[e^{t(1-1/n)X_i}]\prod_{j\neq i}\mathbb{E}[e^{(t/n)X_j}] \\
&= \exp\left(\frac{t^2(1-(1/n))^2}{2}\right)\prod_{j\neq i}\exp\left(\frac{((t/n)^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{(1-1/n)t^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

からわかる．$\bar{X}_n$ と $X_i - \bar{X}_n$ はともに正規分布に従うので，$\bar{X}_n$ と $X_i - \bar{X}_n$ が独立であることをいうためには，$\mathbb{COV}[\bar{X}_n, X_i - \bar{X}_n] = 0$ を示せばよい．しかし，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{COV}[\bar{X}_n, X_i - \bar{X}_n] &= \mathbb{E}[\bar{X}_n(X_i - \bar{X}_n)] \\
&= \mathbb{E}[(1/n)\sum_{j=1}^n X_j X_i] - \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}[X_i X_j] + \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[\bar{X}_n^2] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{VAR}[X_i] - \mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0
\end{aligned}
$$

となる．よって，$\bar{X}_n$ と $X_i - \bar{X}_n$ が独立である．これから $\bar{X}_n$ と $(X_1 - \bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$ は独立(4-2) となり，$\bar{X}_n$ と S_n^2 は独立であることがわかる．

(3) を示すために，

$$
\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + n(\bar{X}_n - \mu)^2
$$

に注意する．$Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$, $i = 1, 2, \dots, n$, とおけば，$\bar{Y}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n Y_i = (\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ となり，Y_i と $\bar{Y}_n$ は $N(0, 1)$ と $N(0, 1/n)$ に従う．しがたって，$U = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$ が自由度 $n-1$ のカイ自乗分布に従うことを示せばよい．いま，$W = \sum_{i=1}^n Y_i^2$, $V = n\bar{Y}_n^2$ とおけば，$t < 1/2$ に対して，W, V の積率母関数は

$$
\begin{aligned}
M_W(t) &= \mathbb{E}[\exp(tW)] = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^n, \\
M_V(t) &= \mathbb{E}[\exp(tV)] = \left(\frac{1}{1-2t}\right)
\end{aligned}
$$

となる．さらに，$\bar{Y}_n$ と $(Y_1 - \bar{Y}_n, Y_2 - \bar{Y}_n, \ldots, Y_n - \bar{Y}_n)$ は独立であることに注意して，$U = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2$ の積率母関数を求める：

$$\begin{aligned} M_W(t) &= \mathbb{E}[\exp(tW)] = \mathbb{E}[\exp\{t\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2\} + tn\bar{Y}_n^2] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{tU + tV\}] = \mathbb{E}[\exp\{tU\}]\mathbb{E}[\exp(tV)] = M_U(t)M_V(t) \end{aligned}$$

より

$$M_U(t) = \frac{M_W(t)}{M_V(t)} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n-1}$$

がわかる． □

4.2.1 t 分布と F 分布

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本としたとき，

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{4.6}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことが定理 4.4 (2) からわかる．σ が既知であれば，$\bar{X}_n$ を観測したときに，(4.6) は μ の推測に利用できる．しかし，σ が未知のときは，(4.6) の代わりに

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \tag{4.7}$$

を μ の推測に用いる．ただし，$S_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ で S_n は S_n^2 の正の平方根である．(4.7) の標本分布を求めるために

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}_n - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S_n^2/\sigma^2}} \tag{4.8}$$

と書き換える．(4.8) の分子は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，分母は $\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$ と同じ分布で，分母と分子は独立である．ただし，χ^2_{n-1} は自由度 $(n-1)$ のカイ自乗分布である．したがって，(4.8) の分布は $V/\sqrt{U/(n-1)}$ と同じ分布である．ただし，U と V は独立に自由度 $(n-1)$ のカイ自乗分布と標準正規分布に従うものとする．

定義 4.3 p を自然数としたとき，確率変数 T が自由度 p の t 分布に従うとは，T が確率密度関数

$$f_T(t) = \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)}\frac{1}{\sqrt{p\pi}}\frac{1}{(1+t^2/p)^{(p+1)/2}}, \qquad -\infty < t < \infty$$

を持つときをいう．

定理 4.5 (t 分布の確率密度関数の導出について) $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 2,$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とするとき，

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．

証明

$$U = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}, \qquad V = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad p = n-1$$

