第7章　検定法

7.1　検定論の枠組み

この節では統計的決定理論の用語を用いて検定論の基本的な考え方と枠組みを説明する．

記号

Θ：母数空間，$\mathbb{R}^m$ の部分空間

$\mathscr{X}$：標本空間，$\mathbb{R}^n$ の部分空間でランダム標本 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の値域である．

$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta)$：$\boldsymbol{X}$ の累積分布関数．ただし，$\theta \in \Theta$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ である．特に，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立の場合は

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta) = \Pi_{i=1}^n F_{X_i}(x_i|\,\theta)$$

となる．ここで，$F_{X_i}(x_i|\,\theta)$ を X_i の累積分布関数とした．

検定問題では，母数空間 Θ が互いに共通部分を持たない二つの部分集合 Θ_0, Θ_1 にわけられた場合，すなわち

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \qquad \Theta_0 \cap \Theta_0 = \emptyset$$

を考え，ランダム標本 $\boldsymbol{X}$ に基づいて未知の母数 θ が Θ_0 と Θ_1 のどちらに属しているかを判断する．未知の母数 θ が Θ_0 に属しているとする仮説を帰無仮説といい，$H_0 : \theta \in \Theta_0$ と書く．逆に，θ が Θ_1 に属していると仮説を対立仮説といい，$H_1 : \theta \in \Theta_1$ と書くことにする．検定問題では二つの仮説を同等とみなさず，中心となる仮説を帰無仮説と呼び，相対する仮説を対立仮説と呼ぶ．以下では帰無仮説と対立仮説をあわせて

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

と簡潔に表すことにする．

帰無仮説に対応する母数空間が1点集合 $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ であるとき帰無仮説を単純帰無仮説であるという．同様に対立仮説に対応する母数空間が1点集合 $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ であるとき対立仮説を単純対立仮説であるという．単純仮説でないものを複合仮説という．

例 7.1　コインを投げる実験を考える．表の出る確率を p とする．このとき，コインにゆがみがないということを帰無仮説とすれば，これは単純帰無仮説 $H_0 : p = 1/2$ となる．

θ が 1 次元のときには片側検定と両側検定という用語もしばしば用いる．θ が実数の検定問題が

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

の形のとき両側検定といい，

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

のとき片側検定という．ただし，θ_0 は固定された値である．また，θ は 2 次元で $\theta = (\mu, \sigma^2)$ であり，興味のある母数は μ の方で，検定問題とし，

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad (\sigma^2 \text{ は任意の正の数})$$

を考えることがある．この場合，μ に関しては１点の帰無仮説ではあるが，σ^2 は未知であるために帰無仮説は複合仮説

$$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$$

となる．σ^2 は未知であるが検定問題にとってさしあたり興味がない母数である．このような母数のことを局外母数または攪乱母数とよぶ.

ランダム標本 $\boldsymbol{X}$ に基づいて帰無仮説と対立仮説のいずれが正しいかを判断したいとき，取り得る決定（行動）は H_0 が正しいと判断するか，H_1 が正しいと判断するかのいずれかである．H_0 が正しいと判断することを「帰無仮説 H_0 を受容する」といい，逆に H_1 が正しいと判断することを「帰無仮説 H_0 を棄却する」という．以下では，帰無仮説 H_0 を受容する決定を 0 で表し，帰無仮説 H_0 を棄却する決定を 1 で表すことにする．また，$\mathscr{D} = \{0, 1\}$ を決定（行動）空間とよぶことにする.

帰無仮説が正しいとき（$\theta \in \Theta_0$ ）に帰無仮説を棄却する誤りを第 1 種の誤りとよび，対立仮説が正しいとき（$\theta \in \Theta_1$ ）に帰無仮説を受容する誤りを第 2 種の誤りと呼ぶ.

$\Theta \setminus \mathscr{D}$	0	1
$\theta \in \Theta_0$	正しい	第 1 種の誤り
$\theta \in \Theta_1$	第 2 種の誤り	正しい

伝統的な検定論の考え方では，第 1 種の誤りを重視し，第 1 種の誤りを犯す確率をある与えられた限界 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ 以下に押さえた上で，第 2 種の誤りを犯す確率をできるだけ小さくすることを目指す．この与えられた α の値を有意水準という.

