$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$：確率空間

$(\mathcal{X}, \mathcal{T})$：位相空間

$\mathcal{B}(\mathcal{X})$：$\mathcal{T}$を含む最小のσ加法族

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{T})$$

$X: \Omega \to \mathcal{X}$は確率要素 $\Leftrightarrow$ すなわち，$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$に対し

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

$\Omega \to \mathcal{X}$

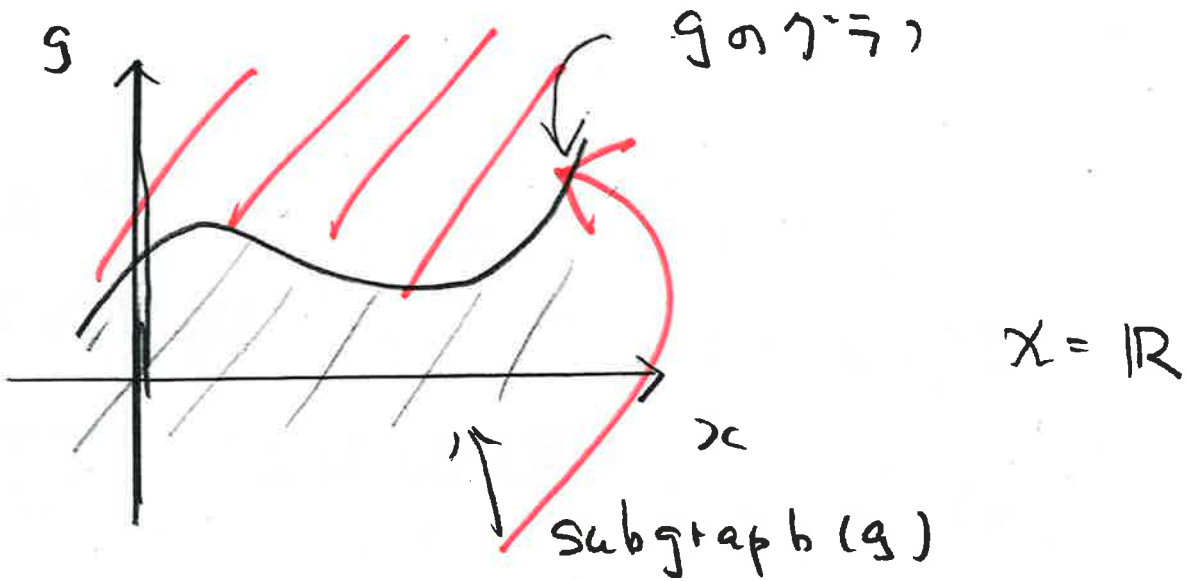
$$P(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B)$$

$P = \mathbb{P} \circ X^{-1}$である．

$(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), P)$：$X$によって誘導された確率空間

定義 11.5 関数 $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ のサブグラフとは

$$\mathrm{subgraph}(g) := \{ (x, t) \in X \times \mathbb{R} : g(x) \geq t \}$$



g は凹 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{subgraph}(g)$ は凹

CLTの復習

$Z_1, \dots, Z_n$: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された i.i.d. 確率変数列

で, $E[Z_i] = \mu$, $V[Z_i] = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$

$(i = 1, \dots, n)$.

いま

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n)$$

$$X_n = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{Z}_n - \mu)}{\sigma}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

任意の有界連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について

$$\lim_{n \to \infty} E[h(X_n)] = E[h(X)].$$

有限個の $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{G}$ に対して.

$$\begin{pmatrix} \nu_n(g_1) \\ \vdots \\ \nu_n(g_p) \end{pmatrix} \longrightarrow N_p(0, \Sigma_{g_1,\dots,g_p})$$

連絡する

$$\Sigma_{g_1,\dots,g_p} = (\sigma(g_i, g_j))_{i,j=1,\dots,p}.$$

定義. 13.3 ν は可測数族 $\mathcal{G}$ で添え字付けられた確率過程とする. 各 $p \in \mathbb{N}$ と各 $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{G}$ に対して

$$(\nu(g_1), \dots, \nu(g_p))^T \sim N_p(0, \Sigma_{g_1,\dots,g_r}).$$

のとき ν は $\mathcal{G}$ で添え字付けられた P ブラウン橋という.

古典的経験過程

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: 確率空間

$X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数

$X_1, \dots, X_n$: X の独立複製

$P = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, $F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = P((-\infty, x])$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$$

$$\mathcal{G} = \{ \mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(t) \in \{0, 1\} \ ; \ x \in \mathbb{R} \}.$$

すると,

$$\nu_n(g_x) = \hat{F}_n(x) \qquad (\forall g_x = \mathbb{1}_{(-\infty, x]})$$

$\to \sqrt{n}\, \| \hat{F}_n(x) - F(x) \|$

$\mathcal{G}$ は VC 族であり, 包絡函数 $G = 1$ は $L^2(P)$ に含まれるので, $\mathcal{G}$ はドンスカー族