とおくと U と V は独立で，それぞれは自由度 p のカイ自乗分布 χ_p^2 と標準正規分布 $N(0,\,1)$ に従い，

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{V}{\sqrt{U/p}}$$

となる．したがって，U と V から出発して，$\sqrt{p}U/V$ の確率密度関数を求める．まず，

$$f_{U,V}(u,\,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}\frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}}u^{(p/2)-1}e^{-u/2}, \qquad -\infty < v < \infty, \quad 0 < u < \infty$$

に注意する．いま

$$t = \frac{v}{\sqrt{u/p}}, \qquad w = u$$

とおくと

$$J = \begin{vmatrix} (\partial u/\partial t) & (\partial u/\partial w) \\ (\partial v/\partial t) & (\partial v/\partial w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{w}{p}} & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{w}{p}}$$

から

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{U,V}\left(t\sqrt{\frac{w}{p}},\,w\right)\sqrt{\frac{w}{p}}\,dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}}\int_0^\infty e^{-(1/2)t^2w/p}w^{(p/2)-1}e\ -w/2\sqrt{\frac{w}{p}}\,dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}p^{1/2}}\int_0^\infty e^{-(1/2)(1+t^2/p)w}w^{(p+1)/2-1}\,dw \end{aligned}$$

となる．さらに，

$$z = \left(1 + \frac{t^2}{p}\right)w$$

とおけば，

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\Gamma(p/2)\sqrt{p\pi}}\frac{1}{(1+t^2/p)^{(p+1)/2}}\frac{1}{2^{(p+1)/2}}\int_0^\infty w^{(p+1)/2-1}e^{-w/2}\,dw \\ &= \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)}\frac{1}{\sqrt{p\pi}}\frac{1}{(1+t^2/p)^{(p+1)/2}} \end{aligned}$$

を得る． □

定義 4.4 $p,\,q$ を自然数としたとき，確率変数 F が自由度 p と q の t 分布に従うとは，T が確率密度関数

$$f_F(x) = \frac{\Gamma((p+q)/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma(q/2)}\left(\frac{p}{q}\right)^{p/2}\frac{x^{(p/2)-1}}{(1+(p/q)x)^{(p+q)/2}}, \qquad 0 < x < \infty$$

を持つときをいう．

定理 4.6 $X_1,\,X_2,\,\ldots\,,\,X_n, n \geq 2,$ は正規分布 $N(\mu_X,\,\sigma_X^2)$ からの標本の大きさが n のランダム標本とし，$Y_1,\,Y_2,\,\ldots\,,\,Y_m, m \geq 2,$ は $X_i,\,i = 1,\,2,\,\ldots\,,\,n,$ とは独立な正規分布 $N(\mu_Y,\,\sigma_Y^2)$ からの標本の大きさが m のランダム標本とする．このとき，

$$F = \frac{(S_X^2/\sigma_X^2)}{(S_Y^2/\sigma_Y^2)}$$

は自由度 $n-1$ と $m-1$ の F 分布に従う．

証明 証明は略． □

4.3 順序統計量

定義 4.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をランダム標本としたとき，これを小さい順に並べかえたものを

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$$

を記し，これらを**順序統計量**という．すなわち，

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \\ X_{(2)} &= X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ の中で 2 番目に小さいもの}, \\ &\vdots \\ X_{(n)} &= \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \end{aligned}$$

である．

定理 4.7 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を離散型分布 $f_X(x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots,$ からの標本の大きさが n のランダム標本とする．ただし，$x_1 < x_2 < \cdots$ は X の台[(4-3)] とする．さらに，$P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j, i = 1, 2, \ldots, P_0 = 0$ とおく．$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ を標本の順序統計量としたとき，

$$P(X_{(j)} \leq x_i) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} P_i^k (1 - P_i)^{n-k}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, \tag{4.9}$$

と

$$P(X_{(j)} = x_i) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} [P_i^k (1 - P_i)^{n-k} - P_{i-1}^k (1 - P_{i-1})^{n-k}], \tag{4.10}$$

となる．

証明 $i \in \{1, 2, \ldots\}$ を固定し，Y を確率変数とし，

$$Y = \#\{X_j, j = 1, 2, \ldots, n | X_j \leq x_i\}$$

とする．ここで，確率変数 Z_j を $\{X_j \leq x_i\}$ が起こったとき，$Z_j = 1$，さもなければ，$Z_j = 0$ と定める．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は同一分布に従うので，各 j について，

$$\mathbb{P}(Z_j = 1) = P_i = \mathbb{P}(X_j \leq x_i)$$

である．また，$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ は独立である．さらに，$Y = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ に注意すれば，Y は母数 n, P_i の二項分布 $Bin(n, P_i)$ に従うことがわかる．