検定問題において関数 $\psi : \mathscr{X} \to [0, 1]$ で，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ を観測したとき確率 $\psi(\boldsymbol{x})$ で帰無仮説を棄却し，確率 $1 - \psi(\boldsymbol{x})$ で帰無仮説を受容するするものを検定関数と呼ぶ．特に，$\psi : \mathscr{X} \to \{0, 1\}$ を非確率化検定関数と呼ぶ．そうでないものを確率化検定関数という.

非確率化検定関数が与えられたときは，標本空間を ψ の値によって分割することになる．$W = \{\boldsymbol{x} : \psi(\boldsymbol{x}) = 1\}$ と $W^c = \mathscr{X} \setminus W$ とおく．このとき，W を棄却域とよび，W^c を受容域とよぶ．標本空間の分割は特定の統計量 $T(\boldsymbol{X})$ の値によって定義されることが多い．たとえば，棄却域と受容域が

$$W = \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) > c\}, \qquad W^c = \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) \leq c\}$$

のような具合である．ただし，c はある定数である．このとき，この棄却域に対応する検定関数は,

$$\psi(\boldsymbol{x}) = I\{T(\boldsymbol{x}) > c\}$$

となる．このような統計量 T のことを検定統計量といい，c を棄却限界という.

いま，検定関数の $\{0, 1\}$ -値損失関数 $\boldsymbol{L}(\theta, d)$ を考えよう．ただし，$\theta \in \Theta$ と $d \in \mathscr{D}$ である.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}(\theta, 0) &= \begin{cases} 0, & (\theta \in \Theta_0) \\ 1, & (\theta \in \Theta_1) \end{cases} \\
\boldsymbol{L}(\theta, 1) &= 1 - \boldsymbol{L}(\theta, 0) = \begin{cases} 1, & (\theta \in \Theta_0) \\ 0, & (\theta \in \Theta_1) \end{cases}
\end{aligned}$$

と定める．いま，$d : \mathscr{X} \to \{0, 1\}$ とし，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ が与えられたとき，確率 $\psi(\boldsymbol{x})$ で $d(\boldsymbol{x}) = 1$ をとり，確率 $1 - \psi(\boldsymbol{x})$ で $d(\boldsymbol{x}) = 0$ を取るとする．このとき，リスク関数を

$$\boldsymbol{R}(\theta, \psi) = \mathbb{E}_\theta[\boldsymbol{L}(\theta, d(\boldsymbol{X}))]$$

で定める．$\theta \in \Theta_0$ のとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\theta,\,\psi) &= \mathbb{E}_\theta[I\{d(\boldsymbol{X})=1\}] = \mathbb{E}_\theta[\mathbb{E}[I\{d(\boldsymbol{x})=1\}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]] \\ &= \mathbb{E}_\theta[1\times\mathbb{P}(d(\boldsymbol{x})=1\,|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})+0\times\mathbb{P}(d(\boldsymbol{x})=0\,|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})] \\ &= \mathbb{E}_\theta[\psi(\boldsymbol{X})]\end{aligned}$$

となる．また，$\theta \in \Theta_1$ のとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\theta,\,\psi) &= \mathbb{E}_\theta[I\{d(\boldsymbol{X})=0\}] = \mathbb{E}_\theta[\mathbb{E}[I\{d(\boldsymbol{x})=0\}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]] \\ &= \mathbb{E}_\theta[1\times\mathbb{P}(d(\boldsymbol{x})=0\,|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})+0\times\mathbb{P}(d(\boldsymbol{x})=1\,|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})] \\ &= \mathbb{E}_\theta[1-\psi(\boldsymbol{X})] = 1-\mathbb{E}_\theta[\psi(\boldsymbol{X})]\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\beta_\psi(\theta) = \mathbb{P}_\theta[d(\boldsymbol{X})=1] = \mathbb{E}_\theta[\psi(\boldsymbol{X})]$$

とおけば，

$$\boldsymbol{R}(\theta,\,\psi) = \begin{cases} \beta_\psi(\theta), & (\theta\in\Theta_0) \\ 1-\beta_\psi(\theta), & (\theta\in\Theta_1)\end{cases}$$

となる．$\beta_\psi(\theta)$ のことを検出力関数（または簡単に検出力および検定力）とよぶ.

