付 録B　不変積分について

B.1　不変積分と不変測度

$\mathscr{X}$ を局所コンパクト位相空間とする．すなわち，(i) 位相はハウスドルフ，(ii) $\mathscr{X}$ の各点はコンパクトな近傍を持つ．この講義では，さらに $\mathscr{X}$ は可算基を持つ(B-1)と仮定する．

いま，$\mathbb{K}(\mathscr{X})$ を $\mathscr{X}$ 上のコンパクト台をもつ実数値連続関数の族とする．$\mathbb{K}(\mathscr{X})$ は実ベクトル空間になることに注意せよ．

定義 B.1 $\mathbb{K}(\mathscr{X})$ 上の実数値汎関数 J がつぎの条件をみたすとき，J を積分という．
(i) 任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in \mathbb{K}(\mathscr{X})$ に対して，$J(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 J(f_1) + a_2 J(f_2)$.
(ii) $f \in \mathbb{K}(\mathscr{X})$ が非負のとき，$J(f) \geq 0$.
(iii) ある $f \in \mathbb{K}(\mathscr{X})$ に対して，$J(f) > 0$.

$\mathscr{X}$ を局所コンパクト空間とし，$\mathscr{X}$ のすべてのコンパクト集合を含む最小の σ-集合体を $\mathcal{B}$ とする．$(\mathscr{X}, \mathcal{B})$ 上の測度 μ がラドン測度であるとは，すべてのコンパクト集合 C に対して，$\mu(C) < \infty$ で $\mu \not\equiv 0$ となることである．

命題 B.1 (Eaton (1989, page 3)) $\mathbb{K}(\mathscr{X})$ 上の積分 J に対して，一意的にラドン測度 μ が存在して，

$$J(f) = \int f(x)\, \mu(dx), \qquad f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}) \tag{B.1}$$

とできる．逆に，ラドン測度 μ は $(B.1)$ により積分を定まる．

証明：信じることにする． □

$\boxed{\int f(x)\, \mu(dx) \text{ の意味}}$　非負値関数 $f(x)$ に対して，各 n と $1 \leq k \leq 2^n \cdot n$ なる整数 k に対して

$$\begin{aligned} B_n^k &= \left\{ x \in \mathscr{X} : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{B}, \\ B_n^\infty &= \{ x \in \mathscr{X} : f(x) \geq n \} \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

とおき，

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & (x \in B_n^k,\ k = 1, 2, \ldots, 2^n \cdot n), \\ n, & (x \in B_n^\infty) \end{cases}$$

とする．ここで，

$$\int f_n(x)\,\mu(dx) = \sum_{k=1}^{2^n \cdot n} \frac{k-1}{2^n}\mu(B_n^k) + n \cdot \mu(B_n^\infty)$$

とし，

$$\int f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\mu(dx)$$

と定める．一般の $f(x)$ については，$f(x) = \max\{f(x), 0\} - \max\{-f(x), 0\}$ として，右辺のそれぞれの項に対して、積分を定義すればよい． □

定義 B.2 G を群（G の単位元を e と記す）とする．写像

$$\begin{aligned}\varphi:\, G\times G \;&\to\; G, \qquad (x,\,y)\mapsto xy,\\ \psi:\, G \;&\to\; G, \qquad x\mapsto x^{-1}\end{aligned}$$

が共に連続のとき，G を位相群という．

例 B.1 (i) $GL(p,\,\mathbb{R})$ を $p\times p$ の正則な実行列の集合とする．$GL(p,\,\mathbb{R})$ の作用を通常の行列積とすれば，$GL(p,\,\mathbb{R})$ は位相群となる．
(ii) 置換群 $\mathcal{P}_p$ を $p\times p$ の行列で，ある要素が 1 で，他はすべて 0 であるような行列の集合とする．置換群 $\mathcal{P}_p$ は位相群となる．
(iii) $\mathcal{D}_p = \mathrm{diag}(\pm 1,\,\cdots,\,\pm 1)$ は位相群となる．

G の各元 g に対して，g による G の左移動 $L_g:\, G\to G$ と右移動 $R_g:\, G\to G$ を

$$L_g(h) = gh, \qquad R_g(h) = hg, \qquad (g\in G)$$

によって定める．さらに，G の部分集合 H に対して，$g\in G$ による集合 H の左移動と右移動を

$$gH = \{gh:\, h\in H\}, \qquad Hg = \{hg:\, h\in H\}$$

と書き，L_g の $\mathbb{K}(G)$ への作用を

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad (g\in G,\, f\in\mathbb{K}(G))$$

で定める．ただし，$\mathbb{K}(G)$ は G 上の実数値連続関数でコンパクト台をもつもの全体である．

定義 B.3 $\mathbb{K}(G)$ 上の積分 J が左不変であるとは，

$$J(L_g f) = J(f), \qquad (g\in G,\, f\in\mathbb{K}(G))$$

をみたすときをいう．

左不変な積分 J に対応するラドン測度を μ とすれば，

$$\int_G f(g^{-1}x)\mu(dx) = \int_G f(x)\mu(dx), \qquad (g\in G,\, f\in\mathbb{K}(G))$$

となる．

定理 B.1 (Eaton (1989, page 6)) 局所コンパクト位相群 G 上には，左不変積分（測度）が定数倍を除いて一意的に存在する．

証明：信じることにする． □

$\mathbb{K}(G)$ 上の左不変積分 J に対応する測度を ν_ℓ とすれば，

$$J(f)=\int_G f(x)\nu_\ell(dx)=\int_G f(g^{-1}x)\nu_\ell(dx), \qquad (g\in G,\, f\in\mathbb{K}(G))$$

となる．測度 ν_ℓ を左ハール測度という．

$\boxed{\text{左不変積分と右不変積分の関係}}$ ν_ℓ を左ハール測度とし，固定した $g\in G$ に対して，$\mathbb{K}(G)$ 上の積分 J_1 を

$$J_1(f)=\int_G f(xg^{-1})\,\nu_\ell(dx)$$

で定める．ただちに，J_1 は左不変積分であること[(B-2)]がわかる．また，定理 B.1 より，ある正の数[(B-3)] $\Delta_G(g)$ が存在して，

$$J_1=\Delta_G(g)J$$

と書ける．したがって，$^\forall f\in\mathbb{K}(G)$ に対して，

$$\int_G f(xg^{-1})\nu_\ell(dx)=\Delta_G(g)\int_G f(x)\nu_\ell(dx) \tag{B.2}$$

となる．この Δ_G をモジュラー関数という．G を明示しなくとも誤解のおそれがなければ，簡単に Δ と書く．

命題 B.2 モジュラー関数は連続ですべての $g_1,\, g_2\in G$ に対して，

$$\Delta(e)=1, \qquad \Delta(g_1g_2)=\Delta(g_1)\Delta(g_2), \qquad \Delta(g^{-1})=(\Delta(g))^{-1}$$

