# 2021 年度　数理科学特別講義 C, G
# 大阪府立大学
# 8 月 25 日 第 5 コマ

今野良彦

日本女子大学 理学部 数物科学科

2021 年 8 月 25 日

## 1.1 集合論の記号

- $\mathbb{N}$ 正の整数（自然数） 全体の集合.
- $\mathbb{Z}$ 整数全体の集合.
- $\mathbb{Q}$ 有理数全体の集合.
- $\mathbb{R}$ 実数全体の集合.
- 集合 $\Omega\ (\neq \emptyset)$ に対して,
  $2^{\Omega}$ : $\Omega$ の部分集合の全体から成る集合族. $\Omega$ の冪集合と
呼ぶ.
- $f$ が集合 $A$ から集合 $B$ への写像であることを

$$f : A \longrightarrow B$$

で表す.

・$A_1 \subset A$ に対して,

$$f(A_1) := \{f(x);\ x \in A_1\} \subset B$$

を $f$ による $A_1$ の像と呼ぶ.

・$B_1 \subset B$ に対して,

$$f^{-1}(B_1) := \{x \in A;\ f(x) \in B_1\} \subset A$$

を $f$ による $B_1$ の逆像と呼ぶ.

## 標本空間

　試行の結果と対応付けた現象 $\omega$ を根元事象（elementary event）または標本（sample）とよぶ. $\Omega$ を標本全体の集合とし, これを標本空間とよぶ.

例 1.1　コインを 1 回投げる試行を考える. その試行の結果は「表（head）」または「裏（tail）」のいずれかであるから

$$\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\} \quad \text{または } \Omega = \{H, T\}$$

とすればよい. □

例 1.2　選挙を行うとき, 1 人の候補者の得票率に対応する標本空間 $\Omega$ は

$$\Omega = \{p \in \mathbb{R};\ 0 \le p \le 1\} = [0, 1].$$

候補者が $n$ 人いた場合には, 投票結果を表す標本空間 $\Omega$ は

$$\Omega = \{(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [0, 1]^n;\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1\}.$$

例 1.3　ある株価の 1 年間の推移を区間 $[0, 1]$ 上の函数として表現することにして, 株価はどんな瞬間にも定まっていて, 連続的に変化すると仮定する. このとき, 1 年間の株価推移を表す標本空間 $\Omega$ を考えよう.
時刻 $t$ $(0 \le t \le 1)$ に対応する株価の標本空間を $\Omega_t = \mathbb{R}$ としてみよう. すると 1 年間の株価の標本空間 $\Omega$ は

$$\Omega = \Pi_{t\in[0,1]}\Omega_t$$

となる. これは非可算個の直積となり, 分かりにくいので, 株価の推移を線でつないだとき, それを $[0, 1]$ 上の連続関数とみなし,

$$\Omega = \{\omega = (\omega(t))_{t\in[0,1]};\ \omega \in C([0, 1])\}$$

と書ける. ただし, $C([0, 1])$ は $[0, 1]$ 上の連続函数全体を表す.

$D([0, 1]) = \{$ $[0, 1]$ 上の右連続, 左極限を持つような函数の全体$\}$

としてもよい.

## 事象と $\sigma$ 加法族

**定義 1.1** 標本空間 $\Omega$ の部分集合からなる族 $\mathcal{F}$ が以下の (1) ～ (3) をみたすとき, $\mathcal{F}$ を有限加法族という:
(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
(2) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し, $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$. ただし, $\Omega^c = \emptyset$ とする.
(3) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ ならば $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.
有限加法族 $\mathcal{F}$ がさらに次の (4) をみたすとき, $\mathcal{F}$ は $\sigma$ 加法族という.
(4) $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ならば, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. □

$\sigma$ 加法族 $\mathcal{F}$ は, 後で「確率」なるものを定義する集合族であり, このような $\mathcal{F}$ の元を事象（event）とよぶ.

