第G章　大数の強法則と中心極限定理の証明

G.1　大数の強法則の証明

G.1.1　Borel-Cantelli の補題

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ を確率空間とする．$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Ω の部分集合列とする．このとき

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$
$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \lim_{m\to\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

と定める．これを

$$\limsup A_n := \{\omega \in \Omega;\, \omega \in A_n,\ \text{i.o.}\} = \{A_n,\ \text{i.o.}\}$$

とも書くことにする．また

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n$$

となるとなることに注意する．．なぜならば $\omega \in \liminf A_n$ ならば，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\omega \in \bigcap_{m=n_0}^{\infty} A_m$ となるので，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ である．よって　$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ がわかる．

また

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}, \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$$

となる．さらに $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ のとき，Fatou の補題より

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\Big(\liminf A_n\Big) &= \int \mathbb{1}_{\liminf A_n}(x)\, d\mathsf{Pr}(x) \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)\, d\mathsf{Pr}(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}(x)\, \mathsf{Pr}(x) = \liminf_{n\to\infty} \mathsf{Pr}(A_n)
\end{aligned}$$

となる．

補題 G.1. (Borel-Cantelli の第 1 補題) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Pr}(A_n) < \infty \implies \mathsf{Pr}\big(A_n, \text{ i.o.}\big) = 0.$$

Proof. $N(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\,(\omega \in \Omega)$ と定める．単調収束定理から

$$\mathsf{E}\big[N\big] = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\,\mathsf{Pr}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\,d\mathsf{Pr}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Pr}(A_n) < \infty$$

となる．よって $\mathsf{Pr}\big(N < \infty\big) = 1$ がわかる．したがって $\mathsf{Pr}\big(A_n, \text{ i.o.}\big) = 0$ がわかる． □

定理 G.2. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数列とする．このとき次の 2 つの条件は同値である．

(1) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{X_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して，さらなる部分列 $\{X_{n(k(\ell))}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が存在して $X_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} X\,(\ell \to \infty)$ となる．すなわち

$$\mathsf{Pr}\left(\lim_{\ell\to\infty} X_{n(k(\ell))} = X\right) = 1.$$

Proof. $\underline{(1) \implies (2) \text{ の証明}}$: $\{\epsilon(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}$ は正の実数列で $\epsilon(\ell) \downarrow 0\,(\ell \to \infty)$ とする．$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ から, 各 $\ell \geq 2$ に対して $n(k(\ell)) > n(k(\ell-1))$ が存在して

$$\mathsf{Pr}\left(|X_{n(k(\ell))} - X| > \epsilon(\ell)\right) \leq \frac{1}{2^{\ell}}$$

とできる．これより

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathsf{Pr}\left(|X_{n(k(\ell))} - X| > \epsilon(\ell)\right) < \infty$$

となるので, Borel-Cantelli の第 1 の補題から

$$\mathsf{Pr}\left(|X_{n(k(\ell))} - X| > \epsilon(\ell), \text{ i.o.}\right) = 0.$$

すなわち

$$\mathsf{Pr}\left(\lim_{\ell\to\infty} X_{n(k(\ell))} = X\right) = 1$$

がわかる (詳細な議論は注意 G.3 を参照のこと).

(2) $\Longrightarrow$ (1) の証明: $\forall\delta > 0$ に対して

$$y_n := \mathsf{Pr}\big(|X_n - X| > \delta\big)$$

とおく．すると任意の $\{y_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して部分列 $\{y_{n(k(\ell))}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が存在して

$$y_{n(k(\ell))} \longrightarrow 0$$

となる[1]．このことと命題 B.5 から $y_n \longrightarrow 0\,(n \to \infty)$ がわかる． □

注意 G.3. 事象 $\{\omega \in \Omega;\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ は以下のように書きかえることができる．$\forall\epsilon > 0$ に対して，ある整数 $n := n(\epsilon, \omega) \geq 1$ が存在して，$\forall m \geq 1\,(m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\big|X_{n+m}(\omega) - X(\omega)\big| < \epsilon \tag{G.1}$$