をみたす．さらに，また，G がコンパクトならば，すべての $g\in G$ に対して，$\Delta(g)=1$ となる．

証明：

$$\begin{aligned}\Delta(g_1g_2)\int_G f(x)\,\nu_\ell(dx) &= \int_G f(x(g_1g_2)^{-1})\,\nu_\ell(dx)=\int_G f((xg_2^{-1})g_1^{-1})\,\nu_\ell(dx)\\ &= \Delta(g_1)\int_G f(xg_2^{-1})\,\nu_\ell(dx)=\Delta(g_1)\Delta(g_2)\end{aligned}$$

また，連続性については Farrell (1976, page 43) を参照のこと．G がコンパクトのとき，Δ の連続性から $T=\{\Delta(g):\, g\in G\}$ はコンパクトとなる．$T\neq\{1\}$ ならば，ある $a>1$ が存在して，$a\in T$ となる[(B-4)]ので，$a^n\in T\,(n\in\mathbb{N})$ となる．しかし，$\{a^n:\, n\in\mathbb{N}\}$ は収束する部分列を持たないので，T のコンパクト性と矛盾する．したがって，$\Delta(g)=1$ となる． □

$\Delta_G\equiv 1$ なる群 G をユニモジュラー[(B-5)] という．また，命題 B.2 より，G がコンパクトのとき，左ハール測度と右ハール測度は一致する．

$g \in G$ に対して，$\mathbb{K}(G)$ への R_g の作用を

$$(fR_g)(x) = f(xg^{-1})$$

で定める．積分 J が右不変であるとは，$^\forall g \in G$ と $f \in \mathbb{K}(G)$ に対して，$J(f) = J(fR_g)$ をみたすときをいう．

命題 B.3 左不変積分 J を

$$J(f) = \int_G f(x)\,\nu_\ell(dx), \qquad (^\forall f \in \mathbb{K}(G))$$

で定め，Δ を G のモジュラー関数としたとき，積分

$$J_1(f) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\,\nu_\ell(dx)$$

は右不変で

$$\int_G f(x)\Delta(x^{-1})\,\nu_\ell(dx) = \int f(x^{-1})\,\nu_\ell(x), \qquad (f \in \mathbb{K}(G)) \tag{B.3}$$

となる．

証明 $\underline{J_1 \text{ の右不変性}}$：$^\forall g \in G$ に対して，

$$\begin{aligned} J_1(fR_g) &= \int_G (fR_g)(x)\Delta(x^{-1})\,\nu_\ell(dx) = \int_G f(xg^{-1})\Delta(x^{-1})\,\nu_\ell(dx) = \int_G f(xg^{-1})\frac{\nu_\ell(dx)}{\Delta(xg^{-1}g)} \\ &= \frac{1}{\Delta(g)}\int_G f(xg^{-1})\frac{\nu_\ell(dx)}{\Delta(xg^{-1})} = \frac{\Delta(g)}{\Delta(g)}\int_G \frac{f(x)}{\Delta(x)}\,\nu_\ell(dx) = J_1(f) \end{aligned}$$

となることよりわかる．最後から 2 番目の等号はモジュラー関数の定義 $(B.2)$ において f を f/Δ とおきかえることによりわかる．
$\underline{(B.3) \text{ の証明}}$：

$$J_2(f) = \int_G f(x^{-1})\,\nu_\ell(dx)$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned} J_2(fR_g) &= \int_G (fR_g)(x^{-1})\,\nu_\ell(dx) = \int_G f(x^{-1}g^{-1})\,\nu_\ell(dx) = \int_G f((gx)^{-1})\,\nu_\ell(dx) \\ &= \int_G f(x^{-1})\,\nu_\ell(dx) = J_2(f) \end{aligned}$$

がわかる．ただし，最後から 2 番目の等号は ν_ℓ が左ハール測度であることからわかる．したがって，定理 $B.1$ から $J_1 = cJ_2$ がわかる．あとは，新たな左ハール測度として，ν_ℓ/c として，積分を定めればよい． □

例 B.2 $G = \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ とし，dx を $\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ に制限したルベーグ測度とする．G 上の積分 J を

$$J(f) = \int_G f(x) \frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x)|^p}, \qquad ({}^\forall f \in \mathbb{K}(G))$$

で定める．このとき，$x \to g^{-1}x =: y$ のヤコビアンを計算すると $dx = |\mathrm{Det}\, g|^p\, dy$ となるので，

$$J(L_g f) \;=\; \int_G f(g^{-1}x) \frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x)|^p} = \int_G f(g^{-1}y) \frac{|\mathrm{Det}\,(g)|^p dy}{|\mathrm{Det}\,(gy)|^p} = \int_G f(y)\, \frac{dy}{|\mathrm{Det}\,(y)|^p} = J(f)$$

がわかる． □

B.2 乗因子と相対不変積分

G を群とする．写像 $\chi_G : G \to \mathbb{R}^+$ が G の指標であるとは，χ_G は連続で，すべての $g_1,\, g_2 \in G$ に対して

$$\chi_G(g_1 g_2) = \chi_G(g_1)\chi_G(g_2)$$

が成り立つときをいう．誤解のおそれがなければ，簡単に χ と記す．

$\mathbb{K}(G)$ 上の積分 J が乗因子 χ の相対左積分であるとは，各 $g \in G$ に対して，

$$J(L_g f) = \int_G f(g^{-1}x)\, m(dx) = \chi(g) \int_G f(x)\, m(dx) = \chi(g) J(f)$$

が成り立つことをいう．

命題 B.4 χ を群 G の指標とする．
(i) $J_1(f) = \int_G f(x)\, m(dx)$ が乗因子 χ の相対左不変積分のとき，積分

$$J(f) = \int_G f(x)\chi(x^{-1})\, m(dx)$$

は左不変である．
(ii) $J(f) = \int_G f(x)\, \nu_\ell(dx)$ が左不変のとき，

$$J_1(f) = \int_G f(x)\chi(x)\, \nu_\ell(dx)$$

は乗因子 χ の相対左不変積分である．

証明 (i) の証明：${}^\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
J(L_g f) &= \int_G (L_g f)(x)\chi(x^{-1})\, m(dx) = \int_G f(g^{-1}x)\chi(x^{-1})\, m(dx) \\
&= \int_G f(g^{-1}x)\chi((g^{-1}x)^{-1}g^{-1})\, m(dx) = \chi(g^{-1}) \int_G f(g^{-1}x)\chi((g^{-1}x)^{-1})\, m(dx) \\
&= \chi(g^{-1}) \int_G \frac{f(g^{-1}x)}{\chi(g^{-1}x)}\, m(dx) = \chi(g^{-1}) J_1\left(L_g\left(\frac{f}{\chi}\right)\right) \\
&= \chi(g^{-1})\chi(g) J_1\left(\frac{f}{\chi}\right) = J_1\left(\frac{f}{\chi}\right) = \int_G \frac{f(x)}{\chi(x)}\, m(dx) = \int_G f(x)\chi(x^{-1})\, m(dx) = J(f)
\end{aligned}$$