**注意 1.1** 有限加法族の「有限」とは, 要素の数が有限であるということを意味するのでなく, **(3)** のように有限回の集合演算に関して閉じていることを意味し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \text{ ならば } \cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

である.
特に, $\mathcal{F}$ が有限個の要素しか持たないとき, $\mathcal{F}$ は自動的に $\sigma$ 加法族である. □

**定義 1.2**　標本空間 $\boldsymbol{\Omega}$ とその上の $\boldsymbol{\sigma}$ 加法族 $\mathcal{F}$ が与えられられたとき, この **2** つの組 $\boldsymbol{(\Omega, \mathcal{F})}$ を可測空間（measureble space）という. このとき, 事象（$\mathcal{F}$ の元）を特に可測集合（measurable set）という. □

## ボレル集合族

まず, $\Omega = \mathbb{R}$ とする. 区間の集合

$$\mathcal{I} = \{(a, b];\ a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\} \tag{1.1}$$

を考える. ただし, $b = \infty$ のときは, $(a, \infty)$ と解釈し, $a > b$ のときは, $(a, b] = \emptyset$ とする. これに対して

$$\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^{m} I_k;\ m \in \mathbb{R},\ I_i \cap I_j = \emptyset\,(1 \le i < j \le m),\ I_i, I_j \in \mathcal{I}\} \tag{1.2}$$

とおく. これは明らかに有限加法族である. このような $\mathcal{A}$ を区間塊という.

**定義 1.3** 標本空間 $\Omega$ の任意の部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して, $\sigma$ 加法族 $\mathcal{F}$ が以下の 2 条件をみたすとする.
**(i)** $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.
**(ii)** $\mathcal{A}$ を含む任意の $\sigma$ 加法族 $\mathcal{G}$ に対して

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}.$$

このとき, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ と書き, $\mathcal{A}$ を含む最小の $\sigma$ 加法族という. □

$\mathcal{A}$ を含む $\sigma$ 加法族全体の集合を $\Sigma(\mathcal{A})$ とすると

$$\sigma(\mathcal{A}) = \cap_{\mathcal{G}\in\Sigma(\mathcal{A})}\mathcal{G}$$

と書ける. $2^{\Omega}$ は明らかに $\mathcal{A}$ を含む $\sigma$ 集合族なので, $\Sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ である. また, $\sigma$ 加法族同士の積集合はまた $\sigma$ 加法族である. したがって, どんな部分集合族 $\mathcal{A}$ に対しても $\sigma(\mathcal{A})$ は存在して, 最小性より一意である.

　このようにして, (1.2) の $\mathcal{A}$ から作られる $\sigma(\mathcal{A})$ は $\mathbb{R}$ 上のボレル集合族といい,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{A})$$

と書く.

定理 1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$.

証明 $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ から

$$\sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{A}).$$

また, 任意の $A \in \mathcal{A}$ は区間の有限直和で表されるので, $A \in \sigma(\mathcal{I})$. したがって, $\sigma(\mathcal{I})$ は $\mathcal{A}$ を含む $\sigma$ 加法族. このとき, $\sigma(\mathcal{A})$ の最小性より

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{I}).$$

したがって,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{I}).$$

□

$\Omega = \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$ とする. $p$ 次元区間の集合族

$$\mathcal{I}_p := \{(a_1, b_1]\times(a_2, b_2]\times\cdots\times(a_p, b_p] : (a_i, b_i] \in \mathcal{I}\ (1 \le i \le p)\}$$

に対して $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) = \sigma(\mathcal{I}_p)$ を $p$ 次元ボレル集合族という.
こうして, $p$ 次元（ボレル）可測空間

$$(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$$

が得られる.

## 測度と確率

**定義 1.4** 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対して, $\mathcal{F}$ 上で定義された函数 $\mu$ が以下の性質をみたすとき, $\mu$ を 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度という：

(1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し,

$$0 \leq \mu(A) \leq \infty.$$

特に, $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が互いに排反（$A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$）ならば

$$\mu\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

また, これら $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ の組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間という. □

**定理 1.2** 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ について以下が成立する：

(1) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ が互いに排反ならば,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ について, $A_1 \subset A_2$ ならば,

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2).$$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ について,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(4) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

**(5)** $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr).$$

□

証明　原 (2017, pp. 16–17) を参照のこと.