を意味する． さらに (G.1) が成立することは，$\forall\epsilon > 0$ に対して，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$\forall m \geq 1\,(m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\omega \in \Big\{\omega \in \Omega;\, \big|X_{n+m}(\omega) - X(\omega)\big| < \epsilon\Big\} \tag{G.2}$$

と同値である．これは $\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\Big\{\omega \in \Omega;\, \big|X_{n+m}(\omega) - X(\omega)\big| < \epsilon\Big\} \tag{G.3}$$

を意味する．さらに $\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\omega \in \Omega;\, \big|X_{n+m}(\omega) - X(\omega)\big| < \frac{1}{k}\right\}$$

と同値である．以上から

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega;\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \\
&\quad = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\omega \in \Omega;\, \big|X_{n+m}(\omega) - X(\omega)\big| < \frac{1}{k}\right\}
\end{aligned}$$

を得る． □

[1]なぜならば $X_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\text{a.s.}} X\,(\ell \to \infty)$ なので.

G.1.2 大数の強法則の証明

定理 G.4. $X_1, X_2, \ldots$ は対独立な確率変数列で各 $X_n\,(n \in \mathbb{N})$ は同じ分布に従い, $\mathsf{E}\bigl[|X_n|\bigr] < \infty$ とする．$\mathsf{E}\bigl[X_n\bigr] =: \mu$ と $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく．このとき

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu \qquad (n \to \infty)$$

が成立する．

大数の強法則を証明するための補題を 2 つ述べる．

補題 G.5. $n \in \mathbb{N}$ に対して $Y_n = X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq n\}$ とし,

$$T_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \tag{G.4}$$

とする．このとき

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$$

が成立する．

Proof. Y_n の定義から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Pr}\bigl(X_n \neq Y_n\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Pr}\bigl(|X_n| > n\bigr) \leq \int_0^{\infty} \mathsf{Pr}\bigl(|X_1| > t\bigr)\,dt = \mathsf{E}\bigl[|X_1|\bigr] < \infty$$

となる．よって Borel-Cantelli の第 1 の補題から

$$\mathsf{Pr}\Bigl(X_n \neq Y_n, \text{ i.o.}\Bigr) = 0$$

がわかる．すると $\omega \in \Omega$ に対して有限個の n に対して $X_n \neq Y_n$ なので

$$\lim_{n \to \infty} |S_n(\omega) - T_n(\omega)| = 0$$

となる．よって定理の主張は証明された． □

補題 G.6. 定理 G.4 と補題 G.5 の仮定のもと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{V}\bigl(Y_n\bigr)}{n^2} \leq 4\mathsf{E}\bigl[|X_1|\bigr] < \infty$$

が成立する．

Proof. Fubini の定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathsf{V}\big[Y_n\big] \le \mathsf{E}\big[Y_n^2\big] &= \int_0^\infty 2t\,\mathsf{Pr}\big(|Y_n| > t\big)\,dt = \int_0^n 2t\,\mathsf{Pr}\big(|Y_n| > t\big)\,dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{1}\{t < n\} 2t\,\mathsf{Pr}\big(|Y_n| > t\big)\,dt\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathsf{E}\big[Y_n^2\big]}{n^2} &\le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\int_0^\infty \mathbb{1}\{t < n\} 2t\,\mathsf{Pr}\big(|Y_n| > t\big)\,dt \\ &= \int_0^\infty \left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{1}\{t < n\}}{n^2}\right\} 2t\,\mathsf{Pr}\big(|Y_n| > t\big)\,dt\end{aligned}$$

となる．最後の等号は, 各項が非負なので, Fubini の定理を用いることで和と積分の記号の交換が保証されることがわかる．よって後は $\forall t \ge 0$ に対して

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \le 4 \tag{G.5}$$

を示せばよい．$m \ge 2\,(m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\sum_{n \ge m} \frac{1}{n^2} \le \int_{m-1}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{m-1}$$

となる．$t \ge 1$ のとき, (G.5) の和は $n = [t] + 1 \ge 2$ で始まるので

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \le \frac{2t}{[t]} \le 4 \tag{G.6}$$

となる[2]．$0 \le t \le 1$ の場合

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \le 2\left(1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2}\right) \le 4 \tag{G.7}$$

となる．よって (G.6), (G.7) から (G.5) がわかる． □

定理 G.4 の証明: $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$X_n^+ := \max\{X_n, 0\}, \qquad X_n^- := \max\{-X_n, 0\}$$

[2]なぜならば

$$\frac{t}{[t]} \le 2 \qquad (t \ge 1)$$

であることからわかる．

とおくと X_n^+ と X_n^- は定理 G.4 の仮定をみたし, $X_n = X_n^+ - X_n^-$ である. したがって一般性を失うことなく $X_n \geq 0\,(n \in \mathbb{N})$ と仮定してよい.