例 7.2 　ある工場で大量生産される製品の不良率を $\theta\,(0<\theta<1)$ とする．θ がある限界 θ_0 以下であれば生産工程は正常であるとし，θ_0 を越えた場合は生産工程は異常があるものとする．この場合，検定問題は

$$H_0:\,\theta\in\Theta_0=[0,\,\theta_0] \quad v.s. \quad H_1:\,\theta\in\Theta_1=(\theta_0,\,1]$$

となる．ここで 10 個の製品を検査しその中での不良品の数に対応する確率変数を X とし，もし X が 1 以上ならば帰無仮説 H_0 を棄却するような検定関数を考えよう．すなわち

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & (x\geq 1) \\ 0, & (x=0)\end{cases}, \qquad x=0,\,1,\,\ldots,\,10$$

となる．X は二項分布 $Bin(10,\,\theta)$ に従うと考えてよいので検出力関数は

$$\beta_\psi(\theta) = \mathbb{P}_\theta[X\geq 1] = 1-\mathbb{P}_\theta[X=0] = 1-(1-\theta)^{10}$$

で与えられる.

$\theta\in\Theta_0$ に対し $\beta_\psi(\theta)$ は第 1 種の誤りの確率であるから，有意水準 α に対し

$$\beta_\psi(\theta)\leq\alpha, \qquad \theta\in\Theta_0$$

ならば検定関数 ψ は有意水準 α の検定の一つである.

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_\psi(\theta)$$

を検定関数 ψ のサイズとよぶ.

例 7.3 　$X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ を正規分布 $N(\theta,\,1)$ からのランダム標本とし，検定問題 $H_0:\,\theta=0,\,\text{v.s.}\,H_1:\,\theta\neq 0$ を考える．このとき，

$$\psi(\boldsymbol{x}) = I\{|\bar{x}_n|>c\}$$

なる検定関数が考えられる．すなわち，$T(\boldsymbol{X}) = |\bar{X}_n|$ である．簡便にかけば

$$T(\boldsymbol{X}) > c \qquad \text{ならば} \quad H_0 \text{ を棄却}$$

である．この場合の ψ の検出力は $\bar{X}_n \sim N(\theta, 1/n)$ となることから

$$\begin{aligned}\beta_\psi(\theta) &= \mathbb{P}_\theta[T(\boldsymbol{X}) > c] = \mathbb{P}_\theta[|\bar{X}_n| > c] = 1 - P_\theta[-c < \bar{X}_n < c] \\ &= 1 - \Phi(\sqrt{n}(c-\theta)) + \Phi(-\sqrt{n}(c+\theta))\end{aligned}$$

となる．ただし，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x (1/\sqrt{2\pi}) e^{-t^2/2}\, dt$ である．

例 7.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を正規分布 $N(\theta, 5^2)$ からのランダム標本とし，検定問題 $H_0: \theta \le 0$, v.s. $H_1: \theta > 17$ を考える．

たとえば，棄却域 $W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \bar{x}_n > 17 + 5/\sqrt{n}\}$ とし，非確率化検定関数

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & (\boldsymbol{x} \in W) \\ 0, & (\boldsymbol{x} \in W^c) \end{cases}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ である．

検定関数 ψ のサイズは

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\theta \le 17} \boldsymbol{R}(\theta, \psi) = \sup_{\theta \le 17} \mathbb{E}_\theta[I_W(\boldsymbol{x})] = \sup_{\theta \le 17} \mathbb{P}_\theta\left[\bar{X}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \sup_{\theta \le 17} \mathbb{P}_\theta\left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{5/\sqrt{n}} > \frac{17 + \frac{5}{\sqrt{n}} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right] = \sup_{\theta \le 17} \mathbb{P}_\theta\left[Z > \frac{17 + \frac{5}{\sqrt{n}} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right] \\ &= \mathbb{P}_{17}\left[Z > \frac{17 + \frac{5}{\sqrt{n}} - 17}{5/\sqrt{n}}\right] = 1 - \Phi(1) \approx 0.159\end{aligned}$$

となる(7-1)．ただし，Z は標準正規分布に従う確率変数とし，

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\, dt$$

である．

一方，検定関数 ψ の検出力は

$$\beta_\psi(\theta) = \mathbb{P}_\theta\left[\bar{X}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right] = \mathbb{P}_\theta\left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{5/\sqrt{n}} > \frac{17 + \frac{5}{\sqrt{n}} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right] = \left\{1 - \Phi\left(\frac{17 + \frac{5}{\sqrt{n}} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right)\right\}$$

となる．

例 7.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をベルヌーイ試行

$$f(x|\,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x), \qquad 0 < \theta < 1$$

からのランダム標本とし，検定問題 $H_0: \theta \le 1/2$, v.s. $H_1: \theta > 1/2$ を考える．標本空間 $\mathscr{X}$ を領域 A, B, C に分割する．

$$\begin{aligned}A &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} < 5\} \\ B &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} = 5\} \\ A &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} > 5\}\end{aligned}$$

