2021 年 8 月 27 日・今野

「2021 年度　数理科学特別講義 C, G」レポート問題

名前（ふりがな）と所属学年を 1 行目に記し, 回答を続けてください. できれば Latex で作成し, pdf に変換したものを提出. 手書きの場合には, 写真でとり, かならず pdf に変換して提出してください.

$\boxed{\text{問題 1}}$

$$\mathcal{D} := \{(-\infty, r];\, r \in \mathbb{R}\}$$

とする. 集合 $\{-1, 0, 1\}$ に対して, $\mathcal{D}$ の元によって分離される $\{-1, 0, 1\}$ の部分集合を列挙せよ. ただし, 空集合も $\{-1, 0, 1\}$ の部分集合である. 答えのみでよい. このことより,

$$\mathrm{VC}^{\mathcal{D}}(3) \geq 4$$

を確認せよ.

実は, $\mathrm{VC}^{\mathcal{D}}(3) \leq 4$ となることが重要であるが, 逆向きの不等号は簡単に確認できる.

$\boxed{\text{問題 2}}$　$r \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathbb{1}_{(-\infty, r]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (-\infty, r]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とする. 実数値確率変数 X は分布関数 F_X をもつとする. すなわち,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

このとき,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty, r]}(X)], \qquad \mathbb{V}[\mathbb{1}_{(-\infty, r]}(X)]$$

を計算せよ. さらに, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ を X の独立複製とし,

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$$

としたとき, 固定した $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathbb{E}[\widehat{F}_n(x)], \qquad \mathbb{V}[\widehat{F}_n(x)]$$

を計算せよ.

$\boxed{\text{問題 3}}$　例 15.4 の記号を踏襲する.

$$\psi_\theta(x) = \begin{cases} 2k & (x - \theta < -k) \\ -2(x - \theta) & (|x - \theta| \leq k) \\ -2k & (x - \theta > k) \end{cases}$$

とし,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とする.

(1)

$$\frac{d}{d\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\theta(x)\,dF(x) = 2\{F(\theta+k)-F(\theta-k)\}$$

を確認せよ.

(2)

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{P(\psi_\theta-\psi_{\theta_0})^2} = 0$$

を確認せよ.

$\boxed{\text{問題 4}}$

$$\mathcal{G} := \{g:\,[0,,1]\longrightarrow[0,1];\ \|\dot{g}\|_{\sup} := \sup_{x\in[0,1]}|\dot{g}(x)|<1\}\qquad(\dot{g}=\frac{dg}{dx})$$

とし, $0.1>\delta>0$, $N:=\lfloor 1/\delta\rfloor$ とする. ただし, $a\in\mathbb{R}$ に対し, $\lfloor a\rfloor$ は x を越えない最大の整数である. $a_k = k\delta\,(k=0,1,\ldots,N)$, $a_{N+1}=1$ とし,

$$B_1 := [a_0,\,a_1],\ B_k := (a_{k-1},\,a_k]\,(k=2,\ldots,N+1)$$

とする.

(1) 任意の $g\in\mathcal{G}$ に対して,

$$\tilde{g}(x) := \sum_{k=1}^{N}\left\lfloor\frac{g(a_k)}{\delta}\right\rfloor\mathbb{1}_{B_k}(x)$$

とおく. このとき,

$$\|g-\tilde{g}\|_{\sup}\le 2\delta$$

を確認せよ.

(2) $k=1,2,\ldots,N+1$ に対し,

$$|\tilde{g}(a_k)-\tilde{g}(a_{k-1})|\le 3\delta$$

を確認せよ. $|\tilde{g}(a_k)-g(a_k)|\le\delta\,(k=0,1,\ldots,N+1)$ と $|\dot{g}(x)|\le 1\,(x\in[0,1])$ を使うとよい.

(3) $\tilde{g}(a_0)$ の選び方は $\lfloor 1/\delta\rfloor+2$ を越えない. $\tilde{g}(a_{k-1})$ を選んだら, $\tilde{g}(a_k)$ の選ぶ方は最大 7 通りしかないことに注意して,

$$H(2\delta,\,\mathcal{G},\,\|\cdot\|_{\sup})\le\left(\left\lfloor\frac{1}{\delta}\right\rfloor+2\right)7^{\lfloor 1/\delta\rfloor+1}$$

となることを確認せよ.

$\boxed{\text{問題 5}}$ $(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathbb{P})$ を確率空間, $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ は確率変数とし, $P=\mathbb{P}\circ X^{-1}$ とする. Θ を距離空間 $(M,\,d)$ のコンパクト部分集合とし,

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \;:=\; &\{\gamma_\theta:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\ \theta\in\Theta.\ \text{ただし } P-\text{almost all な } x \text{ を固定したとき},\\ &\text{関数 } \Theta\ni\theta\mapsto\gamma_\theta(x)\in\mathbb{R}\text{ は連続}\}.\end{aligned}$$

すなわち, $P(\{x \in \mathbb{R}:\ \Theta \ni \theta \mapsto \gamma_\theta(x) \in \mathbb{R}$ は連続 $\}) = 1$ である. さらに,

$$G(x) := \sup_{\theta \in \Theta} |\gamma_\theta(x)| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とし $G \in L^1(P)$ と仮定する.

(1) $\theta \in \Theta$ と $\rho > 0$ に対して,

$$w(\theta,\, \rho) := \sup_{d(\theta,\, \tilde{\theta}) < \rho} |\gamma_\theta(x) - \gamma_{\tilde{\theta}}(x)|$$

と定義する. このとき,

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbb{R}} w(\theta,\, \rho)\, dP(x) = 0$$

を示せ.

(2) (1) により, 任意の $\delta > 0$ と, θ に対して, $\rho_\theta > 0$ をうまくとれば,

$$\int_{\mathbb{R}} w(\theta,\, \rho_\theta)\, dP(x) < \delta$$

とできる. さらに, $B_\theta := \{\tilde{\theta} \in \Theta;\, d(\tilde{\theta},\, \theta) < \rho_\theta\}$ と定義する. このとき, ある有限な $N \in \mathbb{N}$ と $\theta_1,\, \theta_2,\, \ldots,\, \theta_N \in \Theta$ があって,

$$\Theta \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{\theta_j}$$

となることを確認[1]せよ.

(3) (2) で定めた $\{\theta_j\}_{1 \le j \le N}$ と $\{\rho_{\theta_j}\}_{1 \le j \le N}$ に対して,

$$\begin{aligned} g_j^L(x) &:= \gamma_{\theta_j}(x) - w(\theta_j,\, \rho_{\rho_j}), \\ g_j^U(x) &:= \gamma_{\theta_j}(x) + w(\theta_j,\, \rho_{\rho_j}) \end{aligned}$$

とおく. ある $j\,(1 \le j \le N)$ があって, $\theta \in B_{\theta_j}$ となる. このとき, $\theta \in B_{\theta_j}$ に対して,

$$P|g_j^U - g_j^L| \le 2\delta \quad \text{かつ} \quad g_j^L(x) \le \gamma_\theta(x) \le g_j^U(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を示すことで,

$$H_B(2\delta,\, \mathcal{G},\, L^1(P)) \le \log N$$

を確認せよ.

以上。

[1]コンパクトの定義を利用する.