$\alpha > 1$ をとり

$$k(n) = [\alpha^n]$$

と定める. $\forall \epsilon > 0$ を取る. Chebyshev の不等式から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Pr}\Big(\big|T_{k(n)} - \mathsf{E}\big[T_{k(n)}\big]\big| > \epsilon k(n)\Big) &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{V}\big[T_{k(n)}\big]}{\{k(n)\}^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{k(n)\}^2}\sum_{m=1}^{k(n)}\mathbb{V}\big[Y_m\big] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{V}\big[Y_m\big]\sum_{n:\,k(n)\geq m}\frac{1}{\{k(n)\}^2}\end{aligned} \tag{G.8}$$

を得る. 最後の等号は, すべての項が非負なので Fubini の定理を用いて和の順番を交換した. $n \geq 1$ に対して

$$k(n) = [\alpha^n] \quad \text{かつ} \quad [\alpha^n] \geq \frac{\alpha^n}{2}$$

なので

$$\sum_{n:\,\alpha^n \geq m}\frac{1}{[\alpha^n]^2} \leq 4\sum_{n:\,\alpha^n\geq m}\frac{1}{\alpha^{2n}} \leq \frac{4}{(1-\alpha^{-2})m^2} \tag{G.9}$$

となる. (G.8) と (G.9) を合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Pr}\Big(\big|T_{k(n)} - \mathsf{E}\big[T_{k(n)}\big]\big| > \epsilon k(n)\Big) &\leq \frac{4}{(1-\alpha^{-2})\epsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}[Y_m^2]}{m^2} \\ &< \infty \qquad (\because \text{補題 G.6})\end{aligned}$$

となる. ϵ は任意だったので

$$\frac{T_{k(n)} - \mathsf{E}[T_{k(n)}]}{k(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

を得る. 有界収束定理から

$$\mathsf{E}[Y_k] \longrightarrow \mathsf{E}[X_1] \qquad (k \to \infty)$$

である. よって

$$\frac{\mathsf{E}\big[T_{k(n)}\big]}{k(n)} \longrightarrow \mathsf{E}[X_1] \qquad (n \to \infty)$$

を得る．これより

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathsf{E}[X_1] \qquad (n \to \infty)$$

がわかる．$Y_n \geq 0\,(\forall n \in \mathbb{N})$ なので, $k(n) \leq m < k(n+1)\,(m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n+1)} \leq \frac{T_m}{m} \leq \frac{T_{k(n+1)}}{k(n)}$$

である．$k(n) = [\alpha^n]$ だったので,

$$\frac{k(n+1)}{k(n)} \longrightarrow \alpha \qquad (n \to \infty)$$

である．よって

$$\frac{1}{\alpha}\mathsf{E}[X_1] \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{T_m}{m} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{T_m}{m} \leq \alpha\mathsf{E}[X_1]$$

となる．$\alpha > 1$ は任意だったので

$$\frac{T_m}{m} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathsf{E}[X_1] \qquad (m \to \infty)$$

がわかる． □

G.2 中心極限定理の証明: Lindeberg の証明

まず $\mathsf{E}[X_1^3] < \infty$ を仮定して証明をする．

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}, \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

とおくと $\mathsf{E}[Y_1] = 0$, $\mathsf{E}[Y_1^2] = 1$, $\mathsf{E}[|Y_1|^3] < \infty$ となることに注意する．$Z_1,\, Z_2,\, \ldots,\, Z_n \sim \text{i.i.d.}\,\mathsf{N}(0,\, 1)$ とし