よりわかる．
(ii) の証明：${}^\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
J_1(L_g f) &= \int_G (L_g f)(x)\chi(x)\, \nu_\ell(dx) = \int_G f(g^{-1}x)\chi(x)\, \nu_\ell(dx) = \int_G f(g^{-1}x)\chi(gg^{-1}x)\, \nu_\ell(dx) \\
&= \chi(g) \int_G f(g^{-1}x)\chi(g^{-1}x)\, \nu_\ell(dx) = \chi(g) \int_G f(x)\chi(x)\, \nu_\ell(dx) = \chi(g) J_1(f)
\end{aligned}$$

よりわかる． □

$\boxed{\text{左不変積分の作り方}}$ dx を G に制限したルベーグ測度とする．もし，$^\forall g \in G$ に対して，

$$\int_G f(g^{-1}x)\,dx = \chi(g)\int_G f(x)\,dx \tag{B.4}$$

が成り立てば，

$$J(f) = \int_G f(x)\chi(x^{-1})\,dx$$

は命題 B.4(i) より左不変積分となる．$(B.4)$ の乗因子 χ は変数変換によって求めることができる．

例 B.3 (i) $G = \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ のとき，G の指標は $\chi(g) = |\mathrm{Det}\,(g)|^c$ で与えられる．ただし，c はある固定した実数である．証明については Eaton (1989, page 14) を参照．
(ii) $G = \mathrm{AL}(p, \mathbb{R}) = \{(g, x) :\ g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^p\}$ とし，$\mathrm{AL}(p, \mathbb{R})$ の積を

$$(g_1, x_1)(g_2, x_2) = (g_1g_2,\ g_1x_2 + x_1), \qquad (^\forall(g_1, x_1), (g_2, x_2) \in \mathrm{AL}(p, \mathbb{R}))$$

で定める．$\mathrm{AL}(p, \mathbb{R})$ の単位元は $(e, 0)$ となる．また，$\mathrm{AL}(p, \mathbb{R})$ には，$\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^p$ の積位相をいれる．$\mathrm{AL}(p, \mathbb{R})$ の乗因子 χ を求める：$(g, x) \in \mathrm{AL}(p, \mathbb{R})$ に対して，

$$(g, x) = (g, 0)(e, g^{-1}x) = (e, x)(g, 0)$$

となることと乗因子が準同型であることより

$$\chi(g, x) = \chi(g, 0)\chi(e, g^{-1}x) = \chi(g, 0)\chi(e, x)$$

となる．すべての $g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ に対して，$\chi(g, 0) \neq 0$ なので，

$$\chi(e, g^{-1}x) = \chi(e, x)$$

となる．$\{g_n\} \in G$ で $g_n^{-1} \to 0$ なるものをとれば，χ の連続性より

$$1 = \chi(e, 0) = \lim_{n\to\infty} \chi(e, g_n^{-1}x) = \chi(e, x)$$

より，すべての $(g, x) \in \mathrm{AL}(p, \mathbb{R})$ に対して

$$\chi(g, x) = \chi(g, 0)$$

がわかる．しかし，$g \to \chi(g, 0)$ は $\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ の乗因子なので，

$$\chi(g, x) = |\mathrm{Det}\,(g)|^c$$

となる．ただし，c はある固定した実数である． □

例 B.4 $G := \mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ を対角成分が正の下三角行列の集合とする．$x \in \mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R})$ のとき，

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pp} \end{pmatrix}$$

で $x_{ii} > 0,\, x_{ij} \in \mathbb{R}\,(i = 1, 2, \ldots, p,\, j = 1, 2, \ldots, i)$ である．dx を $\mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R})$ 上に制限したルベーグ測度である．$\mathbb{K}(G)$ 上の積分 J を

$$J(f) = \int_G f(x)\, dx, \qquad (f \in \mathbb{K}(G))$$

で定め，${}^\forall g \in G$ に対して，

$$J(L_g f) = \int_G f(g^{-1}x) dx$$

を考える．$y = g^{-1}x$ （すなわち，$x = gy$）とおけば，この変換のヤコビアンは

$$\chi_0(g) = \Pi_{i=1}^p g_{ii}^i$$

となる．ただし，$g = (g_{ij}) \in \mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R})$ である．したがって，$dx = \chi_0(g)\, dy$ となるので，

$$J(L_g f) = \chi_0(g) J(f)$$

となる．すなわち，χ_0 は積分 J の乗因子である．命題 $B.4$ から

$$\nu_\ell(dx) = \frac{dx}{\chi_0(x)} = \frac{dx}{\Pi_{i=1}^p g_{ii}^i}$$

は $\mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R})$ の左ハール測度となる．さらに，$(B.2)$ に従い $\mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R})$ のモジュラー関数 Δ を求める：

$$\int_G f(xg^{-1})\, \nu_\ell(dx) = \int_G f(xg^{-1}) \frac{dx}{\Pi_{i=1}^p g_{ii}^i}$$

となる．$y = xg^{-1}$ (すなわち，$x = yg$) とおけば，この変換のヤコビアンは

$$\chi_1(g) = \Pi_{i=1}^p g_{ii}^{p-i+1}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int_G f(xg^{-1}) \frac{dx}{\Pi_{i=1}^p g_{ii}^i} &= \int f(y)\chi_1(g) \frac{dy}{\chi_0(yg)} = \frac{\chi_1(g)}{\chi_0(g)} \int_G f(y) \frac{dy}{\chi_0(y)} \\ &= \frac{\chi_1(g)}{\chi_0(g)} \int_G f(y)\, \nu_\ell(y)\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\Delta(g) = \frac{\chi_1(g)}{\chi_0(g)} = \Pi_{i=1}^p g_{ii}^{p-2i+1}$$

となる．これより $\mathrm{GT}^+(p, \mathbb{R})$ の右ハール測度 ν_r は

$$\nu_r(dx) = \frac{1}{\Delta(x)} \nu_\ell(dx) = \frac{dx}{\Pi_{i=1}^p x_{ii}^{p-2i+1}}$$

となる． □

B.3 変換群と相対不変測度

定義 B.4 G を群，$\mathscr{X}$ を集合とする．$\mathscr{X}$ 上の G-作用とは，写像

$$\varphi : G \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$$

がつぎの二つの条件をみたすときをいう．
(i) G の単位元 e，および $\mathscr{X}$ の任意の元 x に対して

$$\varphi(e,\, x) = x.$$

(ii) G の任意の二つの元 $g_1,\, g_2$，および $\mathscr{X}$ の任意の元 x に対して

$$\varphi(g_2,\, \varphi(g_1,\, x)) = \varphi(g_2 g_1,\, x).$$

このとき，$(\mathscr{X},\, G,\, \varphi)$ を組にして，変換群，または $\mathscr{X}$ 上の G-作用という．また，φ が連続のとき，位相変換群という．ただし，$G \times \mathscr{X}$ には積位相をいれる．

以後は，変換群 $(\mathscr{X},\, G,\, \varphi)$ が与えられたとき，誤解のおそれがなければ，$\varphi(g,\, x)$ を簡単に gx と書くことにする．