事象 $\{X_{(j)} \leq x_i\}$ は事象 $\{Y \geq j\}$ と同じなので，

$$\mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_i) = \mathbb{P}(Y \geq j)$$

となり，(4.9) は示された．(4.10) を示すためには，

$$\mathbb{P}(X_{(j)} = x_i) = \mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_i) - \mathbb{P}(X_{(j)} \leq x_{i-1})$$

を考えればよい．$i = 1$ の場合は $\mathbb{P}(X_{(j)} = x_i) = X_{(j)} \leq x_i)$ よりわかる．以上から (4.10) を示された． □

定理 4.8 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を分布関数 $F_X(x)$ と確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ連続型分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする．$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ を標本の順序統計量としたとき，$X_{(j)}, j = 1, 2, \ldots, n,$ の確率密度関数は

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x)[F_X(x)]^{j-1}[1-F_X(x)]^{n-j}, \tag{4.11}$$

となる．

証明 $X_{(j)}$ の分布関数を求め，その導関数を計算することにより，$X_{(j)}$ の確率密度関数を求めることにする．

実数 x を固定する．Y を確率変数とし，

$$Y = \#\{X_j, j = 1, 2, \ldots, n | X_j \le x\}$$

とする．ここで，確率変数 Z_j を $\{X_j \le x\}$ が起こったとき，$Z_j = 1$，さもなければ，$Z_j = 0$ と定める．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は同一分布に従うので，各 j について，

$$\mathbb{P}(Z_j = 1) = P_i = F_X(x)$$

である．また，$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ は独立である．さらに，$Y = \sum_{j=1}^n Z_j$ に注意すれば，Y は母数 n, P_i の二項分布 $Bin(n, F_X(x))$ に従うことがわかる．これらより

$$F_{X_{(j)}}(x) = \mathbb{P}(Y \ge j) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} [F_X(x)]^k [1-F_X(x)]^{n-k}$$

となる．したがって，$X_{(j)}$ の確率密度関数は

$$\begin{aligned}
f_{X_{(j)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{(j)}}(x) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \Big(k[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k} f_X(x) \\
&\quad -(n-k)[F_X(x)]^k[1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x) \Big) \\
&= \binom{n}{j} j f_X(x)[F_X(x)]^{j-1}[1-F_X(x)]^{n-j} \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^{n} \binom{n}{k} k[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k} f_X(x) \\
&\quad - \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)[F_X(x)]^k[1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x) \\
&= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x)[F_X(x)]^{j-1}[1-F_X(x)]^{n-j} \\
&\quad + \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k+1} (k+1)[F_X(x)]^k[1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x) \\
&\quad - \sum_{k=j}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)[F_X(x)]^k[1-F_X(x)]^{n-k-1} f_X(x)
\end{aligned}$$

となる．最後に，

$$\binom{n}{k+1}(k+1) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \binom{n}{k}(n-k)$$

から (4.11) は示される． □

例 4.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を $(0, 1)$ 上の一様分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする．すなわち，

$$F_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases},$$
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

である．このとき，(4.11) から

$$f_{X_{(j)}} = \begin{cases} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} x^{j-1}(1-x)^{n-j}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

となる．また，補遺の代表的な広義積分 (iii) から

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(j)}] &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \int_0^1 x^j (1-x)^{n-j}, dx \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{j!(n-j)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{j}{n+1} \end{aligned}$$

となる．

定理 4.9 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を分布関数 $F_X(x)$ と確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ連続型分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする．$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ を標本の順序統計量としたとき，$X_{(i)}$ と $X_{(j)}, 1 \leq i \leq j \leq n$, の同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} &f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(u, v) \\ &= \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(j-1-i)!(n-j)!} f_X(u) f_X(v) [F_X(u)]^{i-1} \\ \qquad \times [F_X(v) - F_X(v)]^{j-i-1} [1 - F_X(x)]^{n-j}, & -\infty < u < v < \infty, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.12}$$

