(8) $r \geq 1$ または $r = \infty$ とする.

$$L^r(P) := \{g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R};\ \|g\|^r_{L(P)} := P|g|^r < \infty\},$$

$$L^\infty := \{g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R};\ \sup_{x \in \mathbb{R}^p} |g| < \infty\}.$$

$L^r(P)$

記号を乱用して, $L^\infty(P)$ を L^∞ を とみなす.
函数族 $\mathcal{G} \subset L^r(P)$ を考える. 任意の $\delta > 0$ に対して, $N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)}) =: N$ を $\mathcal{G}$ を覆うために必要な δ 球の最小個数とする. すなわち, $N \in \mathbb{N}$ と $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\} \subset \mathcal{G}$ があって,

N

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\delta(g_j), \quad B_\delta(g) := \{g' \in \mathcal{G};\ \|g' - g\|_{L^r(P)} < \delta\}.$$

さらに,

$$H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)}) := \log N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L^r(P)})$$

を計量エントロピーという.

(26) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に P に従う確率変数で,

$$P_n(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i) \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

(27) $\widehat{\theta}_n := \mathrm{argmin}_{\theta\in\Theta} P_n\gamma_\theta := \mathrm{argmin}_{\theta\in\Theta} R_n(\theta)$: θ_0 の M 推定量.
存在すると仮定する.

(28) θ_0 は分離されているとは, 任意の $\eta > 0$ に対して,

$$\inf\{R(\theta);\ d_M(\theta, \theta_0)\} > R(\theta_0)$$

$\to d_M(\theta, \theta_0) > \eta$

(29) $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ とし, Euclid ノルムを $|\cdot|$ とかく. M 推定量が漸近正規性を持つための仮定.

(29a) ある $\epsilon > 0$ が存在して, $|\theta - \theta_0| < \epsilon$ なる θ において, 函数 $\Theta \ni \theta \mapsto \gamma_\theta(x) \in \mathbb{R}$ は微分可能 (ほとんどいたるところの $x \in \mathbb{R}$) で

$$\psi_\theta(x) := \frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_\theta(x) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\gamma_\theta(x), \frac{\partial}{\partial\theta_2}\gamma_\theta(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial\theta_q}\gamma_\theta(x)\right)^\top.$$

ただし, $\theta := (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)^\top$.

(29b) $\theta \to \theta_0$ のとき, 以下

$$\cancel{\lim_{\theta\to\theta_0}} P(\psi_\theta - \psi_{\theta_0}) = V(\theta - \theta_0) + o(1)|\theta - \theta_0|.$$

ただし, V は $q \times q$ の定数正値対称行列.

(29c) $\psi_\theta \in L^2(P)$ $(\theta \in \Theta)$.

(29d)

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \sqrt{P|\psi_\theta - \psi_{\theta_0}|^2} = 0.$$