今野　(2005 年 1 月 27 日)

筑波大学大学院理工学研究科集中講義「数学特別講義 I」レポート問題

$\boxed{\text{問題 1}}$　1 次元実確率変数 X が正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従う場合を考える．ただし，$\sigma>0$ とする．このとき，X^2 は母数 $(\alpha=1/2,\,\beta=2\sigma^2)$ のガンマ分布従うことを示せ．

$\boxed{\text{問題 2}}$　$p,\,a,\,b>0$ とする．X の分布を

$$\mu_{-p,\,a,\,b}(dx)=Cx^{-(p+1)}e^{-\frac{1}{2}(ax+\frac{b}{x})}\,\mathbb{I}_{(0,\,\infty)}(x)dx$$

とし，Y の分布を

$$\gamma_{p,\,2/a}(dy)=C'y^{p-1}e^{-\frac{1}{2}ay}\,\mathbb{I}_{(0,\,\infty)}(y)dy$$

とする．ただし，$dx,\,dy$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とし，$C,\,C'$ は基準化定数である．いま，

$$\begin{cases} U &= \frac{1}{X+Y} \\ V &= \frac{1}{X}-\frac{1}{X+Y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X &= \frac{1}{U+V} \\ Y &= \frac{V}{U(U+V)} \end{cases}$$

とおいたとき，U と V は独立に $\mu_{-p,\,b,\,a}$ と $\gamma_{p,\,b/2}$ に従うことを確認せよ．
ヒント：赤平 (2003, page 203) を参照．

$\boxed{\text{問題 3}}$　（確率）測度

$$\mu(dx)=\frac{1}{2}\exp\{-|x|\}\,dx$$

を考える．

(i) 確率測度 μ に対して

$$L_\mu(\theta)=\int\exp(\theta x)\mu(dx)\quad \text{および}\quad D(\mu)=\{\theta\in\mathbb{R}:\,L_\mu<\infty\}$$

を求めたうえで，μ によって生成される自然指数分布族 $\mathcal{F}(\mu)$ を書け．

(ii) $\mathcal{F}(\mu)$ の平均領域 $\mathscr{M}_{\mathcal{F}}=\dot{k}_\mu(\Theta(\mu))$ を求めよ．ただし，$\Theta(\mu)=\mathrm{Int}D(\mu)$ である．

(iii) $k_\mu(\theta)=\log L_\mu(\theta)$，$\dot{k}_\mu(\theta)$ を $k_\mu(\theta)$ の導関数としたとき，$\psi_\mu(m)=\{\dot{k}_\mu(\theta)\}^{-1}$ を求めよ．ただし，$m\in\mathscr{M}_{\mathcal{F}}$ である．

(iv) $\mathcal{F}(\mu)$ の分散関数が

$$V_{\mathcal{F}}(m)=1+m^2+\sqrt{1+m^2}\qquad (m\in\mathscr{M}_{\mathcal{F}})$$

で与えられることを示せ．

$\boxed{\text{問題 4}}$　$n\geq 1$ とする．$S:2\times 2$ は確率測度

$$W(ds)=C(s_{11}s_{22}-s_{12}^2)^n\exp\Big\{-\frac{1}{2}(s_{11}+s_{22})\Big\}\,\mathbb{I}_{\mathrm{Sym}^+(2,\,\mathbb{R})}(s)ds,\qquad s=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22}\end{pmatrix}$$

を持つとする．ただし，ds は $\mathrm{Sym}(2,\,\mathbb{R})$ 上のルベーグ測度で

$$C=\frac{1}{2^{2n}\sqrt{\pi}\Gamma(n)\Gamma(n-(1/2))}$$

である．

(i) T_{11} と T_{22} の分布を確率密度関数の変換公式を利用して求めよ．ただし，

$$T_{11} = S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}}, \quad T_{12} = \frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad T_{22} = S_{22}$$

ヒント：赤平 (2003, page 203) を参照.

(ii) (U, V_1, V_2) の同時確率密度関数を求めよ．ただし，

$$U = S_{11} + S_{22},\ V_1 = S_{11} - S_{22},\ V_2 = \frac{S_{12}}{2}$$