$\boxed{\text{用語}}$
(i) $x \in \mathscr{X}$ に対して

$$G(x) = \{gx :\, g \in G\} \subset \mathscr{X}$$

を x を通る軌道という．$x_1,\, x_2 \in \mathscr{X}$ に対して，$G(x_1) \cap G(x_2) = \emptyset$ または $G(x_1) = G(x_2)$ のいずれかであること（川久保 (1985, page 4)）に注意せよ．
(ii) $x \in \mathscr{X}$ に対して

$$G_x = \{g \in G :\, gx = x\} \subset G$$

を x におけるアイソトロピー群という．G_x は G の部分群である．

例 B.5 (i) $\mathscr{X} = \mathbb{R}^p,\, G = \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R})$ とする．$\mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p$ 上の写像 φ を

$$\varphi(g,\, x) = gx, \qquad (g \in \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}),\, x \in \mathbb{R}^p)$$

で定義する．$(\mathbb{R}^p,\, \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}),\, \varphi)$ は変換群となる．
(ii) $\mathscr{X} = \mathrm{Sym}(p,\, \mathbb{R}),\, G = \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R})$ とする．$\mathrm{Sym}(p,\, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R})$ 上の写像 φ を

$$\varphi(g,\, x) = gxg' \qquad (g \in \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}),\, x \in \mathscr{X} = \mathrm{Sym}(p,\, \mathbb{R}))$$

で定義する．$(\mathrm{Sym}(p,\, \mathbb{R}),\, \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}),\, \varphi)$ は変換群となる．
(iii) $\mathscr{X} = \mathrm{M}(n,\, p,\, \mathbb{R}),\, G = \mathscr{O}_n \times \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R})$ とする．$\mathrm{M}(n,\, p,\, \mathbb{R}) \times (\mathscr{O}_n \times \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}))$ 上の写像 φ を

$$\varphi((\gamma,,\, g),\, x) = gxg' \qquad ((\gamma,\, g) \in \mathscr{O}_n \times \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}),\, x \in \mathscr{X} = \mathrm{Sym})$$

で定義する．$(\mathrm{M}(n,\, p,\, \mathbb{R}),\, \mathscr{O}_n \times \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R}),\, \varphi)$ は変換群となる． □

以後では，$\mathscr{X}$ は局所コンパクトハウスドルフ空間で可算基を持つとし，$(\mathscr{X}, G, (g, x) \mapsto gx)$ を位相変換群とする．$\mathbb{K}(\mathscr{X})$ を $\mathscr{X}$ 上の実数値関数でコンパクト台をもつものの集合とする．L_g の $\mathbb{K}(\mathscr{X})$ の作用を

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad ({}^\forall f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}))$$

で定める．すると

$$L_{g_1} L_{g_2} = L_{g_1 g_2}, \qquad ({}^\forall g_1, g_2 \in G)$$

となる．したがって，任意の $f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}), g \in G$ に対して，

$$\varphi(g, f) = L_g f$$

と定めると $(\mathbb{K}(\mathscr{X}), G, \varphi)$ も位相変換群となる．

定義 B.5 χ を群 G の指標とする．$\mathbb{K}(\mathscr{X})$ 上の積分 J が乗因子 χ をもつ相対不変積分であるとは，

$$J(L_g f) = \chi(g) L(f), \qquad (g \in G, f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}))$$

をみたすときをいう．積分 J に対応するラドン測度を m としてとき，m は乗因子 χ をもつ相対不変測度であるとは，

$$\int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x)\, m(dx) = \chi(g) \int_{\mathscr{X}} f(x)\, m(dx), \qquad (g \in G, f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}))$$

をみたすときをいう．

例 B.6 (i) $\mathscr{X} = \mathbb{R}^p, G = \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ とする．$\mathrm{GL}(p, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p$ 上の写像 φ を

$$\varphi(g, x) = gx, \qquad (g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^p)$$

で定義する．$\mathbb{R}^p$ 上のルベーグ測度 dx は乗因子 $\chi(g) = |\mathrm{Det}\,(g)|$ をもつ．なぜならば，

$$J(L_g f) = \int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x)\, dx$$

に対して，$y = g^{-1}x$（すなわち，$x = gy$ ）とおけば，この変換に対するヤコビアンは $|\mathrm{Det}\,(g)|$ となるので，

$$\int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x)\, dx = \int_{\mathscr{X}} f(y) |\mathrm{Det}\,(g)|\, dy = |\mathrm{Det}\,(g)|\, J(f)$$

となることからわかる．

(ii) $\mathscr{X} = \mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}), G = \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ とする．$\mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ 上の写像 φ を

$$\varphi(g, x) = gxg' \qquad (g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}), x \in \mathscr{X} = \mathrm{Sym}(p, \mathbb{R}))$$

で定義する．$\mathrm{Sym}(p, \mathbb{R})$ 上に制限したルベーグ測度 dx は乗因子 $\chi(g) = |\mathrm{Det}\,(g)|^{p+1}$ をもつ．なぜならば，

$$J(L_g f) = \int_{\mathscr{X}} f(\varphi(g^{-1}, x))\, dx = \int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x(g^{-1})')\, dx$$

に対して，$y = g^{-1}x(g^{-1})'$（すなわち，$y = gyg'$ ）とおけば，この変換に対するヤコビアンは $|\mathrm{Det}\,(g)|^{p+1}$ となるので，

$$\int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x(g^{-1})')\,dx = \int_{\mathscr{X}} f(y)|\mathrm{Det}\,(g)|^{p+1}\,dy = |\mathrm{Det}\,(g)|^{p+1}\,J(f)$$

となることからわかる．

(iii) $\mathscr{X} = \mathrm{M}(n,\,p,\,\mathbb{R})$, $G = \mathcal{O}(n,\,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{R})$ とする．$\mathrm{M}(n,\,p,\,\mathbb{R}) \times (\mathcal{O}(n,\,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{R}))$ 上の写像 φ を

$$\varphi((\gamma,\,,\,g),\,x) = gxg' \qquad ((\gamma,\,g) \in \mathcal{O}(n,\,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{R}),\,x \in \mathscr{X} = \mathrm{Sym}(p,\,\mathbb{R}))$$

で定義する．$\mathrm{M}(n,\,p,\,\mathbb{R})$ 上に制限したルベーグ測度 dx とし，積分 J （天下りであるが）を

$$J(f) = \int_{\mathscr{X}} f(x)\,\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x'x)|^{n/2}} =: \int_{\mathscr{X}} f(x)\,m(dx), \qquad (f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}))$$

で定める．任意の $(\gamma,\,g) \in \mathcal{O}(n,\,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{R})$ に対して

$$J(L_{(\gamma,\,g)}f = \int_{\mathscr{X}} f(\varphi(\gamma',\,g^{-1})x)\,m(dx) = \int_{\mathscr{X}} f(\gamma' x g^{-1})\,m(dx), \qquad (f \in \mathbb{K}(\mathscr{X}))$$

となる．$y = \gamma' x g^{-1}$ に対して，変換 $y \mapsto \gamma y g^{-1}$ のヤコビアンは $|\mathrm{Det}\,(g)|^n$ となる．したがって，