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j, \quad S = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Z_j \sim \mathsf{N}(0,\, 1)$$

とおく．

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathsf{Pr}\big(S_n \leq x\big) \longrightarrow \mathsf{Pr}\big(S \leq x\big), \qquad (n \to \infty) \tag{G.10}$$

を示せばよい．ここで

$$g(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,\, x]}(y), \qquad (y \in \mathbb{R})$$

とおくと (G.10) を

$$\mathsf{E}\big[g(S_n)\big] \longrightarrow \mathsf{E}\big[g(S)\big], \qquad (n \to \infty) \tag{G.11}$$

と書きかえることができる．さらに $\forall\delta > 0$ に対して関数 $h_{\delta,\,x} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\,1]$ を以下のような性質をもつ関数とする．

- $h_{\delta,\,x}(y) = 1\,(y \leq x)$.
- $h_{\delta,\,x}(y) = 0\,(y \leq x + \delta)$.
- $h_{\delta,\,x}$ は有界な 3 次の導関数をもつ．3 次の導関数の絶対値の上界を C と書くことにする．

さらに $h_{\delta,\,x-\delta}(y) = h_{\delta,\,x}(y + \delta)$ と定める．すると

$$h_{\delta,\,x-\delta}(y) \leq g(y) \leq h_{\delta,\,x}(y), \qquad (y \in \mathbb{R})$$

となる．このことから $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big(S_n \leq x\big) &= \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S_n)\big] \\
&= \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S)\big] + \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S)\big] \\
&\leq \mathsf{Pr}\big(Z \leq x + \delta\big) + \big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S)\big]\big|
\end{aligned}$$

を得る．同様に

$$\mathsf{Pr}\big(S_n \leq x\big) \geq \mathsf{Pr}\big(S \leq x - \delta\big) - \big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x-\delta}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x-\delta}(S)\big]\big|$$

を得る．これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\big(S \leq x + \delta\big) + \big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S)\big]\big| \\
&\qquad \geq \mathsf{Pr}\big(S_n \leq x\big) \geq \mathsf{Pr}\big(S \leq x - \delta\big) - \big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x-\delta}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x-\delta}(S)\big]\big|
\end{aligned}$$

となる．δ を 0 に近づけると $\mathsf{Pr}\big(S \leq x \pm \delta\big)$ は $\mathsf{Pr}\big(S \leq x\big)$ に近づく．したがって

$$\mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S_n)\big] \longrightarrow \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x}(S)\big] \quad \text{と} \quad \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x-\delta}(S_n)\big] \longrightarrow \mathsf{E}\big[h_{\delta,\,x-\delta}(S)\big], \qquad (n \to \infty) \tag{G.12}$$

を示せばよい．よって $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\,1]$ を有界な 3 次の導関数をもつ関数として (G.12) を示す．

$1 \le m \le n+1$ に対して

$$T_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\bigl(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_m + \cdots + Z_n\bigr)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} \bigl|\mathsf{E}\bigl[h(S_n)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[h(S)\bigr]\bigr| &= \left|\sum_{m=1}^{n}\bigl\{\mathsf{E}\bigl[h(T_m)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[h(T_{m+1})\bigr]\bigr\}\right| \\ &\le \sum_{m=1}^{n}\bigl|\mathsf{E}\bigl[h(T_m) - h(T_{m+1})\bigr]\bigr| \end{aligned} \tag{G.13}$$

と書きかえる．次に $m = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\bigl(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_{m+1} + \cdots + Z_n\bigr)$$

とおくと

$$T_m = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_m, \qquad T_{m+1} = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_m$$

となる．Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned} h(T_m) - h(U_m) &= (T_m - U_m)\dot{h}(U_m) + \frac{1}{2}(T_m - U_m)^2\ddot{h}(U_m) \\ &\quad + \frac{1}{6}(T_m - U_m)^3\dddot{h}(U_m^*), \end{aligned} \tag{G.14}$$

$$\begin{aligned} h(T_{m+1}) - h(U_m) &= (T_{m+1} - U_m)\dot{h}(U_m) + \frac{1}{2}(T_{m+1} - U_m)^2\frac{1}{2}\dot{h}(U_m) + \ddot{h}(U_m) \\ &\quad + \frac{1}{6}(T_{m+1} - U_m)^3\dddot{h}(U_m^{**}), \end{aligned} \tag{G.15}$$