となる．

証明 証明は省略する． □

系 4.2 $X_{(1)}$ と $X_{(n)}$ の同時確率密度関数は

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x_1, x_n) = \begin{cases} n(n-1)[F_X(x_n) - F_X(x_1)]^{n-2} f_X(x_1) f(x_n) & x_1 < x_n, \\ 0 & x_1 \geq x_n \end{cases}$$

で与えられる．

例 4.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 2$ は独立同一に $(0, 1)$ 上の一様分布に従うとする．すなわち，各 $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ は確率密度関数と分布関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

を持つ．定理 4.8 から

$$f_{X_{(j)}}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} x^{j-1}(1-x)^{n-1} & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{その他）} \end{cases}$$

となる．

4.4 確率変数の列の収束について

以下では，特に断りがない限り $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし，X を確率変数とし，これらは同一の確率空間上で定義されているとする．

定義 4.6 (確率収束) $n \to \infty$ のとき，$\{X_n\}$ が X に**確率収束**するとは，任意の正数 ϵ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

をみたすときをいい，$X_n \xrightarrow{P} X$ と記す．

定義 4.7 (分布収束) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, X は確率変数とし，$F_X(x)$ を X の分布関数とする．$n \to \infty$ のとき，$\{X_n\}$ が X に**分布収束**するとは，$F_X(x)$ の任意の連続点において，

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = F_X(x)$$

をみたすときをいい，$X_n \xrightarrow{d} X$ と記す．

注意 4.2 $X_n \xrightarrow{d} F_X(x)$ のように記すこともある．また，X が正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとき，$X_n \xrightarrow{d} N(0, ,\sigma^2)$ と記すこともある．また，$F_X(x)$ のことを X_n の極限分布という．

例 4.6 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとし，

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

とする．直感的には，$n \to \infty$ のとき，M_n は 1 に近づくことがわかるであろう．これはつぎのことから保障される．まず，M_n の分布関数は

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ x^n & (0 \le x \le 1), \\ 1 & (x > 1), \end{cases}$$

と[(4-4)]なる．したがって，任意の正数 ϵ に対して，

$$\begin{aligned} P(|M_n - 1| > \epsilon) &= P(\{M_n < 1-\epsilon\} \cup \{M_n > 1+\epsilon\}) \\ &= P(M_n < 1-\epsilon) + P(M_n > 1+\epsilon) \\ &= P(M_n < 1-\epsilon) = (1-\epsilon)^n \to 0 \qquad (n \to \infty), \end{aligned}$$

がわかる[(4-5)]．

次に，$n(1 - M_n)$ の極限分布を求めよう：$x \ge 0$ に対して，

$$\begin{aligned} P(n|1 - M_n| \le x) &= P(M_n \ge 1 - x/n) = 1 - P(M_n < 1 - x/n) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\ &\to 1 - e^{-x} \qquad (n \to \infty), \end{aligned}$$

となる．また，$x < 0$ のときは $P(n|1 - M_n| \le x) = 0$ となる．したがって，

$$n|1 - M_n| \xrightarrow{d} F_X(x)$$

を得る．ただし，

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & (x \ge 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

である．すなわち，母数 1 の指数分布に分布収束することがわかる．

以下では確率変数列の収束に関する重要な定理を証明するための補題である.

補題 4.2 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を事象の列とする．$n \uparrow \infty$ のとき,

$$P(A_n) \to 1, \qquad P(B_n) \to 1$$

ならば,

$$P(A_n \cap B_n) \to 1$$

が成立する.

証明 $P(A_n^c) = 1 - P(A_n) \to 0 (n \to \infty)$ に注意すれば,

$$P\{(A_n \cap B_n)^c\} = P(A_n^c \cup B_n^c) \leq P(A_n^c) + P(B_n^c) \to 0, \quad (n \to \infty)$$

よりわかる． □

定理 4.10 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列で

$$X_n \xrightarrow{P} c, \qquad Y_n \xrightarrow{P} d, \qquad (n \to \infty)$$

を満足するとする．ただし，c と d は定数とする．このとき,

(i) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} c \pm d$

(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{P} cd$

(iii) $d \neq 0$ ならば，$X_n / Y_n \xrightarrow{P} c/d$

が成立する.