さらに，検定関数を

$$\psi(x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_{10})=\begin{cases}1, & ((x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_{10})\in C)\\ 1/2, & ((x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_{10})\in B)\\ 0, & ((x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_{10})\in A)\end{cases}$$

とする．$\sum_{i=1}^{10} X_i$ は二項分布 $Bin(10,\,\theta)$ に従うことに注意すれば，検定関数 ψ のサイズは

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\theta\le 1/2}\mathbb{E}_\theta[\psi(X_1,\,X_2,\,\ldots\,,\,X_n)]\\ &= \sup_{\theta\le 1/2}\left[\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}\theta^i(1-\theta)^{10-i}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}\theta^5(1-\theta)^5\right]\\ &= \sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{10-i}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\end{aligned}$$

となる．また，検出力は $\theta>1/2$ に対し

$$\beta_\psi(\theta)=\mathbb{E}_\theta[\psi(X_1,\,X_2,\,\ldots\,,\,X_{10})]=\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}\theta^i(1-\theta)^{10-i}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}\theta^5(1-\theta)^5$$

となる．

7.2 最強力検定とネイマン・ピアソンの補題

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率密度関数または確率関数 $f(x|\theta)$ からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，$\Theta = \{\theta_0, \theta_1$ とする．いま，検定問題

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \theta = \theta_0, \text{v.s. 対立仮説 } H_1 : \theta = \theta_1$$

を考える．望ましい検定関数 ψ の $\beta_\psi(\theta_0) = \mathbb{P}\{H_0\text{を棄却} \mid H_0\text{は真}\}$ は小さい値（理想的なは 0）で，$\beta_\psi(\theta_1) = \mathbb{P}\{H_0\text{を棄却} \mid H_1\text{は真}\}$ は大きな値 (理想的なは 1) である．また，$\beta_\psi(\theta_0)$ は第１種の誤りであり，$1 - \beta_\psi(\theta_1)$ は第２種の誤りであった．しかし，このふたつの誤りの確率を同時に小さくすることはできない．

定義 7.1 帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ v.s. 対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1$ の検定する検定関数 ψ が有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の最強力検定であるとはつぎをみたすことである．

(1) $\beta_\psi(\theta_0) = \alpha$

(2) どんな有意水準が α の検定関数 $\tilde{\psi}$ （すなわち，$\beta_{\tilde{\psi}}(\theta_0) \le \alpha$）に対しても

$$\beta_\psi(\theta_1) \ge \beta_{\tilde{\psi}}(\theta_1)$$

定理 7.1 （Neyman-Pearson の基本定理）: P_0 と P_1 を確率分布とし，それぞれはある測度 μ [7-2]に関する確率密度関数 p_0 と p_1 を持つこととする．また，P_0 と P_1 に対応する期待値を $\mathbb{E}_0$ と BBE_1 記す．
(i) 存在：検定問題 $H_0 : p_0$，$H_1 : p_1$ に対して，ある検定関数 ψ と定数 k と γ が存在し，

$$\mathbb{E}_0\psi(X) = \alpha \tag{7.1}$$

と

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & (p_1(x) > kp_0(x) \text{ のとき}) \\ \gamma & (p_1(x) = kp_0(x) \text{ のとき}) \\ 0, & (p_1(x) < kp_0(x) \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7.2}$$

を満足する．
(ii) 最強力検定のための十分条件：ある検定関数がある定数 k に対して，(7.1) と (7.2) を満足するならば，その検定関数は最強力検定になる．
(iii) 最強力検定のための必要条件：もし，ψ が検定問題 $H_0 : p_0$，$H_1 : p_1$ の有意水準 α の最強力検定ならば，ψ はある k に対して (7.2) を満足する．また，検定のサイズが α より小さく検出力が 1 なる検定が存在しなければ，ψ は (7.1) も満足する．

証明：(i) 実数 c に対し，$g(c) = P_0\{p_1(X) > cp_0(X)\}$ とおく．確率は P_0 のもとで計算されるので，上の式の不等式は $\{x : p_0(x) > 0\}$ 上で定義されればよい．すると，$1 - g(c)$ は確率変数 $p_1(X)/p_0(X)$ の累積分布関数となる[7-3]．さらに，$g(c)$ は非増加，右連続で

$$g(c-0) - \alpha(c) = P_0\{\frac{p_1(X)}{p_0(X)} = c\}, \qquad \alpha(-\infty) = 1, \qquad \alpha(+\infty) = 0$$