**定義 1.5**　測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ について, 測度 $\mu$ が $\mu(\Omega) < \infty$ をみたすとき, $\mu$ は有限測度という.
また, $\mu(A_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$ であるような $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ で

$$\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$$

とかけるとき, $\mu$ は $\sigma$ 有限測度という. □

定義 1.6　測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において, $\mu(N) = 0$ であるような $N \in \mathcal{F}$ を零集合という. また, $\omega \in \Omega$ に依存する命題が, ある零集合 $N$ を除いた $\Omega \setminus N$ 上で成立しているとき, この命題は「ほとんど至るところ」で成立するといい, "a.e."(almost everywhere の略) と書き添える. □

定義 1.7　以下の条件をみたつ 3 つの組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とよび, その $\mathbb{P}$ を確率測度もしくは単にに確率という:
(1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は測度空間.
(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. □

注意 1.3　事象 $A \in \mathcal{F}$ の確率が 1 のとき, すなわち $\mathbb{P}(A) = 1$ となるとき, 事象 $A$ は「ほとんど確実に（almost surely）」に起こるといい, a.s. と記す.

例 1.4　空でない集合 $\Omega$ に対し, その冪集合 $2^{\Omega}$ を $\sigma$ 加法族にとる. 標本 $\omega_0 \in \Omega$ を 1 つ固定して, 測度 $\Delta_{\omega_0}$ を事象 $A \in 2^{\Omega}$ に対して

$$\Delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & (\omega_0 \in A), \\ 0 & (\omega_0 \notin A) \end{cases}$$

と定義する. このとき, 3 つの組 $(\Omega, 2^{\Omega}, \Delta_{\omega_0})$ は確率空間となる. この確率測度 $\Delta_{\omega_0}$ をディラック測度またはデルタ測度という.

## 測度の拡張

**定義 1.8** 空でない集合 $\Omega$ 上の有限加法族 $\mathcal{A}$ 上で定義される函数 $\mu$ が以下の性質をみたすとき, $\mu$ は $\Omega$ 上の有限加法的測度という:
(1) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$0 \leq \mu(A) \leq \infty.$$

特に, $\mu(\emptyset) = 0$.
(2) $A, B \in \mathcal{A}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

□

**定理 1.3**　空でない集合 $\Omega$ 上の有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度 $\mu^*$ から $\mathcal{A}$ で $\sigma$ 加法的であれば, $\sigma(\mathcal{A})$ 上の測度 $\mu$ に拡張できる. すなわち

$$\mu(A) = \mu^*(A) \qquad (\forall A \in \mathcal{A}).$$

さらに, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu^*)$ が $\sigma$ 有限ならば, この拡張された測度 $\mu$ は一意である.

**証明**　吉田 (2021, pp.100–104) を参照のこと. 存在を示すのは容易ではない. □

定理 1.3 を用いると, スティルチェス測度を定義することができる. $I = (a, b] \cap \mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ とし,

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$

は右連続かつ非減少とする. 次のようにして, $\varphi$ の定義域を $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に拡張しておく:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(a+) & (t \leq a), \\ \varphi(b) & (t < \infty \text{ かつ } b < t), \\ \varphi(\infty-) & (t = b = \infty). \end{cases}$$

ただし, $\varphi(t+) = \lim_{s \searrow t} \varphi(s)$, $\varphi(t-) = \lim_{s \nearrow t} \varphi(s)$.
ここで, $\mathcal{B}(I) := \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap I$ とおく.

定理 1.4　測度 $\mu : \mathcal{B}(I) \to [0, \infty)$ で

$$a \leq s \leq t \leq b$$

ならば,

$$\mu((s, t] \cap \mathbb{R}) = \varphi(t) - \varphi(s)$$

をみたすものが唯一存在する. この $\mu$ をスティルチェス測度という.

証明　吉田（2021. pp. 95–97）を参照のこと. □

## 測度空間の完備化とルベーグ測度

定理 1.4 より, 可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度 $m^*$ で, 任意の $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し,

$$m^*((a, b]) = b - a$$

となるものが一意に存在する. この $m^*$ をボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上のルベーグ測度とよぶ.