証明 (i) の証明．$|(X_n + Y_n) - (c + d)| \leq |X_n - c| + |Y_n - d|$ から，どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$|X_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |Y_n - d| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.13}$$

ならば,

$$|(X_n + Y_n) - (c + d)| < \epsilon$$

であるので

$$\{|X_n - c| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{|Y_n - d| < \frac{\epsilon}{2}\} \subset \{|(X_n + Y_n) - (c + d)| < \epsilon\}$$

より，$n \uparrow \infty$ のとき,

$$P\{|(X_n + Y_n) - (c + d)| < \epsilon\} \geq P[\{|X_n - c| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{|Y_n - d| < \frac{\epsilon}{2}\}] \to 1$$

となる[4-6]．なぜならば，$P\{|X_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\} \to 1$ と $P\{|Y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}\} \to 1$ から補題 4.2 を用いればわかる.
(ii) の証明．$X_n Y_n - cd = (X_n - c)(Y_n - d) + d(X_n - c) + c(Y_n - d)$ に注意する．どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|X_n Y_n - cd| \geq \epsilon\} \quad &\leq \quad \mathbb{P}\{|(X_n - c)(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3}\} + \mathbb{P}\{|(X_n - c)| \geq \frac{\epsilon}{3|d|}\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{|(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3|c|}\} \end{aligned}$$

となる．どんな正の数 $\delta > 0$ に対しても

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|(X_n - c)(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3}\} &= \mathbb{P}\{|(X_n - c)(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } |Y_n - d| \geq \delta\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{|(X_n - c)(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } |Y_n - d| < \delta\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|Y_n - d| \geq \delta\} + \mathbb{P}\{|(X_n - c)(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } |Y_n - d| < \delta\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|Y_n - d| \geq \delta\} + \mathbb{P}\{|X_n - c| \geq \frac{\epsilon}{3\delta}\} \to 0, \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となることからわかる．

(iii) の証明．$1/Y_n \xrightarrow{P} 1/d$ を示せば (ii) よりわかる．十分小さな正の数 $\delta > 0$ に対して，$|Y_n - d| \leq \delta$ ならば，$|Y_n| \geq (1/2)|d|$ より

$$\mathbb{P}\{|Y_n| \geq \frac{1}{2}|d|\} \geq \mathbb{P}\{|Y_n - d| \leq \delta\} \to 1, \qquad (n \to \infty)$$

となる．また，$|Y_n| \geq (1/2)|d|$ のとき，

$$\left|\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{d}\right| \leq \frac{|Y_n - d|}{|Y_n||d|} \leq \frac{2}{|d|^2}|Y_n - d|$$

が成立する．これらを用いれば，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{d}\right| \geq \epsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{d}\right| \geq \epsilon, |Y_n| \geq \frac{1}{2}|d|\right\} + \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{d}\right| \geq \epsilon, |Y_n| < \frac{1}{2}|d|\right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{|Y_n - d| \geq \frac{|d|^2}{2}\epsilon\right\} + \mathbb{P}\left\{|Y_n| < \frac{1}{2}|d|\right\} \\ &\to 0, \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

より示せた． □

定理 4.11 （連続写像定理）: g を実数値連続関数とする．このとき，$Y_n \xrightarrow{P} b$（b は定数）ならば，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$g(Y_n) \xrightarrow{P} g(b)$$

が成立する．

証明 どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対してもある正の数 $\delta > 0$ が存在して，

$$|Y_n - b| \leq \delta \quad \text{ならば} \quad |g(Y_n) - g(b)| \leq \epsilon$$

を満足するので，

$$P\{|Y_n - b| \leq \delta\} \leq P\{|g(Y_n) - g(b)| \leq \epsilon\}$$

より，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$P\{|g(Y_n) - g(b)| > \epsilon\} \leq P\{|Y_n - b| > \delta\} \to 0$$

より定理は示せた． □

定理 4.12 （Slutsky の定理）$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし $X_n \xrightarrow{d} X$，$A_n \xrightarrow{P} a$，$B_n \xrightarrow{P} b$ を満足するとする．ただし，X は確率変数，a と b は定数とする．このとき，

$$A_n + B_n X_n \xrightarrow{d} a + bX$$

が成立する．

証明　まず，

$$A_n + X_n \xrightarrow{L} a + X$$

を示す．どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} F_{(A_n+X_n)}(x) &= \mathbb{P}\{A_n + X_n \le x\} \\ &= \mathbb{P}\{A_n + X_n \le x, A_n \ge a - \epsilon\} + \mathbb{P}\{A_n + X_n \le x, A_n < a - \epsilon\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

