2021 年度　数理科学特別講義 C, G
大阪府立大学
8 月 27 日 第 4 コマ

今野良彦

日本女子大学 理学部 数物科学科

2021 年 8 月 27 日

経験過程理論に関するまとめ

記号の復習

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: 確率空間.
(2) $p \in \mathbb{N}$ とし, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$: 確率変数. $|\cdot|$ は Euclid ノルム.
(3) $P := \mathbb{P} \circ X^{-1}$.
(4) $X_1, X_2, , \ldots, X_n$: X の独立複製.
(5)

$$P_n(B) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i) \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)).$$

ただし, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ は $\mathbb{R}^p$ 上のボレル集合族.
(6) $\mathcal{G} := \{g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R};\ g$ は可測函数 $\}$.
(7) 函数族 $\mathcal{G}$ で添字付られた経験過程

$$\{(P_n - P)g;\ g \in \mathcal{G}\}.$$

ただし,

$$(P_n - P)g := P_n g - Pg := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \int_{\mathbb{R}^p} g(x)\, dP(x).$$

(8) $r \geq 1$ または $r = \infty$ とする.

$$L^r(P) := \{g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R};\ \|g\|_{L(P)}^r := P|g|^r < \infty\},$$
$$L^\infty := \{g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R};\ \sup_{x\in\mathbb{R}^p} |g| < \infty\}.$$

記号を乱用して, $L^\infty(P)$ を L^∞ を とみなす.
函数族 $\mathcal{G} \subset L^r(P)$ を考える. 任意の $\delta > 0$ に対して, $N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)}) =: N$ を $\mathcal{G}$ を覆うために必要な δ 球の最小個数とする. すなわち, $N \in \mathbb{N}$ と $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\} \subset \mathcal{G}$ があって,

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\delta(g_j), \quad B_\delta(g) := \{g' \in \mathcal{G};\ \|g' - g\|_{L^r(P)} < \delta\}.$$

さらに,

$$H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)}) := \log N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)})$$

を計量エントロピーという.

(9) 函数族 $\mathcal{G} \subset L^r(P)$ を考える. N を自然数とし, 任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\{[g_j^L, g_j^U]\}_{j=1}^N \subset L^r(P)$$

を次の条件をみたすものとする:

(9a) $j = 1, 2, \ldots, N$ に対して,

$$g_j^L(x) \leq g_j^U(x)(x \in \mathbb{R}^p) \quad \text{かつ} \quad \|g_j^U - g_j^L\|_{L^r(P)} \leq \delta.$$

(9b) 任意の $g \in \mathcal{G}$ に対して, ある $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ が存在して,

$$g_j^L(x) \leq g(x) \leq g_j^U(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^p).$$

$\{[g_j^L, g_j^U]\}_{j=1}^N$ を函数族 $\mathcal{G}$ に対する δ ブラケット集合とよぶ.

ブラケット付き被覆数を

$$N_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)}) := \min\{N \in \mathbb{N};\ \{[g_j^L, g_j^U]\}_{j=1}^N\}$$

ブラケット付き計量エントロピーを

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)}) := \log N_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)})$$

で定める.

(10) $\mathbb{R}^p$ の部分集合族 $\mathcal{D}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mathrm{VC}^{\mathcal{D}}(n) := \sup\{\Delta^{\mathcal{D}}(x_1, x_2, , \ldots, x_n);\ x_1, x_2, , \ldots, x_n \in \mathbb{R}^p\}.$$

ただし,

$$\Delta^{\mathcal{D}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \#\{D \cap \{x_1, x_2, , \ldots, x_n\};\ \forall D \in \mathcal{D}\} \leq 2^n.$$

(11) $\mathbb{R}^p$ の部分集合族 $\mathcal{D}$ の VC 次元.

$$\mathrm{VC}^{\mathcal{D}} := \inf\{n \in \mathbb{N};\ \mathrm{VC}^{\mathcal{D}}(n) < 2^n\}.$$

そのような n がない時には, $\mathrm{VC}^{\mathcal{D}} = \infty$ と定める.