**定義 1.9** 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の零集合の部分集合が常に可測であるとき, この測度空間を完備という. □

**定理 1.5** 完備ではない測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ に対し, $\mathcal{F}^*$ に任意の $\mu^*$ 零集合 $N$ の任意の部分集合 $Z$ をすべて追加した集合族を含む最小の $\sigma$ 加法族 $\mathcal{F}$ を考える. すなわち,

$$\mathcal{F} = \sigma[\{B \cup Z;\ B \in \mathcal{F}^*,\ Z \subset N \in \mathcal{F}^*,\ \mu^*(N) = 0\}]$$

としたとき,

$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega;\ B_1, B_2 \in \mathcal{F}^*$ で $B_1 \subset A \subset B_2,\ \mu^*(B_2 \backslash B_1) = 0$ となるもの

となる. このとき, $B_1 \subset A \subset B_2$ ($A \in \mathcal{F}$ かつ $B_1, B_2 \in \mathcal{F}^*$) で $\mu^*(B_2 \setminus B_1) = 0$ に対し

$$\mu(A) = \mu^*(B_1)$$

とすると, $\mu$ は $\mu^*$ の $\mathcal{F}$ 上への拡張した測度となる. よって, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は完備な測度空間となる.

**証明** 吉田 (2021, p.72) を参照のこと. $\square$

注意 1.4　$\mu^*$ が $\sigma$ 有限ならば, $\mu$ は一意. □

定義 1.10　$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \{A \subset \Omega;\ B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ で } B_1 \subset A \subset B_2,\ m^*(B_2 \setminus B_1) = 0 \text{ なるものが存在} \}$$

とし, $A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ に対し

$$m(A) = m^*(B_1)$$

とおく. 測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m^*)$ を完備化した $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, m)$ をルベーグ測度空間といい, $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ をルベーグ可測集合族, その要素をルベーグ可測集合, 測度 $m$ をルベーグ測度という. □

**注意 1.4**

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \subsetneq \mathbf{2}^{\mathbb{R}}$$

である. 証明は吉田（2021, p. 76–77）を参照のこと.

## 確率変数

定義 2.1　可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ に対し, 函数 $f: \Omega \to \mathcal{X}$ が可測（$\mathcal{F}$ 可測）であるとは, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$f^{-1}(A) := \{x \in \Omega;\ f(x) \in A\}$$

が $\mathcal{F}$ の属することである. □

定義 2.2 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ と可測空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ に対し, $\Omega$ 上で定義された函数 $X: \Omega \to \mathcal{X}$ が $\mathcal{F}$ 可測であるとき, $X$ は確率変数という. □

定義 2.3 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し, $\Omega$ 上で定義された実数値函数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{F}$ 可測であるとは, 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し

$$\{x \in \Omega;\ f(x) \leq r\} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

となることである. また, この $f$ を $\mathcal{F}$ 可測函数であるともいう. □

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の実数値函数 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ について, 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le r\} \in \mathcal{F} \tag{2}$$

をみたすとき, $X$ を（実数値）確率変数という.

$\boxed{\text{注意 2.1}}$ (1) や (2) より, 任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し,

$$\{x \in \Omega;\ f(x) \in B\} \in \mathcal{F}$$

を導くことができる.
$\{x \in \Omega;\ f(x) \le r\}$ を $\{f(x) \le r\}$ のように略記すれば,

$$\{f(x) > r\} = \{f(x) \le r\}^c \in \mathcal{F},$$
$$\{f(x) < r\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{f(x) \le r - \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F},$$
$$\{f(x) = r\} = \{f(x) \le r\} \cap \{f(x) < r\}^c \in \mathcal{F},$$
$$\{f(x) \in (a, b)\} = \{f(x) \le a\}^c \cap \{f(x) < b\} \in \mathcal{F}$$

などよりわかる. $\square$

定義 2.4 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された, 可測空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ に値をとる確率変数 $X : \Omega \to \mathcal{X}$ に対し, 集合族

$$\{X^{-1}(A);\ A \in \mathcal{A}\} = \{\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in A\};\ X \in \mathcal{A}\}$$

を確率変数 $X$ から生成される集合族という.
また,

$$\sigma[X] := \sigma(\{X^{-1}(A);\ A \in \mathcal{A}\})$$

を確率変数 $X$ から生成される $\sigma$ 加法族という. □

注意 2.2 明らかに

$$\sigma[X] \subset \mathcal{F}$$

である. □

## 分布と分布函数

$X$ が実数値確率変数ならば, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, 事象 $\{X \in B\}$ は $\mathcal{F}$ の元である. これによって, 函数 $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ を

$$P(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

で定めると, $P(\mathbb{R}) = 1$ であり, さらに $P$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で定義された確率測度となる. したがって, $P$ は写像 $X$ によって可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上に誘導された確率測度といえる. こうして $X$ によってその値域上に導かれた集合函数 $P$ のことを $X$ の確率分布または $X$ の分布という.