となることに注意する．十分小さな ϵ ととり，$x \pm \epsilon$ が $F_{(a+X)}(\cdot) = \mathbb{P}\{a + X \le \cdot)$ の連続点になるようにとる[(4-7)]．(4.14) から

$$F_{(A_n+X_n)}(x) \le \mathbb{P}\{X_n \le x - a + \epsilon\} + \mathbb{P}\{|A_n - a| > \epsilon\}$$

となる．また，$F_{X+a}(\cdot)$ の連続点 x に対して，

$$\begin{aligned} F_{(X_n+a)}(x) &= \mathbb{P}\{X_n + a \le x) = F_{X_n}(x-a) \\ &\to F_X(x-a) = P(X \le x - a) = F_{X+a}(x) \end{aligned}$$

となる ことより，$X_n + a \xrightarrow{d} X + a$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) &\le \lim_{n\to\infty} \{\mathbb{P}(X_n \le x - a + \epsilon) + \mathbb{P}(|A_n - a| > \epsilon)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} F_{(X_n+a)}(x+\epsilon) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|A_n - a| > \epsilon) \\ &= F_{(X+a)}(x+\epsilon) \end{aligned} \tag{4.15}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} 1 - F_{(X_n+A_n)}(x) &= \mathbb{P}\{X_n + A_n > x\} \\ &\le \mathbb{P}\{X_n > x - a - \epsilon\} + \mathbb{P}\{|A_n - a| \ge \epsilon\} \end{aligned}$$

から

$$\liminf_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) \ge \lim_{n\to\infty} \{F_{(X_n+a)}(x-\epsilon) + \mathbb{P}(|A_n - a| > \epsilon)\} = F_{X+a}(x-\epsilon) \tag{4.16}$$

となる．(4.15) と (4.16) から

$$F_{(X+a)}(x-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) \le F_{(X+a)}(x+\epsilon)$$

を得る．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) = F_{(X+a)}(x)$$

が成り立つ．

つぎに，一般性を失わずに $b = 1$ として，$B_n X_n \xrightarrow{d} X$ を示せば，定理は示される．どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} F_{B_n X_n}(x) &= \mathbb{P}\{B_n X_n \le x\} \\ &= P\left\{B_n X_n \le x, \left|\frac{1}{B_n} - 1\right| \le \frac{\epsilon}{|x|}\right\} + \mathbb{P}\left\{B_n X_n \le x, \left|\frac{1}{B_n} - 1\right| > \frac{\epsilon}{|x|}\right\} \\ &\le \mathbb{P}\{X_n \le x + \epsilon\} + \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{B_n} - 1\right| > \frac{\epsilon}{|x|}\right\} \end{aligned}$$

より，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$\limsup_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \le \lim_{n\to\infty}\left[\mathbb{P}\{X_n \le x+\epsilon\} + \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{B_n}-1\right| > \frac{\epsilon}{|x|}\right\}\right] \to F_X(x+\epsilon)$$

を得る．同様な議論により，

$$\liminf_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \ge F_X(x-\epsilon)$$

を得る．したがって，

$$F_X(x-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \le F_X(x+\epsilon)$$

が成り立つので，

$$F_{B_nX_n}(x) \to F_X(x)$$

を得る．よって，定理は示された． □

定理 4.13 $X_n \xrightarrow{P} X$ ならば，$X_n \xrightarrow{d} X$ が成立する．

証明：$A_n = X_n - X$ とおく．条件より，$A_n \xrightarrow{P} 0$ となり，$X_n = X + A_n$ に対して，Slutsky の定理を用いれば，この定理は示される． □

注意 4.3 上の定理の逆は一般には成立しないが，c をある定数とすると，

$$X_n \xrightarrow{d} c \quad \Leftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} c$$

である．実際，X_n と X の分布関数を H_n と H かけば，すべての $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} H_n(c-\epsilon-) = H(c-\epsilon-) = 0$$

と

$$\lim_{n\to\infty} H_n(c+\epsilon) = H(c+\epsilon) = 1$$

から

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| > \epsilon) &= P(X_n > c+\epsilon) + P(X_n < c-\epsilon) \\ &= 1 - H_n(c+\epsilon-) + H_n(c-\epsilon) \to 0 \end{aligned}$$