となる．与えられた α に対して k を

$$g(k-0) \le \alpha \le g(k)$$

を満足するようにとり[7-4]，検定関数 ψ を

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & (p_1(x) > kp_0(x) \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha - g(k)}{g(k-0) - g(k)}, & (p_1(x) = kp_0(x) \text{ のとき}) \\ 0, & (p_1(x) < kp_0(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．上の式の 2 番目の項は $g(k-0)-g(k)=0$ の場合以外は定義される．また，$g(k-0)-\alpha(k)=0$ の場合は $P_0\{p_1(X)=kp_0(X)\}=0$ となるので，ψ はほとんどいたるところで定義される．さらに，ψ のサイズは

$$\mathbb{E}_0\psi(X)=P_0\{\frac{p_1(X)}{p_0(X)}>k\}+\frac{\alpha-g(k)}{g(k-0)-\alpha(k)}P_0\{\frac{p_1(X)}{p_0(X)}=k\}=\alpha$$

となるように k をとればよい(7-5)．

(ii) $\mathbb{E}_0\psi^*(X)\le\alpha$ なるどんな検定関数 ψ^* にたいしても

$$\mathbb{E}_1\psi(X)\ge\mathbb{E}_1\psi^*(X)$$

が成立することを示せばよい．いま，

$$S^+=\{x:\psi(x)-\psi^*(x)>0\},\qquad S^-=\{x:\psi(x)-\psi^*(x)<0\}$$

とおく．$x\in S^+$ ならば(7-6)，$p_1(x)\ge kp_0(x)$ となる．同様に，$x\in S^-$ ならば(7-7)，$p_1(x)<kp_0(x)$ となる．これらから $S^*\cup S^-$ 上で

$$(\psi(x)-\psi^*(x))(p_1(x)-kp_0(x))\ge 0$$

となる．したがって

$$\int(\psi(x)-\psi^*(x))(p_1(x)-kp_0(x))\,d\mu=\int_{S^*\cup S^-}(\psi(x)-\psi^*(x))(p_1(x)-kp_0(x))\,d\mu\ge 0$$

となる．これから

$$\int(\psi(x)-\psi^*(x))p_1(x)\,d\mu\ge k\int(\psi(x)-\psi^*(x))p_0(x)\,d\mu=k\{\mathbb{E}_0[\psi(X)-\psi^*(X)]\ge 0$$

なる．ψ と ψ^* はともに最強力検定なので $\mathbb{E}_0\psi(X)=\alpha,\ \mathbb{E}_0\psi^*(X)=\alpha$ となることより最後の不等号はからわかる．よって，(ii) は証明された．

(iii) ψ^* をサイズが α 以下の最強力検定とする．また，ψ を (7.1) と (7.2) を満足する検定とする．

$$S=(S^+\cup S^-)\cap\{x:p_1(x)\ne kp_0(x)\}$$

とする．すなわち，$S^+\cup S^-$ 上で ψ と ψ^* の値が異なる点である．さらに，$\mu(S)>0$ と仮定する．すると

$$\int_{S^+\cup S^-}(\psi-\psi^*)(p_1-kp_0)\,d\mu=\int_S(\psi-\psi^*)(p_1-kp_0)\,d\mu>0$$

となる．これより

$$\int_{S^+\cup S^-}(\psi-\psi^*)p_1\,d\mu>k\int_{S^+\cup S^-}(\psi-\psi^*)p_0\,d\mu=k(\mathbb{E}_0\psi(X)-\mathbb{E}_0\psi^*(X))\ge 0$$

となる．最後の等号は $(S^+\cup S^-)^c$ 上では $\psi(x)=\psi^*(x)$ からわかる．また，最後の不等号は $\mathbb{E}_0\psi(X)=\alpha,\ \mathbb{E}_0\psi^*(X)\le\alpha$ からわかる．これより $\mathbb{E}_1\psi(X)-\mathbb{E}_1\psi^*(X)>0$ となり，ψ が最強力検定であることに矛盾する．したがって，$\mu(S)=0$ となる． □