定義 2.5 実数値確率変数 $X$ が与えられたとき, その分布 $P$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$F(x) := P((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の函数 $F$ を $X$ の分布函数という.

定理 2.1 実数値確率変数 $X$ の分布 $P$ と分布函数 $F$ に対して, 以下が成り立つ:

(i) $F$ は非減少函数. すなわち, 任意の $x < y$ に対して,

$$F(x) \leq F(y).$$

(ii) $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ かつ
$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

(iii) $F$ は右連続函数. すなわち, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{y\searrow x} F(y) = F(x).$$

(iv) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$P(\{x\}) = F(x) - F(x-).$$

ただし, $F(x-) = \lim_{y\nearrow x} F(y)$.

(v) $F$ の不連続点は高々可算個.

証明 原（2019, p.30）を参照のこと.

定理 2.2 定理 2.1 の (i)–(iii) をみたす $\mathbb{R}$ 上の函数 $F$ が与えられたとき, 以下の (a), (b) が成り立つ:
(a) $F(x) = P((-\infty, x])$ $(x \in \mathbb{R})$ をみたす $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 $P$ が一意に定まる.
(b) 適当な確率空間とその上の確率変数 $X$ をとって, その分布函数が $F$ となるようにできる.

証明 (a) は定理 1.4 からわかる. 先週のスライドで定めた区間塊 $\mathcal{A}$ は有限加法族である. $\mathcal{A}$ の元 $\cup_{k=1}^{m}(a_k, b_k] \in \mathcal{A}$ $(a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, m)$ に対して

$$P_F\left(\bigcup_{k=1}^{m}(a_k, b_k]\right) = \sum_{k=1}^{m}\{F(b_k) - F(a_k)\}$$

として, $P_F$ を定めると, $P_F$ は $\mathcal{A}$ 上の有限加法的な確率測度であるので, 定理 1.3 より $P_F$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度に拡張できる. これは一意的である.

(b) (a) において $F$ によって定まる確率 $P_F$ を用いて, 確率空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_F)$ を考え

$$X(\omega) = \omega \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

とする. よって, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定める. その分布函数は, $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$P_F(\{\omega \in \mathbb{R};\ X(\omega) \le x\}) = P_F((-\infty, x]) = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

したがって, この $X$ が求めたかった確率変数である. □

注意 2.3 分布 $P_F$ と分布函数 $F$ は 1 対 1 対応するので, 言葉を乱用して, 「確率変数 $X$ の分布は $F$ である」のように言うことにする. □

**定義 2.6** $X$ を実数値確率変数とし, $F$ を $X$ の分布函数とする.
(i) 高々可算な集合 $S \subset \mathbb{R}$ があって, $\mathbb{P}(X \in S) = 1$ となるとき, $X$ は離散型という. 特に,

$$S = \{s_1, s_2, \ldots\}$$

のとき, 分布函数 $F$ は次のように書ける:

$$F(x) = \sum_{i:\, s_i \leq x} p(s_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(s_i) \mathbb{1}_{\{s_i \leq x\}}.$$

ただし,

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & (\text{命題 } A \text{ が真}) \\ 0 & (\text{命題 } A \text{ が偽}) \end{cases}$$

で, $p(s) = \mathbb{P}(X = s)$ である. この

$$p : S \to [0, 1]$$

を確率函数という.