となる．

定理 4.14 $X_n \xrightarrow{d} X$ となるための必要十分条件は，すべての有界連続な関数 f に対し，

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$$

が成立することである．

証明 どんな x に対しても，ある $A > 0$ が存在して $|f(x)| \le A$ とできる．また，どんな $\epsilon > 0$ に対しても，ある $B > 0$ とある正の整数 n_0 が存在して，どんな $n \ge n_0$ に対しても $P(|X_n| \ge B) \le \epsilon/(3A)$ ともできる．h を実数値関数とし，$0 \le h(x) \le 1$ でかつ

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (\ |x| > B+1\ ) \\ 1 & (\ |x| \le B+1\ ) \end{cases}$$

を満足するものとする．このとき，

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\le |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X_n)h(X_n)]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[f(X_n)h(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)h(X)]| + |\mathbb{E}[f(X)h(X)] - \mathbb{E}[f(X)]| \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + |\mathbb{E}[f(X_n)h(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)h(X)]|\end{aligned}$$

となる．したがって，コンパクトな台 I をもつ連続関数 g に対して，

$$|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立することを示せばよい．I はコンパクトで，g は一様連続なので，有限個の矩形領域 I_j でその上での g の変動が $\epsilon/12$ 以下になり，$I \subset \cup_j I_j$ とできる．それぞれの I_j から一点 x_j を取り出し，$g_\epsilon(x) = \sum_j g(x_j)\mathbf{1}_{I_j}(x)$ とする．すると，

$$|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g_\epsilon(X_n)]| \le \frac{\epsilon}{12} + \mathbb{P}(X_n \notin I) \le \frac{\epsilon}{6}$$
$$|\mathbb{E}[g(X)] - \mathbb{E}[g_\epsilon(X)]| \le \frac{\epsilon}{12} + \mathbb{P}(X \notin I) \le \frac{\epsilon}{6}$$

となる[(4-8)]．さらに，n を十分おおきくとれば，

$$|\mathbb{E}[g_\epsilon(X_n)] - \mathbb{E}[g_\epsilon(X)]| \le \sum_j |\mathbb{P}(X_n \in I_j) - \mathbb{P}(X \in I_j)||g(x_j) \le \frac{\epsilon}{6}$$

とできることからわかる． □

定理 4.15 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, X は確率変数とし，$g(x)$ を実数値連続関数とする．このとき，つぎが成立する．

$$X_n \xrightarrow{d} X \qquad \text{ならば,} \qquad g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

.

証明 定理 4.14 から任意の有界連続関数 f に対して，$n \to \infty$ のとき，

$$\mathbb{E}[f(g(X_n))] \to \mathbb{E}[f(g(X))]$$

を示せばよい．$f \circ g$ も有界連続関数であることと仮定より上の式は明らか． □

系 4.3 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数とし，$X_n \xrightarrow{d} c$ かつ $Y_n \xrightarrow{d} d$ とする．ただし，c, d は定数である．このとき，つぎが成立する．

(1) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + d$.

(2) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cd$.

証明 Slutzky の定理より明らか． □

定理 4.16 (デルタ法) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, Z は確率変数，θ を定数とする．$n \to \infty$ のとき，

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$$

が成立すると仮定する．実数値関数 $g(x)$ は $x = \theta$ で微分可能で微係数 $\dot{g}(\theta)$ を持ち，$\dot{g}(\theta) \neq 0$ ならば，

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \dot{g}(\theta) Z$$

が成立する．

証明　まず，仮定と定理 4.12 から

$$X_n - \theta = \frac{1}{\sqrt{n}} a_n(X_n - \theta) \xrightarrow{d} 0$$

となる．さらに，注意 4.3 から $X_n - \theta \xrightarrow{P} 0$ となる．ここで $g(X_n)$ を $X_n = \theta$ のまわりでテーラー展開する：

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = \dot{g}(\theta)\sqrt{n}(X_n - \theta) + \sqrt{n}\mathrm{Rem} \tag{4.17}$$

ここで

$$\lim_{X_n \to \theta} \frac{\mathrm{Rem}}{|X_n - \theta|} = 0$$

である．これと仮定から

$$\frac{\mathrm{Rem}}{|X_n - \theta|} \xrightarrow{P} 0$$

となる．また，$\sqrt{n}(X_n - \theta)$ は分布収束することと上のことに注意して，再度定理 4.14 を用いると

$$\sqrt{n}\mathrm{Rem} = \sqrt{n}(X_n - \theta)\frac{\mathrm{Rem}}{|X_n - \theta|} \xrightarrow{d} 0$$