を得る．ただし $\dot{h}, \ddot{h}, \dddot{h}$ は h の 1 次, 2 次, 3 次の導関数で, U_m^*, U_m^{**} は T_m と U_m の間と T_{m+1} と U_m の間の数である．U_m は Y_m と Z_m の両方とも独立であるので

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\bigl[\dot{h}(U_m)Z_m\bigr] = \mathsf{E}\bigl[\dot{h}(U_m)Y_m\bigr] = 0, \\ &\mathsf{E}\bigl[\ddot{h}(U_m)Z_m^2\bigr] = \mathsf{E}\bigl[\ddot{h}(U_m)\bigr] = \mathsf{E}\bigl[\ddot{h}(U_m)Y_m^2\bigr], \\ &\bigl|\mathsf{E}\bigl[\dddot{h}(U_m^*)\bigr]\bigr| \le C, \ \bigl|\mathsf{E}\bigl[\dddot{h}(U_m^{**})\bigr]\bigr| \le C \end{aligned}$$

となる．上の期待値と (G.14) と (G.15) を合わせると

$$\begin{aligned} \Bigl|\mathsf{E}\bigl[h(T_m) - h(T_{m+1})\bigr]\Bigr| &= \Bigl|\mathsf{E}\bigl[h(T_m) - h(U_m) - \bigl(h(T_{m+1}) - h(U_m)\bigr)\bigr]\Bigr| \\ &\le \left|\frac{C}{6n^{3/2}}\mathsf{E}\bigl[|Z_m|^3 + |Y_m|^3\bigr]\right| \end{aligned}$$

を得る．この式を (G.12) に代入すると

$$\left|\mathsf{E}\big[h(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h(S)\big]\right| \le \frac{C}{6\sqrt{n}}\mathsf{E}\big[|Z_1|^3 + |Y_1|^3\big] \longrightarrow 0\,(n\to\infty)$$

を得る．よって Y_1 が有界な 3 次の積率をもつとき

$$S_n \rightsquigarrow S \sim \mathsf{N}(0,\,1) \qquad (n\to\infty)$$

が示せた．

最後に $\mathsf{E}\big[Y_1^3\big] < \infty$ の仮定を除くための議論を行う．そのために任意の $\epsilon > 0$ とし, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\ddot{h}(y)| \le C'$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\dddot{h}(y)| \le C'$ をみたす定数 C' をとる．$m = 1,\,2,\,\ldots,\,n$ に対して, $|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\}\\
&\qquad \le C'\left|\frac{\dddot{h}(U_m^*)Y_m^3}{6n^{3/2}}\right|\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\}\\
&\qquad \le \frac{C'\epsilon}{6n}Y_m^2\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

となる．一方 $|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}\\
&\qquad \le \left\{\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}}\right| + \left|\frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\right\}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}\\
&\qquad \le \left\{\left|\frac{\ddot{h}(U_m^{***})Y_m^2}{2n}\right| + \left|\frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\right\}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}\\
&\qquad \le \frac{C'Y_m^2}{n}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

となる．ただし U_m^{***} は T_m と U_m の間にあるものである．これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned}
&\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\\
&\qquad \le \frac{C'\epsilon}{6n}Y_m^2\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\} + \frac{C'Y_m^2}{n}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

をなる．この式と (G.15) を合わせると

$$
\begin{aligned}
\bigl|\mathsf{E}\bigl[h(S_n)\bigr]-\mathsf{E}\bigl[h(S)\bigr]\bigr| &\le \frac{C}{\sqrt{n}}\mathsf{E}\bigl[Z_1^3\bigr]+\frac{C'}{6}\epsilon\mathsf{E}\bigl[Y_1^2\mathbb{1}\{|Y_1|\le\epsilon\sqrt{n}\}\bigr] \\
&\quad + C'\mathsf{E}\bigl[Y_1^2\{Y_1>\epsilon\sqrt{n}\}\bigr] \\
&\le \frac{C}{\sqrt{n}}\mathsf{E}\bigl[Z_1^3\bigr]+C'\epsilon+\frac{C'}{6}\mathsf{E}\bigl[Y_1^2\{Y_1>\epsilon\sqrt{n}\}\bigr] \\
&\longrightarrow \frac{C'}{6}\epsilon \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