## (ii)

分布函数 $F$ が $\mathbb{R}$ 上で連続のとき, $X$ は連続型という. 特に, ある非負値函数 $f$ で

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

となるものを用いて

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbb{1}_{\{t \le x\}}\,dt$$

と書けるとき, $F$ は絶対連続型という. 上の積分はリーマン積分の意味でよい. この $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を分布 $F$ の確率密度函数という. □

$a \in \mathbb{R}$ を固定する. 函数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X(\omega) = a \in \mathbb{R} \qquad (\omega \in \Omega)$$

のように定めると, $X$ は確率変数となる. このような $X$ の分布函数を $\Delta_a$ と書けば（例 1.4 とは異なるものを同じ記号を使う乱用をしている）,

$$\Delta_a(x) = \mathbb{1}_{\{a \le x\}} = \begin{cases} 1 & (x \ge a), \\ 0 & (x < a) \end{cases}$$

となる. 分布函数 $\Delta_a$ に対応する確率測度をディラック測度といい, 記号を乱用して, それを $\Delta_a$ と書けば,

$$\Delta_a(B) = \mathbb{1}_{\{a \in B\}} \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

となる.

## ルベーグ積分の定義

**定義 2.7** 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上で定義された実数値函数で, 可測集合 $B \in \mathcal{F}$ に対し, 以下のように定義されたものを集合 $B$ の定義函数といい, $\mathbb{1}_B(x)$ のように書く.

$$\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin B), \\ 1 & (x \in B). \end{cases}$$

□

注意 2.4 実数 $r < 0$ に対して,

$$\{\mathbb{1}_B(x) \leq r\} = \emptyset.$$

実数 $0 \leq r < 1$ に対し,

$$\{\mathbb{1}_B(x) \leq r\} = \{\mathbb{1}_B(x) = 0\} = B^c.$$

$r \geq 1$ に対し,

$$\{\mathbb{1}_B(x) \leq r\} = \{\mathbb{1}_B(x) = 1\} \bigcup \{\mathbb{1}_B(x) = 0\} = \Omega.$$

よって, 定義函数 $\mathbb{1}_B$ は可測. □

定義 2.8 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上で定義された実数値函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が, 有限個の値 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ と互いに排反な可算集合 $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathscr{F}$ を用いて, 以下のように書けるとき, $f$ は単函数という:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbb{1}_{B_j}(x).$$

□

注意 2.5 単函数 $f$ も可測. 一般性を失うことなく, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ とできる. このとき, $r < b_1$ のとき,

$$\{f(x) \leq r\} = \emptyset.$$

$\sum_{j=1}^{\ell} b_j \leq r < \sum_{j=1}^{\ell+1} b_j \ (\ell = 1, \ldots, n-1)$ のとき,

$$\{f(x) \leq r\} = \cup_{j=1}^{\ell} B_j.$$

$r \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$ のとき,

$$\{f(x) \leq r\} = \Omega$$

から $f$ の可測性がわかる.

定義 2.9 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の単函数

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbb{1}_{B_j}(x) \qquad (b_j \in \mathbb{R},\ B_j \in \mathcal{F})$$

に対し, その積分を以下で定義する.

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j).$$

□

定理 2.3 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の 2 つの単函数 $f, g$ と任意の実数 $a, b$ について, 以下が成立する:

$$\int_\Omega \{af(x)+bg(x)\}\,d\mu(x) = a\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) + b\int_\Omega g(x)\,d\mu(x).$$

証明 やさしい.

□

定理 2.4 測度空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上の非負値可測函数 $f : \Omega \to [0, \infty)$ に対し, 各点 $x \in \Omega$ で広義単調増加に $f(x)$ に収束するような, 非負値単函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する.

証明 $n \in \mathbb{N}$ とし, $b_j = j/2^n$ $(j = 0, 1, \ldots, n2^n)$ とおき, $[0, \infty)$ を次のように分割する:

$$[0, \infty) = [0, b_0) \cup \left\{\cup_{j=1}^{n2^n} [b_{j-1}, b_j)\right\} \cup [n, \infty).$$

函数 $f_n$ を次のように定める:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{j-1}{2^n} & \left(\dfrac{j-1}{2^n} \le f(x) < \dfrac{j}{2^n},\ j = 1, 2, \ldots, n2^n\right), \\ n & (f(x) \ge n). \end{cases}$$

すなわち,

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} b_{j-1} \mathbb{1}_{\{b_{j-1} \le f(x) < b_j\}}(x) + n \mathbb{1}_{\{f(x) \ge n\}}(x).$$

各 $n$ に対して，

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

さらに，$f(x) < n$ において，

$$f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

であり，$f(x) \geq n$ において，$f_n(x) = n$ だから，$n \to \infty$ のとき，$f_n(x)$ は $f(x)$ に収束．

□

定義 2.10 測度空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上で定義された非負値可測函数 $f$ に対して，ともに各点 $x$ で，広義単調増加し，$f(x)$ に収束する非負値単函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとり，それらの積分の $n \to \infty$ の極限（$+\infty$ も含めて）で $f$ の積分を定義する．すなわち，

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu(x).$$

□

定理 2.5 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上で定義された各点で広義単調増加する非負値単函数の列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, 各点 $x \in \Omega$ で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(x)\, d\mu(x)$$

証明 証明は略. □

次に, 一般の可測函数 $f$ に対して, 以下のように積分を定義する.