となり，注意 4.3 から $\sqrt{n}\mathrm{Rem} \xrightarrow{P} 0$ を得る．(4.17) に定理 4.14 を適用すれば定理は証明される．□

例 4.7　$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{d} X$ とし，X は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする．ここで，$\mu \neq 0, \sigma^2 > 0$ を仮定する．このとき，

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{\mu}\right) \xrightarrow{d} -\frac{1}{\mu^2}X$$

となる．さらに，正規分布の性質から $-(1/\mu^2)X$ は正規分布 $N(0, \sigma^2/\mu^4)$ に従うことがわかる．

4.5 大数の法則と中心極限定理

定理 4.17 (大数の (弱) 法則) $X_1, X_2, \ldots$ は独立同一分布に従う確率変数列で $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ する．$n \to \infty$ のとき，

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu \tag{4.18}$$

が成立する．ただし，$\mathbb{E}[X_1] = \mu$ である．

証明 証明は略. □

注意 4.4 $X_1, X_2, \ldots$ は独立同一分布に従う確率変数列で $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ する．いま，$\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathbb{VAR}[X_1] = \sigma^2 < \infty$ と書くことにする．このとき，任意の正数 ϵ に対して，

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{VAR}[\bar{X}_n] = \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{n}\mathbb{VAR}[X_1] \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

を得る．ただし，上の不等号はチェビシェフの不等式を利用した．$\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ を仮定すれば，チェビチェフの不等式より (4.18) はわかるが，大数の弱法則は $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ ならば，(4.18) が成立することを主張している．

例 4.8 $X_1, X_2, \ldots$ は独立同一分布に従う確率変数列で $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathbb{VAR}[X_1] = \sigma^2 < \infty$ とする．このとき，

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

を示そう．まず，

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2\right)$$

に注意する．$\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ から大数の弱法則を用いれば，$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ になる．さらに，定理 4.11 から $\bar{X}_n^2 \xrightarrow{P} \mu^2$ を得る．また，$\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{VAR}[X_1] + \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 < \infty$ から大数の弱法則を用いれば，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \mu\mathbb{E}[X_1^2]$$

となる．最後に，系 4.3 から $n \to \infty$ のとき，

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}^{[}X_1^2] - \mu^2 = \mathbb{VAR}[X_1]$$

を得る．

定理 4.18 (中心極限定理) $X_1, X_2, \ldots$ は独立同一分布に従う確率変数列で $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathbb{VAR}[X_1] = \sigma^2 < \infty$ とし，

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

とする．$n \to \infty$ のとき，

$$Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

が成立する．すなわち，任意の実数 x に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_n \le x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$

が成立する．

証明　証明は略. □

例 4.9 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に母数 p, $0 < p < 1$ のベルヌーイ分布に従うとする．すると $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は母数 n と p の二項分布に従う．したがって，$t_1 < t_2$ に対して，

$$\mathbb{P}(t_1 \leq T_n \leq t_2) = \sum_{x=t_1}^{t_2} f_{T_n}(x)$$

となる．ただし，

$$f_{T_n}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n$$

である．この確率の近似値を中心極限定理を利用して求めよう．$\mathbb{E}[X_1] = p$, $\mathbb{VAR}[X_1] = p(1-p)$ と中心極限定理から

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}((1/n)T_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{T_n - np}{np(1-p)} \leq x\right) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

となる．これより

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t_1 \leq T_n \leq t_2) &= \mathbb{P}(t_1 - (1/2) < T_n \leq t_2 + (1/2)) \\
&= \mathbb{P}(T_n \leq t_2 + (1/2)) - \mathbb{P}(T_n \leq t_1 - (1/2)) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{T_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{t_2 - np + (1/2)}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{T_n - np)}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{t_2 - np - (1/2)}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{t_2 - np + (1/2)}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{t_1 - np - (1/2)}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

とした.

いま，$n = 25$ と $p = 0.2$ と $t_1 = 3, t_2 = 5$ とし，$\mathbb{P}(3 \leq T_{25} \leq 5)$ の近似値を求めよう：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(3 \leq T_{25} \leq 5) &= \mathbb{P}(2.5 < T_{25} \leq 5.5) \\
&\approx \Phi\left(\frac{5.5 - 5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2.5 - 5}{2}\right) \\
&= \Phi(0.25) - \Phi(-1.25) \doteqdot 0.599 - 0.106 \\
&= 0.493
\end{aligned}$$

となる.