例 7.6 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を確率密度関数 $f(x|\,\theta)=\theta e^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$ からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，$\theta\in\Theta=\{\theta_0,\theta_1\}$ で $0<\theta_i\,(i=0,1)$ かつ $\theta_0<\theta_1$ である．検定問題

$$H_0:\theta=\theta_0,\qquad H_1:\theta=\theta_1$$

の検定を考える．いま

$$\begin{aligned} L_0(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) &= L_0 = \Pi_{i=1}^n f(x_i|\,\theta_0) = \theta_0^n \exp\{-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i\}\Pi_{i=1}^n I_{(0,\,\infty)}(x_i) \\ L_1(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) &= L_1 = \Pi_{i=1}^n f(x_i|\,\theta_1) = \theta_1^n \exp\{-\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i\}\Pi_{i=1}^n I_{(0,\,\infty)}(x_i) \end{aligned}$$

とおく．*Neyman-Pearson* の基本定理より $x_i > 0\,(i = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$ に対し

$$\lambda = \frac{L_0}{L_1} =< k^* \Longleftrightarrow \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\{-(\theta_0 - \theta_1)\sum_{i=1}^n x_i\} < k^*$$

ならば H_0 を棄却すれば最強力検定を得られる．これは

$$\sum_{i=1}^n x_i \le \frac{1}{\theta_1 - \theta_0} \log\left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k^*\right] = k'$$

ならば H_0 を棄却することと同値である．つぎに有意水準 α に対して k' を定める．すなわち

$$\alpha = \mathbb{P}[H_0\quad \text{棄却} \mid H_0\quad \text{が真}] = \mathbb{P}_{\theta_0}[\sum_{i=1}^n X_i \le k']$$

θ_0 のもとで $\sum_{i=1}^n X_i$ は母数 n と θ_0 のガンマ分布に従うので

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}[\sum_{i=1}^n X_i \le k'] = \int_0^{k'} \frac{1}{\Gamma(n)}\theta_0^n x^{n-1} e^{-\theta_0 x}\,dx \tag{7.3}$$

を満足するように k' を定めれたよい．*(7.3)* の解 k' を用いて検定関数

$$\psi(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) = \begin{cases} 1, & (\sum_{i=1}^n x_i \le k') \\ 0, & (\sum_{i=1}^n x_i > k') \end{cases}$$

とし，

$$d(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) = \begin{cases} 1, & (\text{確率 } \psi(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)) \\ 0, & (\text{確率 } 1 - \psi(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)) \end{cases}$$

とすればよい．

例 7.7 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ を確率関数 $f(x|\,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}I_{\{0,\,1\}}(x)$ からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，$\theta \in \Theta = \{\theta_0,\,\theta_1\}$ で $0 < \theta_i < 1\,(i = 1,\,2)$ かつ $\theta_0 < \theta_1$ である．検定問題

$$H_0:\,\theta = \theta_0, \qquad H_1:\,\theta = \theta_1$$

の検定を考える．いま

$$\begin{aligned} L_0(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) &= L_0 = \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\Pi_{i=1}^n I_{\{0,\,1\}}(x_i) \\ L_1(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) &= L_1 = \theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\Pi_{i=1}^n I_{\{0,\,1\}}(x_i) \end{aligned}$$

とおく．したがって，

$$\begin{aligned} \lambda \le k^* &\Longleftrightarrow \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\Big/\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \le k^* \\ &\Longleftrightarrow \left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n \le k^* \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \ge k' \end{aligned}$$

となる．よって

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge k' \qquad \text{ならば，} H_0 \text{ を棄却}$$

とすれば，最強力検定が得られる．

ここで，$\theta_0 = 1/4$, $\theta_1 = 3/4$, $n = 10$ の場合について $\alpha = 0.05$ としたときに k' を求めよう．

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=1/4}[\ H_0 \text{ を棄却}] = \mathbb{P}_{\theta=1/4}[\sum_{i=1}^{10} X_i \ge k'] \sum_{i=k'}^{10} \left(\begin{array}{c} 10 \\ i \end{array} \right) \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}$$

となる．$k' = 6$ ならば $\alpha = 0.0197$ となり，$k' = 5$ ならば $\alpha = 0.0781$ となるので，

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \begin{cases} 1, & (\sum_{i=1}^{10} x_i \ge 6) \\ \frac{0.05-0.00197}{0.0584}, & (\sum_{i=1}^{10} x_i = 5) \\ 0, & (\sum_{i=1}^{10} x_i \le 4) \end{cases}$$

とし(7-8)，

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \begin{cases} 1, & \text{（確率 } \psi(\boldsymbol{x})\text{ ）} \\ 0, & \text{（確率 } 1-\psi(\boldsymbol{x})\text{ ）} \end{cases}$$

とすれば，有意水準 0.05 の最強力検定が得られる．