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{X}} f(\gamma' x g^{-1}) &= \int_{\mathscr{X}} f(y)|\mathrm{Det}\,(g)|^n\,\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(g'y'yg)|^{n/2}} \\ &= \frac{|\mathrm{Det}\,(g)|^n}{|\mathrm{Det}\,(gg)|^{n/2}}\int_{\mathscr{X}} f(y)\,\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(y'y)|^{n/2}} = J(f) \end{aligned}$$

となる．したがって，積分 J は乗因子 $\chi \equiv 1$ を持つ相対不変積分となる． □

乗因子 χ を持つ相対不変積分 J の存在と一意性 $\mathscr{X}$ は G-空間で G は $\mathscr{X}$ に推移的に作用すると仮定する．$x_0 \in \mathscr{X}$ を固定し，写像

$$\pi :\, g \mapsto gx_0$$

は開写像（G の開集合の像は $\mathscr{X}$ の開集合）と仮定する．G は推移的に作用するので，π は全射である．さらに，

$$H := G_{x_0} = \{g \in G :\, gx_0 = x_0\}$$

とおく．Δ_H を H のモジュラー関数とする．すなわち，$\nu_{\ell,\,H}$ を H の左ハール測度としたとき，任意の $h \in H$ と $f \in \mathbb{K}(H)$ （H 上の実数値連続関数でコンパクトな台をもつものの集合）に対して

$$\int_H f(gh^{-1})\,\nu_{\ell,\,H}(dg) = \Delta_H(h)\int_H f(g)\,\nu_{\ell,\,H}(dg)$$

をみたす．また，すなわち，$\nu_{\ell,G}$ を G の左ハール測度としたとき，任意の $g \in G$ と $f \in \mathbb{K}(G)$ （H 上の実数値連続関数でコンパクトな台をもつものの集合）に対して

$$\int_H f(\tilde{g}g^{-1})\,\nu_{\ell,\,H}(d\tilde{g}) = \Delta_G(g)\int_H f(\tilde{g})\,\nu_{\ell,\,G}(d\tilde{g})$$

をみたす．

定理 B.2 G 上の乗因子 χ をもつ相対不変積分 J が存在するための必要十分条件は，χ が方程式

$$\Delta_H(h) = \chi(h)\Delta_G(h), \qquad (h \in H)$$

をみたすときである．相対不変積分 J が存在すれば，乗数倍を除いて一意的である．

証明：信じることにする．Nachbin (1965, page 125-161) を参照. □

$\boxed{\text{等質空間上の不変積分}}$ G を群とし，H を G のコンパクトな部分群とし，$M = G/H$ とする．$(M,\, G,\, (g,\, hG) \mapsto (gh)G)$ は位相群となることが確認できる．$\pi : G \to G/H$ を射影とする．$f \in \mathbb{K}(M)$ に対して，関数 $f \circ \pi$ の積分 J を

$$J(f \circ \pi) = \int_G f \circ \pi(x)\, \nu_G(dx)$$

で定める．ただし，ν_G は G の左ハール測度である．このとき，J は左不変積分となることがわかる．

命題 B.5 H を G のコンパクトな部分群とし，$(M = G/H,\, G,\, (g,\, hG) \mapsto (gh)G)$ を変換群とする．このとき，M 上の左ハール測度が乗数倍を除いて一意的に存在する．

証明：Olafsson の page 38 を参照. □

例 B.7 $G := \mathrm{GT}^+(p,\, \mathbb{R})$ の $\mathscr{X} := \mathrm{Sym}^+(p,\, \mathbb{R})$ への作用 φ を

$$\varphi(g,\, x) = gxg', \qquad (g \in \mathrm{GT}^+(p,\, \mathbb{R}),\, x \in \mathrm{Sym}^+(p,\, \mathbb{R}))$$

で定める．$x_0 = \mathbf{I}_p$ として，

$$H = \{g \in \mathrm{GT}^+(p,\, \mathbb{R}) :\, \varphi(g,\, x_0) = x_0\} = \{\mathbf{I}_p\}$$

となる．また，例 $B.4$ から

$$\Delta_G(g) = \Pi_{i=1}^p g_{ii}^{p-2i+1}, \qquad g = (g_{ij}) \in \mathrm{GT}^+(p,\, \mathbb{R})$$

となるので，$\chi \equiv 1$ で定理 $B.2$ の仮定をみたす．したがって，乗数倍を除いて一意的に $\mathbb{K}(\mathrm{Sym}^+(p,\, \mathbb{R}))$ 上の不変積分が存在する．

いま，写像 $\phi :\, \mathrm{GT}^+(p,\, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}^+(p,\, \mathbb{R})$ を

$$\phi(g) = gg', \qquad (g \in \mathrm{GT}^+(p,\, \mathbb{R}))$$

で定める．$\mathbb{K}(\mathrm{Sym}^+(p,\, \mathbb{R}))$ 上の積分 J_1 を

$$J_1(f) = \int_G f(\phi(g)\, \nu_{\ell,G}(dg) = \int_G f(gg')\, \nu_{\ell,G}(dg)$$

で定める．ただし，$\nu_{\ell,G}$ は $G=\mathrm{GT}^+(p,\mathbb{R})$ 上の左ハール測度である．J_1 は不変となる．実際，$\tilde{g}\in\mathrm{GT}^+(p,\mathbb{R})$, $f\in\mathbb{K}(\mathrm{Sym}^+(p,\mathbb{R}))$ に対して，

$$\begin{aligned}
J_1(L_{\tilde{g}}f) &= \int_G f(\varphi(\tilde{g}^{-1},\,\phi(g)))\,\nu_{\ell,G}(dg) = \int_G f(g^{-1}\phi(g)(\tilde{g}^{-1})')\,\nu_{\ell,G}(dg)\\
&= \int_G f(g^{-1}gg'(\tilde{g}^{-1})')\,\nu_{\ell,G}(dg) = \int_G f(\phi(\tilde{g}^{-1}g))\,\nu_{\ell,G}(dg)\\
&= \int_G f(\phi(g))\,\nu_{\ell,G}(dg) = J_1(f)
\end{aligned}$$

となることからわかる．

つぎに，$\mathbb{K}(\mathrm{Sym}^+(p,\mathbb{R}))$ 上の積分 J_2 を

$$J_2(f)=\int_{\mathscr{X}} f(x)\,\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x)|^{(p+1)/2}}$$

で定める．ただし，dx は $\mathrm{Sym}^+(p,\mathbb{R})$ に制限したルベーグ測度である．例 $B.6$(ii) から J_2 も不変積分となることがわかる．実際，$g\in\mathrm{GT}^+(p,\mathbb{R})$ に対して，

$$J_2(L_gf) = \int_{\mathscr{X}} f(\varphi(g^{-1},\,x))\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x)|^{(p+1)/2}} = \int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x(g^{-1})')\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x)|^{(p+1)/2}}$$

となる．$y=g^{-1}x(g^{-1})'$ とおけば，$y\mapsto gyg'$ のヤコビアンは $|\mathrm{Det}\,(g)|^{p+1}$ となるので，

$$\int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}x(g^{-1})')\frac{dx}{|\mathrm{Det}\,(x)|^{(p+1)/2}} = \int_{\mathscr{X}} f(y)\frac{|\mathrm{Det}\,(g)|^{p+1}dy}{|\mathrm{Det}\,(gyg')|^{(p+1)/2}} = J_2(f)$$