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \max\{f(x), 0\}, \\ f_-(x) &= -\min\{f(x), 0\} \end{aligned}$$

と定める. ただし, **max** は **2** つの値の小さくない方, **min** は **2** つの値の大きくない方である.

$f_+$, $f_-$ はどちらも非負値函数で可測. また,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

である.

定義 2.11 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上の実数値可測函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して, その絶対値の積分が有限, すなわち,

$$\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = \int_\Omega \{f^+(x) + f^-(x)\}\, d\mu(x) < \infty$$

ならば, $f$ は $\mu$ 可積分（または, 単に可積分）であるという. □

**定義 2.12** 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上の実数値可測函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可積分であるとき, その積分を

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega f_+(x)\, d\mu(x) - \int_\Omega f_-(x)\, d\mu(x)$$

で定義する. ならば, $f$ は $\mu$ 可積分であるという. □

**定理 2.6** 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上の実数値可測函数 $f, g$ が可積分ならば, 実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について, $af + bg$ が可積分であって,

$$\int_\Omega \{af(x) + bg(x)\}\, d\mu(x) = a \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) + b \int_\Omega g(x)\, d\mu(x)$$

が成り立つ. また, $x \in \Omega$ について, $f(x) \leq g(x)$ ならば,

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) \leq \int_\Omega g(x)\, d\mu(x).$$

**証明** 証明は略. □

記号　ある可測集合 $B \in \mathcal{F}$ 上でだけ積分するという記号を下記のように記す:

$$\int_B f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega \mathbb{1}_B(x) f(x)\,d\mu(x).$$

定理 2.7 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の非負値可測函数 $f$ と可測集合 $N \in \mathcal{F}$ について

$$\int_N f(x)\,d\mu(x) = 0$$

ならば, $f$ は集合 $N$ のいたるところで $0$ である. すなわち,

$$\mu(\{x \in N;\ f(x) \neq 0\}) = 0.$$

証明 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n := \{x \in B;\ f(x) > n^{-1}\}$ とおけば, $B_n$ も可測. また, $B_n \subset B$ だから

$$\mathbb{1}_{B_n}(x) \leq \mathbb{1}_B(x).$$

これに注意すれば, 定理 2.6 より,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_B f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega 1\!\!1_B(x) f(x)\,d\mu(x) \\ &\geq \int_\Omega 1\!\!1_{B_n}(x) f(x)\,d\mu(x) = \int_{B_n} f(x)\,d\mu(x) \geq \frac{1}{n}\int_{B_n} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{n}\mu(B_n) \geq 0. \end{aligned}$$

よって, 任意の $n$ について $\mu(B_n) = 0$.
一方,

$$\{x \in B : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

とかけるから, 定理 1.3(3) より,

$$\mu(\{x \in B;\ f(x) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0.$$

## 期待値

定義 2.13　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の実数値確率変数 $X$ が $\mathbb{P}$ 可積分であるとき,

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

と書いて, $\mathbb{E}[X]$ を $X$ の期待値という.
$X$ が $\mathbb{P}$ 可積分でないときには, 期待値を持たないという. □

記法 可測集合 $B \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X : B] &= \mathbb{E}[1_B(X)X] = \int_\Omega 1_B(\omega)X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega),\\ \mathbb{E}[1 : B] &= \mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{定理 2.8}}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の実数値確率変数 $X, Y$ について, 以下が成立する:

(i) $X, Y$ がそれぞれ期待値をもつならば, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し.

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

(ii) ほとんど確実に $X \leq Y$ ならば,

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y].$$

$\boxed{\text{証明}}$ 定理 2.6 による. □