(12) $g \in \mathcal{G}$ に対して,

$$\mathrm{subgraph}(g) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R};\ g(x) \geq t\} \subset \mathbb{R}^{p+1}.$$

(13) 函数族 $\mathcal{G}$ に対して, $\mathcal{D} = \{\mathrm{subgraph(g)};\ g \in \mathcal{G}\}$ として, $\mathrm{VC}^{\mathcal{G}}$ を定義する.

(14) $G(x) := \sup_{g \in \mathcal{G}} |g(x)|\ (x \in \mathbb{R}^p)$.

(15) $\nu_n(g) := \sqrt{n}(P_n - P)g;\ (g \in \mathcal{G})$.

(16) $\ell^\infty(\mathcal{G}) := \{k : \mathcal{G} \ni g \mapsto k(g) \in \mathbb{R};\ \|k\|_{\mathcal{G}} := \sup_{g \in \mathcal{G}} |k(g)| < \infty\}$.

(17) $\mathcal{H} := \{\ell^\infty(\mathcal{G}) \ni k \mapsto h(k) \in \mathbb{R};\ h$ は有界連続$\}$. ただし,

(17a) h は有界 $\iff \sup_{k \in \ell^\infty(\mathcal{G})} |h(k)| < \infty$.

(17b) h は連続であるとは, 任意の開集合 $O \subset \mathbb{R}$ に対して, $h^{-1}(O)$ は $(\ell^\infty(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ の開集合.

ただし, $\ell^\infty(\mathcal{G})$ の位相は $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ によって誘導されたものである.

(18) 関数族 $\mathcal{G}$ が VC 族 $\iff$ $\mathrm{VC}^{\mathcal{G}} := \mathrm{VC}^{\mathcal{D}} < \infty.$
ただし, $\mathcal{D} := \{\mathrm{subgraph}(g) \in \mathbb{R}^{p+1};\ g \in \mathcal{G}\}$,
$\mathrm{subgraph}(g) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R};\ g(x) \geq t\}.$

(19) $\mathcal{G} \subset L^2(P)$ とする.

$\nu(g)$ は P ブラウン橋

$\iff$

ν は連続過程で, 任意の $q \in \mathbb{N}$ と $g_1, g_2, \ldots, g_q \in \mathcal{G}$ 対して

$$\begin{bmatrix} \nu(g_1) \\ \nu(g_2) \\ \vdots \\ \nu(g_q) \end{bmatrix} \xrightarrow{L} N_q(0, \Sigma_{g_1, g_2, \ldots, g_q}).$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Sigma_{g_1, g_2, \ldots, g_q} &= \left(\sigma(g_i, g_j)\right)_{i, j=1, 2, \ldots, q}, \\ \sigma(g_i, g_j) &= P(g_i g_j) - (Pg_i)(Pg_j). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{主張 1}}$ (i) $PG < \infty$ かつ (ii) $0 < \delta < 1$ に対して,

$$H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^1(P)}) < \infty$$

とする. このとき,

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} |(P_n - P)g| \xrightarrow{P} 0 \ (n \to \infty).$$

$\boxed{\text{主張 2}}$ (i) $PG < \infty$ かつ (iii) $0 < \delta < 1$ に対して,

$$\frac{1}{n} H_B(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^1(P_n)}) \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to \infty)$$

とする. このとき,

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} |(P_n - P)g| \xrightarrow{P} 0 \ (n \to \infty).$$

主張３ (iv) Q を $\mathbb{R}^p$ 上の確率測度とし, $QG < \infty$ とし, (v) 函数族 $\mathcal{G}$ の VC 次元が $V < \infty$ とする. このとき, V に依存する定数 A が存在して, $\delta > 0$ に対して,

$$N(\delta QG, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^1(Q)}) \leq \max\{A\delta^{-2V}, e^{\delta/4}\}.$$

主張４ (i) $PG < \infty$ かつ (vi) $\mathcal{G}$ は VC 族 (VC 次元が有限) とする. このとき,

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} |(P_n - P)g| \xrightarrow{P} 0 \; (n \to \infty).$$

注意１

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} |(P_n - P)g| \xrightarrow{a.s.} 0 \; (n \to \infty)$$

も成り立つ.