となることからわかる．したがって，ある正の定数 c が存在して，

$$J_2(f)=cJ_1(f)$$

となる．

さらに，写像 $\xi:\,\mathrm{M}(n,\,p,\,\mathbb{R})\to\mathrm{Sym}^+(p,\,\mathbb{R})$ を

$$\xi(z)=z'z,\qquad (z\in\mathrm{M}(n,\,p,\,\mathbb{R}))$$

で定め，$\mathbb{K}(\mathrm{Sym}^+(p,\mathbb{R}))$ 上の積分 J_3 を

$$J_3(f)=\int_{\mathscr{X}} f(\xi(z))\,\frac{dz}{|\mathrm{Det}\,(z'z)|^{n/2}}$$

で定める．ただし，dz は $\mathrm{M}(n,\,p,\,\mathbb{R})$（ランクが p なので）に制限したルベーグ測度である．J_3 も $\mathbb{K}(\mathrm{Sym}^+(p,\mathbb{R}))$ 上の不変積分となる．実際，$g\in\mathrm{GT}^+(p,\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
J_3(L_gf) &= \int_{\mathscr{X}} f(\varphi(g^{-1},\,\xi(z)))\,\frac{dz}{|\mathrm{Det}\,(z'z)|^{n/2}} = \int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}\xi(z)(g^{-1})'))\,\frac{dz}{|\mathrm{Det}\,(z'z)|^{n/2}}\\
&= \int_{\mathscr{X}} f(g^{-1}z'z(g^{-1})'))\,\frac{dz}{|\mathrm{Det}\,(z'z)|^{n/2}} = \int_{\mathscr{X}} f(\xi(z(g^{-1})'))\,\frac{dz}{|\mathrm{Det}\,(z'z)|^{n/2}}
\end{aligned}$$

となる．$y = z(g^{-1})'$ とおけば，変換 $y \mapsto yg'$ のヤコビアンは $|\mathrm{Det}\,(g)|^n$ となるので，

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{X}} f(\xi(z(g^{-1})'))\,\frac{dz}{|\mathrm{Det}\,(z'z)|^{n/2}} &= \int_{\mathscr{X}} f(\xi(y)'))\,\frac{|Det(g)|^n dy}{|\mathrm{Det}\,((yg')'yg')|^{n/2}} \\ &= \int_{\mathscr{X}} f(\xi(y)'))\,\frac{dy}{|\mathrm{Det}\,(y'y)|^{n/2}} = J_3(f)\end{aligned}$$

となることよりわかる．したがって，ある正の定数 $\tilde{c}$ が存在して，

$$J_2 = \tilde{c} J_3$$

となる．

最後に，定数 $c, \tilde{c}$ を定める．そのために，

$$\nu_{\ell,G}(g) = \frac{dg}{\Pi_{i=1}^p g_{ii}^i}$$

と

$$f(x) = |\mathrm{Det}\,(x)|^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

とおく．すると，

$$J_1(f) = 2^{np/2-p}\pi^{p(p-1)/4}\Pi_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \tag{B.5}$$

となる．また，

$$J_2(f) = 2^{np/2}\pi^{p(p-1)/4}\Pi_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \tag{B.6}$$

となる．したがって，

$$c = 2^p$$

となる．また，

$$J_3(f) = (2\pi)^{np/2}$$

となる．したがって，

$$\tilde{c} = \pi^{p(p-1)/4}\Pi_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Big/ \pi^{np}$$

となる． □

付 録C　等質錐体上のウイシャート分布

C.1　等質錐体上のウイシャート NEF

$\mathcal{V}$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．$\mathcal{V}$ の部分集合 C が，錐体であるとは，

$$x \in C,\, \lambda > 0 \Longrightarrow \lambda x \in C$$

をみたすときをいう．$\mathcal{V}$ の部分集合 S が凸であるとは，

$$x_1,\, x_2 \in S,\, 0 < \lambda < 1 \Longrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$$

をみたすときをいう．$C \subset \mathcal{V}$ が凸錐体であるとは，

$$x_1,\, x_2 \in C,\, \lambda_1,\, \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$$

をみたすときをいう．錐体 C が固有（proper）であるとは，

$$\bar{C} \cap (-\bar{C}) = \{0\}$$

のときをいう．ただし，$\bar{C}$ は C の閉包である．また，

$$\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset \longrightarrow C + (-C) = \mathcal{V}$$

である．ただし，$\mathrm{Int}(C)$ は C の内部とした．

任意の錐体 C に対して，閉双対錐体 $C^{\#}$ を

$$C^{\#} = \{y \in \mathcal{V}^* :\, \langle y,\, x\rangle \geq 0,\, {}^{\forall}x \in C\}$$

で定める．また，開凸錐体 C の開双対錐体 C^* を

$$C^* = \{y \in \mathcal{V}^* :\, \langle y,\, x\rangle > 0,\, {}^{\forall}x \in \bar{C} \setminus \{0\}\}$$

で定める．

開凸錐体 C に対して，$\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ の部分空間 $G(C)$ を

$$G(C) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}) :\, gC = C\}$$

で定める．ただし，$\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ への線形写像を元に持つ群である．$G(C)$ は $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ の閉部分空間となる．開錐体 C が等質であるとは，$G(C)$ が C に推移的に作用するときをいう．すなわち，任意の $x_1,\, x_2$ に対して，ある元 $g \in G(C)$ が存在して．$x_1 = gx_2$ とできることであ

る．G を $G(C)$ の単位元成分（$G(C)$ の単位元 e と連結な部分）とする．G の C への作用 φ を

$$\varphi :\, G \times C \to C, \qquad (g,\, x) \mapsto \varphi(g,\, x) =: gx$$

で定義する．さらに，C 上の測度 μ の集合への G の作用 L_g を

$$L_g\mu(B) = \mu(g^{-1}(B)), \qquad B \subset C$$

で定める．

命題 C.1 C は固有な開凸錐体とする．固定した $x_0 \in C$ に対して，x_0 のアイソトロピー群

$$G_{x_0} := \{g \in G :\, gx_0 = x_0\} \subset G$$

はコンパクトである．

証明：Faraut and Korányi (1996, page 5) を参照. □

命題 C.2 C は等質錐体とする．写像

$$G \times C \to C \times C, \qquad (g,\, x) \mapsto (gx,\, x) \tag{C.1}$$

は連続であり，この写像の逆写像による任意のコンパクト集合の像はコンパクトである．

証明：信じることにする． □

　この節の以後では，C は等質錐体とし，有限次元実ベクトル空間 $\mathcal{V}$ に含まれるとする．G を $G(C)$ の単位元成分し，$\chi : G \to \mathbb{R}^+$ を群 G の指標とする．すなわち，χ は連続で

$$\chi(e) = 1, \qquad \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2), \qquad g_1,\, g_2 \in G$$

