2021 年度　数理科学特別講義 C, G
大阪府立大学
8 月 26 日 第 4 コマ

今野良彦

日本女子大学 理学部 数物科学科

2021 年 8 月 26 日

内容

(1) 古典的な Glivenko-Catelli の定理

(2) 計量エントロピー

ブラケットなし・ブラケットあり

(3) 関数族で添字付けれた経験過程に対する Glivenko-Cantelli の定理

記号

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: 確率空間

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ は確率変数で、

$$P(B) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B) \quad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = P((-\infty, x]) \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R}).$$

$X_1, \ldots, X_n$ は X の独立複製.

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i) \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R})$$

$$P_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i), \quad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$\hat{F}_n(x) = P_n((-\infty, x]).$$

定理9.1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty)$$

すなわち，$\delta>0$に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \geq \delta \right) = 0.$$

証明　関数 $\mathbb{R}\ni x \longmapsto F(x) \in [0,1]$ は連続の場合で示す。$\forall r\in\mathbb{R}$に対し，

$$|\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(x) - F(r)| \leq 1, \quad (x\in\mathbb{R})$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty,r]}(X) - F(r)] = 0.$$

ヘフディング条件をみたすので、系8.3より

各 $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\mathbb{P}\left(|\hat{F}_n(x) - F(x)| \geq \sqrt{\frac{2t}{n}} \right) \leq 2e^{-t} \quad (t>0). \tag{a}$$

います、$0 < \delta < 1$ に対して、

$a_0 < a_1 < \cdots < a_N$ を

$$F(a_j) - F(a_{j-1}) = \delta \quad (j=1, \cdots, N)$$

となるように取る。すると

$$N \leq 1 + \frac{1}{\delta}$$

となる。

No.4

$x \in (a_{j-1}, a_j]$ $(j=1,\dots,N)$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \le \max_{1\le j\le N} |\hat{F}_n(a_j) - F(a_j)| + \delta.$$

(b)

系 8.4 より, $t>0$ に対し,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le N} |\hat{F}_n(a_j) - F(a_j)| \ge \sqrt{\frac{2(t+\log N)}{n}}\right) \le 2e^{-t}$$

(c)

ここで,

$$t = \frac{n\delta^2}{4}$$

とし, nを十分大きく取ると

$$n > \frac{4}{\delta^2}\log N \Rightarrow \sqrt{\frac{2(t+\log N)}{n}} \le \delta.$$

(c)とこのことより，$n \geq \frac{4}{\delta^2}\log N$ のとき，　　　No. 5

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N}|\hat{F}_n(a_j)-F(a_j)|\geq \delta\right)\leq 2\exp\left(-\frac{n\delta^2}{4}\right)$$

(b)と上の式より，

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\hat{F}_n(x)-F(x)|\geq 2\delta\right)\leq 2\exp\left(-\frac{n\delta^2}{4}\right).$$

$\boxtimes$

注意 9.1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{a.s.} 0 \quad (n\to\infty) \qquad (d)$$

を

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty)$$

から示す必要がある。これはリバースマルチンゲールの議論を用いると確認ができる。

また、各 $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$|\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{a.s.} 0 \quad (n\to\infty)$$

を示して、(b)を用いれば、(d)はわかる。 □

距離空間

Mを空でない集合とし、

$$d_M : M \times M \ni (a, b) \mapsto d_M(a, b) \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

は次の条件を考える：$\forall a, b, c \in M$に対し、

(1a) $d_M(a, a) = 0 \quad (\forall a \in M)$.

(1b) $d_M(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

(2) $d_M(a, b) = d_M(b, a)$

(3) $d_M(a, c) \leq d_M(a, b) + d_M(b, c)$.

(1a), (1b), (2), (3)をみたせば、距離空間。

(1a), (2), (3)をみたせば、準距離空間。

定義9.1 (準)距離空間 (M, d_M) の空でない部分集合 S を考える。$^\forall \delta > 0$ に対して

$$N(\delta, S, \|\cdot\|_M) \qquad \left(\|a\|_M^2 = d_M(a, a) \right)$$

を S を覆うために必要な δ 球の最小個数とする。

そのようなものが有限個でないときは、$N(\delta, S, \|\cdot\|_M) = \infty$ とする。さらに、S の計量エントロピーを

$$H(\delta, S, \|\cdot\|_M) = \log N(\delta, S, \|\cdot\|_M)$$

で定める。

例 9.1　$(\mathbb{R}^p, d_{\sup})$を考える．ただし，

$$d_{\sup}(\underline{x}, \underline{y}) = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j - y_j|, \quad \|\underline{x}\|_{\sup}^2 = d_{\sup}(\underline{x}, \underline{x})$$

$$\underline{x}^T = (x_1, \ldots, x_p); \quad \underline{y}^T = (y_1, \ldots, y_p).$$

$S = [-1, 1]^p$とする．このとき，$\delta > 0$に対して

$$N(\delta, S, \|\cdot\|_{\sup}) \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^p$$

がわかる．よって，

$$H(\delta, S, \|\cdot\|_{\sup}) \leq p \log\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

記号

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$：確率空間

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ は実数値確率変数で

$P = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ とする。すなわち、

$$P(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B) \quad ({}^{\forall}B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

$p \geq 1$ に対し、

$$L^p(P) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ g \text{ は可測で, } P|g|^p < \infty\}$$

（完備化した後のもの）.