$\boxed{\text{主張 5}}$ (vii) $PG^2 < \infty$ かつ (viii) すべての確率測度 Q に対して,

$$\int_0^1 \sqrt{2H(uQG, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^2(Q)})}\, du < \infty$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} &\nu_n \xrightarrow{L} \nu \quad (n \to \infty) \\ \Longleftrightarrow\ &\text{任意の } h \in \mathcal{H} \text{ に対して, } \mathbb{E}[h(\nu_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[h(\nu)] \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{主張 6}}$ (viii) $PG^2 < \infty$ かつ (ix) $\mathcal{G}$ は VC 族とする. このとき,

$$\nu_n \xrightarrow{L} \nu \quad (n \to \infty).$$

M 推定量に関するまとめ

(20) $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$: 確率空間.

(21) $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$: 確率変数.

(22) $P = \mathbb{P} \circ X^{-1}$.

(23) Θ: 距離空間 (M, d_M) の部分集合.
$\|x\|_{d_M} := \sqrt{d_M(x, x)}\ (x \in M)$.

(24) $\gamma_\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: 可測な損失函数 で
$P|\gamma_\theta| := \int_{\mathbb{R}} |\gamma_\theta(x)|\, dP(x) < \infty$.

(25) $\theta_0 := \mathrm{argmin}_{\theta \in \Theta} P\gamma_\theta := \mathrm{argmin}_{\theta \in \Theta} R(\theta)$ は一意的に存在すると仮定.

(26) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に P に従う確率変数で,

$$P_n(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i) \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

(27) $\widehat{\theta}_n := \mathrm{argmin}_{\theta\in\Theta} P_n\gamma_\theta := \mathrm{argmin}_{\theta\in\Theta} R_n(\theta)$: θ_0 の M 推定量.
存在すると仮定する.

(28) θ_0 は分離されているとは, 任意の $\eta > 0$ に対して,

$$\inf\{R(\theta);\ d_M(\theta, \theta_0)\} > R(\theta_0)$$

$\boxed{\text{主張 7}}$ (x) 函数族 $\mathcal{G}_1 := \{\gamma_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ はつぎをみたす:

$$\sup_{\theta\in\Theta} |R_n(\theta) - R(\theta)| \xrightarrow{P} 0\ (n \to \infty).$$

たとえば, $\mathcal{G}_1$ は VC 族でよい. このとき,

$$R(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow{P} R(\theta_0)\ (n \to \infty).$$

さらに, θ_0 がうまく分離されていれば,

$$d_M(\widehat{\theta}_n, \theta_0) \xrightarrow{P} 0\ (n \to \infty).$$

(29) $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ とし, Euclid ノルムを $|\cdot|$ とかく. M 推定量が漸近正規性を持つための仮定.

(29a) ある $\epsilon > 0$ が存在して, $|\theta - \theta_0| < \epsilon$ なる θ において, 函数 $\Theta \ni \theta \mapsto \gamma_\theta(x) \in \mathbb{R}$ は微分可能 (ほとんどいたるところの $x \in \mathbb{R}$) で

$$\psi_\theta(x) := \frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_\theta(x) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\gamma_\theta(x), \frac{\partial}{\partial\theta_2}\gamma_\theta(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial\theta_q}\gamma_\theta(x)\right)^\top.$$

ただし, $\theta := (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)^\top$.

(29b)

$$\lim_{\theta\to\theta_0} P(\psi_\theta - \psi_{\theta_0}) = V(\theta - \theta_0) + o(1)|\theta - \theta_0|.$$

ただし, V は $q \times q$ の定数正値対称行列.

(29c) $\psi_\theta \in L^2(P)$ $(\theta \in \Theta)$.

(29d)

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \sqrt{P|\psi_\theta - \psi_{\theta_0}|^2} = 0.$$

$\boxed{\text{主張８}}$ (xi) ある $\epsilon > 0$ があって,
$\mathcal{G}_2 := \{\psi_\theta;\ \theta \in \Theta \text{ s.t. } |\theta - \theta_0| < \epsilon\}$ は VC 族とする. このとき,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{L} N_q(0,\ V^{-1}JV^{-1}) \qquad (n \to \infty).$$

すなわち, 任意の有界連続函数 $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[h\left(\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0)\right)\right] = \mathbb{E}[h(W)] \qquad W \sim N_q(0,\ V^{-1}JV^{-1}).$$

ただし, $J := P(\psi_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^\top)$ は $q \times q$ の正定値行列.