である．
　定理 $B.2$ から各指標 χ に対して，乗数倍を除いて，一意的に相対不変積分が存在する：すなわち，$f \in \mathbb{K}(C)$ に対して，

$$J^\chi(L_g f) = \chi(g) J^\chi(f)$$

となる．ν^χ を積分 J^χ に対応するラドン測度とすれば，

$$g\nu^\chi(B) = \nu^\chi(g^{-1}B) = \chi(g)\nu^\chi(B), \qquad B \subset C$$

である．
　任意の $\theta \in \mathcal{V}^*$ に対して，ν^χ のラプラス変換を

$$L_{\nu^\chi}(\theta) = \int_C \exp\langle\theta,\, c\rangle\, d\nu^\chi(dx) \tag{C.2}$$

で定める．

命題 C.3 χ を群 G に指標とし，積分 $(C.2)$ はある元 $\theta \in \mathcal{V}*$ で収束すると仮定する．このとき，

$$-C^* = \{\theta^* \in \mathcal{V}^* :\, L_{\mu^\chi}(\theta) < \infty\}$$

となる．$\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ は C^* の点列で，C^* の境界上の点 θ_0 に収束すると仮定する．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} L_{\nu^\chi}(\theta_n) = \infty$$

となる．

証明：任意の $x \in C$ に対して，

$$\theta \in C^* \iff -\langle \theta,\, x\rangle < 0 \iff L_{\nu^\chi}(\theta) < \infty$$

から命題の前半部分はわかる．後半部は Faraut and Korányi (1994, page 11) を参照. □

補題 C.1 任意の $\theta \in -C^*$ と $g \in G$ に対して，

$$L_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta) = \chi(g)L_{\chi^\chi}$$

となる．

証明：

$$\begin{aligned} L_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta) &= \int_C \exp\langle {}^t(g^{-1})\theta,\, x\rangle\, \nu^\chi(dx) = \int_C \exp\langle \theta,\, g^{-1}x\rangle\, \nu^\chi(dx) \\ &= J^\chi(L_g(\exp\langle\theta,\,\cdot\rangle)) = \chi(g)J^\chi(\exp\langle\theta,\,\cdot\rangle) \\ &= \chi(g)\int_C \exp\langle\theta,\, x\rangle\, \nu^\chi(dx) = \chi(g)L_{\nu^\chi}(\theta) \end{aligned}$$

よりわかる． □

命題 C.4 (Bourbaki (1963, 7 章・§2・命題 7a)) G の任意の連続指標 $\chi :\, G \to \mathbb{R}^+$ に対して，C 上の正値連続関数 n^χ が存在して，すべての $x \in C$ と $g \in G$ に対して，

$$n^\chi(gx) = \chi(g)n^\chi(x)$$

が成立する．

証明：信じることにする． □

$\boxed{C \text{ 上の不変測度}}$ C 上の測度 ν と積分 J を

$$\nu(dx) = \frac{\nu^\chi(dx)}{n^\chi(x)}, \qquad J(f) = \int_C f(x)\nu(dx), \qquad f \in \mathbb{K}(C)$$

で定めると，ν は不変測度となる．実際，$f \in \mathbb{K}(C)$ に対して，

$$\begin{aligned} J(L_g f) &= \int_C f(g^{-1}x)\,\nu(dx) = \int_C f(g^{-1}x)\,\frac{\nu^\chi(dx)}{n^\chi(x)} = \int_C f(g^{-1}x)\,\frac{\nu^\chi(dx)}{n^\chi(gg^{-1}x)} \\ &= \int_C \frac{f(g^{-1}x)\,\nu^\chi(dx)}{\chi(g)n^\chi(g^{-1}x)} = \frac{1}{\chi(g)}J^\chi\left(L_g\left(\frac{f}{n^\chi}\right)\right) = \frac{\chi(g)}{\chi(g)}J^\chi\left(\frac{f}{n^\chi}\right) \\ &= \int_C \frac{f(x)}{n^\chi(x)}\,\nu^\chi(dx) = \int_C f(x)\,\nu(x) \end{aligned}$$

よりわかる．

$\boxed{\text{キュムラント関数}}$ 任意の $\theta \in -C^*$ に対して，

$$k_{\nu^\chi}(\theta) = \log L_{\nu^\chi}(\theta)$$

とおけば，k_{ν^χ} は C 上で実解析的勝つ狭義凸関数となる．また，補題 2.1 より，任意の $\theta \in -C^*$ に対して，

$$\dot{k}_{\nu^\chi}(\theta) = \int_C x \exp\{\langle \theta,\, x\rangle - k_{\nu^\chi}(\theta)\}\, \nu^\chi(dx) \in C$$

となる．さらに，$\theta, \xi, \eta \in -C^*$ に対して，

$$\langle \xi_1,\, \ddot{k}_{\nu^\chi}(\theta)(\eta)\rangle \;=\; \int_C \langle \xi,\, x - \dot{k}_{\nu^\chi}(\theta)\rangle \cdot \langle \eta,\, x - \dot{k}_{\nu^\chi}(\theta)\rangle \exp\{\langle \theta,\, x\rangle - k_{\nu^\chi}(\theta)\}\, \nu^\chi(dx)$$

となる．また，命題 $C.3$ と k_{ν^χ} の狭義凸性から

$$\dot{k}_{\nu^\chi} :\, -C^* \to C$$

は全単射となる．さらに，$\dot{k}_{\nu^\chi}$ の逆写像を

$$\psi_{\nu^\chi} :\, C \to -C^*$$

で定める．

補題 C.2 任意の $g \in G$ に対して，

$$\dot{k}_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta) = g\dot{k}_{\nu^\chi}(\theta), \qquad \psi_{\nu^\chi}(g^{-1}x) = {}^t g \psi_{\nu^\chi}(x) \qquad (\theta \in -C^*,\, x \in C)$$

となる．

証明：ν^χ が相対不変であることから，補題 $C.1$ を用いる：:任意の $g \in G,\, \theta \in -C^*$ に対して，

$$\begin{aligned} k_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta) &= \log L_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta) = \log\{\chi(g) L_{\nu^\chi}(\theta)\} = \log L_{\nu^\chi}(\theta) + \log \chi(g) \\ &= k_{\nu^\chi}(\theta) + \log \chi(g) \end{aligned}$$

がわかる．これより

$$\begin{aligned} \dot{k}_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta) &= \int_C x \exp\{\langle {}^t(g^{-1})\theta,\, x\rangle - k_{\nu^\chi}({}^t(g^{-1})\theta)\}\, \nu^\chi(dx) \\ &= \int_C x \exp\{\langle \theta,\, g^{-1}x\rangle - k_{\nu^\chi}(\theta) - \log\chi(g)\}\, \nu^\chi(dx) \\ &= \chi(g^{-1}) g \int_C g^{-1}x \exp\{\langle \theta,\, g^{-1}x\rangle - k_{\nu^\chi}(\theta)\}\, \nu^\chi(dx) \\ &= \chi(g^{-1}) g \chi(g) \int_C x \exp\{\langle \theta,\, x\rangle - k_{\nu^\chi}(\theta)\}\, \nu^\chi(dx) \\ &= \chi(g^{-1}) g \chi(g) \dot{k}_{\nu^\chi}(\theta) = g\dot{k}_{\nu^\chi}(\theta) \end{aligned}$$