$$\|g\|_{L^p(P)} := \{P|g|^p\}^{1/p} \quad (g \in L^p(P))$$

$$L^\infty := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ g \text{ は可測で、} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| < \infty \}$$

$$\|g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| .$$

定義 9.2　$p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ とする．函数族 $\mathcal{G} \subseteq L^p(P)$ を考える．（$L^\infty(P) = L^\infty$ のこと）．N を自然数とし，$\forall \delta > 0$ に対して，

$$\{[g_j^L, g_j^U]\}_{j=1}^N \subset L^p(P)$$

は次の条件をみたすものとする：

(1) $j = 1, 2, \ldots, N$ に対して，

$$g_j^L(x) \leq g_j^U(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ かつ } \|g_j^U - g_j^L\|_{L^p(P)} \leq \delta.$$

(2) $\forall g \in \mathcal{G}$ に対して，ある $j \in \{1, \ldots, N\}$ が存在して

$$g_j^L(x) \leq g(x) \leq g_j^U(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\{[g_j^L, g_j^U]\}$ を函数族 $\mathcal{G}$ に対する δ ブラケット集合とよぶ．

そして，$\mathcal{G}$ のブラケット付き被覆数を

$$N_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^p(P)}) := \min\{N ; \{[g_j^L, g_j^U]\}_{j=1}^N \text{ は}$$

関数族 $\mathcal{G}$ の δ ブラケット集合$\}$.

で定める．ブラケット付き計量エントロピーを

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^p(P)}) = \log N_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^p(P)}).$$

注意 9.3　$p \geq 1$ と $\delta > 0$ に対して

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^p(P)}) \leq H_B(2\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_\infty)$$

$\because$) $\|g_j^U - g_j^L\|_{L^p(P)} \leq 2\|g\|_\infty$.

例 9.2: $L>0$, $[0,1] \subset \mathbb{R}$ とする.

$$\mathcal{G} := \{ g : (0,1] \to \mathbb{R} ;\ |g(x) - g(x')| \leq L|x - x'| \ (\forall x, x' \in (0,1]) \}$$

とする. このとき, $\delta > 0$ に対し,

$$H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_\infty) \leq \log\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta} \log 7.$$

例 9.3　$p \geq 1$ とする.

$$\mathcal{G} = \{ \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{1}_{(-\infty, r]}(t) \in \{0, 1\} ; r \in \mathbb{R} \}$$

とする. このとき, $0 \leq \delta < 1$ に対し

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^p(P)}) \leq p \log\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

また, $0 < \delta < 1$ に対し

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_\infty) = \infty.$$

補題9.1　$K>0$とする。$0<\delta<1$に対して　No.16

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^1(P)})<\infty, \quad \sup_{g\in\mathcal{G}}\|g\|_\infty<K$$

とする。このとき

$$\|P_n-P\|_{\mathcal{G}} := \sup_{g\in\mathcal{G}}|(P_n-P)g| \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty)$$

証明　$\delta>0$に対し、

$$N=N_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^1(P)})$$

とし、

$$\{[g_j^L, g_j^U]\}_{j=1}^N$$

は$\mathcal{G}$のブラケット集合とする。

すると

$$A := \max\left\{ \left(\max_{1\le j\le N} |(P_n - P) g_j^L| \right), \left(\max_{1\le j\le N} |(P_n - P) g_j^U| \right) \right\}$$

$$\xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty). \qquad \text{(a)}$$

さらに、$^\forall g \in \mathcal{G}$ に対して、$^\exists j \in \{1, \dots, N\}$ に対して

$$g_j^L(x) \le g(x) \le g_j^U(x) \ (x\in\mathbb{R}),\ P|g^L - g^U| \le \delta$$

なので、

$$|(P_n - P) g| \le \max\{|(P_n - P) g_j^L|, |(P_n - P) g_j^U|\} + \delta$$

(b)

(b) より

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} |(P_n - P)g| \leq A + \delta.$$

2N 個

となる．$\{g_1^L - Pg_1^L, \ldots, g_N^L - Pg_N^L, g_1^U - Pg_1^U, \ldots, g_N^U - Pg_N^U\}$ はヘフディン条件をみたすので，$t>0$ に対し

$$\mathbb{P}\left(A \geq K\sqrt{\frac{2\{t+\log(2N)\}}{n}}\right) \leq 2e^{-t}. \quad (c)$$

ただし，

$$\max_{j=1,\ldots,N}\{|g_j^U - Pg_j^U|, |g_j^L - Pg_j^L|\} \leq K$$

である．

ここで

$$t = \frac{n\delta^2}{4k^2}$$

とおき、

$$n \geq \frac{4k^2}{\delta^2}\log(2N) \quad \curvearrowright \quad k\sqrt{\frac{2\{t+\log(2N)\}}{n}} \leq \delta$$

に対して、(c) より

$$\mathbb{P}(A \geq \delta) \leq \mathbb{P}\left(A \geq k\sqrt{\frac{2\{t+\log(2N)\}}{n}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\delta^2}{4k^2}\right)$$

これと (b) より

$$\mathbb{P}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}} |(P_n - P)g| \geq 2\delta\right)$$

$$\leq \mathbb{P}(A \geq \delta) \leq 2\exp\left(-\frac{n\delta^2}{4k^2}\right) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

□

No.20

<u>定理 11.1:</u> $K>0$ として,

$$\|g\|_\infty < K \quad (\forall g \in \mathcal{G})$$

とする. さらに, $\delta>0$ に対して,

$$\frac{1}{n} H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^p(P_n)}) \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty).$$

このとき,

$$\|P_n - P\|_{\mathcal{G}} = \sup_{g\in\mathcal{G}} |(P_n - P)g| \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty).$$

定理11.2:

$$G(x) := \sup_{g \in \mathcal{S}} |g(x)| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とし,

$$G \in L^1(P)$$

を仮定する. $\delta > 0$ に対し,

$$\frac{1}{n} H(\delta, \mathcal{S}, \|\cdot\|_{L^1(P_n)}) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

のとき,

$$\|P_n - P\|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to \infty).$$