からわかる．ただし，三番目の等号は $-\log\chi(g) = \log(1/\chi(g)) = \log\chi(g^{-1})$， 最後から 2 番目の等号は，$\nu^{\chi}$ が乗因子 χ の相対不変測度であること，最後の等号は $\dot{k}_{\nu^{\chi}}$ の定義をそれぞれ用いた．

つぎに，補題の後半部分を示す．この補題の第一の等式を用いると

$$\dot{k}_{\nu^{\chi}}({}^t g\psi_{\nu^{\chi}}(x)) = g^{-1}\dot{k}_{\nu^{\chi}}(\psi_{\nu^{\chi}}(x)) = g^{-1}x$$

であること，$\psi_{\nu^{\chi}}(\dot{k}_{\nu^{\chi}}(\theta) = \theta$ ，および $\dot{k}_{\nu^{\chi}}(\psi_{\nu^{\chi}}(x)) = x$ であることから

$${}^t g\psi_{\nu^{\chi}}(x) = \psi_{\nu^{\chi}}(\dot{k}_{\nu^{\chi}}({}^t g\psi_{\nu^{\chi}}(x))) = \psi_{\nu^{\chi}}(g^{-1}\dot{k}_{\nu^{\chi}}(\psi_{\nu^{\chi}}(x))) = \psi_{\nu^{\chi}}(g^{-1}x)$$

よりわかる． □

$\boxed{\text{命題 } C.4 \text{ の } n^{\chi} \text{ の構成}}$ 指標 $\chi : G \to \mathbb{R}^+$ を持つ相対不変測度を ν^{χ}，この測度に対応する相対不変積分を J^{χ} とする．すなわち，

$$\nu^{\chi}(g^{-1}B) = \chi(g)\nu^{\chi}(B), \qquad (B \subset C), \qquad J^{\chi}(f) = \int_C f(x)\,\nu^{\chi}(dx), \qquad f \in \mathbb{K}(C),$$

である．相対不変測度 ν^{χ} は，$\theta \in -C^*$ に対して，

$$L_{\nu^{\chi}}(\theta) = \int_C \exp\langle\theta, x\rangle\,\nu^{\chi}(dx) < \infty \tag{C.3}$$

と仮定とする．このとき，$\psi_{\nu^{\chi}} : C \to -C^*$ を用いて，関数 $n^{\chi} : G \to \mathbb{R}^*$ を

$$n^{\chi}(\sigma) = \int_C \exp\langle\psi_{\nu^{\chi}}(\sigma),\, x\rangle\,\nu^{\chi}(dx) \tag{C.4}$$

で定義する．

命題 C.5 任意の $g \in G$ に対して，

$$n^{\chi}(g\sigma) = \chi(g)n^{\chi}(\sigma), \qquad (\sigma \in C)$$

となる．さらに，$\tilde{n} : G \to \mathbb{R}$ で $\tilde{n}(g\sigma) = \chi(g)\tilde{n}(\sigma)$ をみたすのもが存在すれば，ある正の数 c があって，$n^{\chi} = c\tilde{n}$ となる．

証明：n^{χ} の定義と補題 $C.2$ から

$$\begin{aligned}
n^{\chi}(g\sigma) &= \int_C \exp\langle\psi_{\nu^{\chi}}(g\sigma),\, x\rangle\,\nu^{\chi}(dx) \\
&= \int_C \exp\langle{}^t(g^{-1})\psi_{\nu^{\chi}}(\sigma),\, x\rangle\,\nu^{\chi}(dx) \\
&= \int_C \exp\langle\psi_{\nu^{\chi}}(\sigma),\, g^{-1}x\rangle\,\nu^{\chi}(dx) \\
&= \int_C L_g\exp\langle\psi_{\nu^{\chi}}(\sigma),\, x\rangle\,\nu^{\chi}(dx) \\
&= J^{\chi}(\exp\langle\psi_{\nu^{\chi}}(\sigma),\,\cdot\rangle) = \chi(g)J^{\chi}(\exp\langle\psi_{\nu^{\chi}}(\sigma),\,\cdot\rangle) \\
&= \chi(g)n^{\chi}(\sigma)
\end{aligned}$$

よりわかる．また，一意性については，乗因子 χ に対応する相対不変測度は乗数倍を除いて一意的なことからわかる． □

定義 C.1 乗因子 $\chi : G \to \mathbb{R}^+$ は $(C.3)$ をみたす．乗因子 χ をもつ C 上のウイシャート分布族を

$$\mathcal{F}(\nu^\chi) = \big\{W(\sigma,\, \nu^\chi)(dx) = \frac{1}{n^\chi(\sigma)} \exp[\langle \psi_{\nu^\chi}(\sigma),\, x\rangle]\, \nu^\chi(dx)\big\}, \qquad (\sigma \in C)$$

で定める．

注意 C.1 (i) 上の定義の母数化は認定可能である：すなわち，

$$W(\sigma_1,\, \nu^{\chi_1}) = W(\sigma_2,\, \nu^{\chi_2}) \Longrightarrow (\sigma_1,\, \chi_1) = (\sigma_2,\, \chi_2).$$

(ii) $\nu(dx) = \{n^\chi(x)\}^{-1} n^\chi(dx)$ は不変測度となり，

$$W(\sigma,\, \nu^\chi)(dx) = \frac{n^\chi(x)}{n^\chi(\sigma)} \exp[\langle \psi_{\nu^\chi}(\sigma),\, x\rangle]\, \nu(dx)$$

と書き直せる．
(iii) $g \in G$ に対して，$\chi(g) = \mathrm{Det}\,(g)$ としたとき，$(C.4)$ で定義した n^χ を $n^{\mathrm{Det}\,(\cdot)}$ と書くとする．すなわち,，$n^{\mathrm{Det}\,(\cdot)}(gx) = |\mathrm{Det}\,(g)|\, n^{\mathrm{Det}\,(\cdot)}(x)$ をみたす．ただし，Det は群 G の行列表現に対する行列式と考える．C 上の測度 $\lambda : G \to \mathbb{R}^+$ を $\lambda(dx) = n^{\mathrm{Det}\,(\cdot)}(x)\nu(dx)$ で定める．すなわち，λ は C 上に制限したルベーグ測度である．ウイシャート分布族は

$$W(\sigma,\, \chi)(dx) = \frac{n^\chi(s)}{n^\chi(\sigma)} \exp[\langle \psi_{\nu^\chi}(\sigma),\, x\rangle] \frac{\lambda(dx)}{n^{\mathrm{Det}\,(\cdot)}(x)}$$

とも表現できる．ちなみに，$C = \mathrm{Sym}^+(p,\, \mathbb{R})$ のとき，ヤコビアンの計算から

$$n^{\mathrm{Det}\,(\cdot)}(x) = \mathrm{Det}\,(x)^{(p+1)/2}$$

となる． □