を得る．上の式で $\epsilon\to 0$ とすれば

$$
\mathsf{E}\bigl[h(S_n)\bigr]\longrightarrow\mathsf{E}\bigl[h(S)\bigr], \qquad (n\to\infty)
$$

が証明できた． □

G.3 中心極限定理の証明: 特性関数を利用

補題 G.7. $n\in\mathbb{N}$ とする．0 を含む開区間 $I\subset\mathbb{R}$ で関数 h が n 回連続微分可能であるとき

$$
h(x)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{h^{(j)}(0)}{j!}x^j+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}h^{(n)}(t)\,dt \tag{G.16}
$$

が成り立つ．ただし $h^{(n)}h(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}h(x)\,(n\ge 1)$, $h^{(0)}(x)=h(x)$ である．

Proof. 帰納法で証明する．微積分の基本定理から

$$
h(x)-h(0)=\int_0^x h^{(1)}(t)\,dt
$$

となるので, $n=1$ のときは成立する．$n=k$ のとき (G.16) は成立すると仮定する．すると部分積分の公式から

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x(x-t)^{k-1}h^{(k)}(t)\,t &= \frac{-1}{k!}\int_0^x\left(\frac{d}{dt}(x-t)^k\right)h^{(k)}(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{k!}(x-t)^k h^{(k)}(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{k!}\int_0^x(x-t)^k h^{(k+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{k!}x^k h^{(k)}(0)+\frac{1}{k!}\int_0^x(x-t)^k h^{(k+1)}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

となり, $n=k+1$ のときも (G.16) は成立することがわかる．よって補題は証明された． □

補題 G.8. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して次の不等式が成り立つ．
(1) $\left|e^{\sqrt{-1}x} - 1\right| \le |x|$.
(2) $\left|e^{\sqrt{-1}x} - 1 - \sqrt{-1}x\right| \le \dfrac{1}{2}x^2$.
(3) $\left|e^{\sqrt{-1}x} - 1 - \sqrt{-1}x - \dfrac{1}{2}x^2\right| \le \dfrac{1}{6}|x|^3$.

Proof. $h(x) = e^{\sqrt{-1}x}$ として補題 G.16 を適用する．あとは $|e^{\sqrt{-1}x}| \le 1\,(x \in \mathbb{R})$ に注意すればよい． □

補題 G.9. 確率変数 Y は $\mathsf{E}[Y] = 0$, $\mathsf{E}[Y^2] = 1$ をみたすとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathsf{E}\left[e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}}\right] - 1\right) = -\frac{t^2}{2}, \qquad (-\infty < t < \infty)$$

が成り立つ．

Proof. 補題 G.8(3) から

$$\left|e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2Y^2}{2n}\right| \le \frac{t^3}{6n^{3/2}}|Y|^3 \tag{G.17}$$

である．つぎに $\epsilon > 0$ をとる．$|Y| \le \epsilon t\sqrt{n}$ のとき, (G.17) の右辺の $|Y|^3$ は

$$|Y|^3 = |Y|^2|Y| \le \epsilon t\sqrt{n}Y^2$$

と評価できるので,

$$\left|e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2Y^2}{2n}\right|\mathbb{1}\{|Y| \le \epsilon t\sqrt{n}\} \le \epsilon\frac{t^4}{6n}|Y|^4\mathbb{1}\{|Y| \le \epsilon t\sqrt{n}\} \tag{G.18}$$

を得る．一方 $|Y| > \epsilon t\sqrt{n}$ のとき補題 G.8(2) から

$$\begin{aligned}
&\left|e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2Y^2}{2n}\right|\mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t\sqrt{n}\} \\
&\qquad \le \left\{\left|e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}\right| + \left|\frac{t^2Y^2}{2n}\right|\right\}\mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t\sqrt{n}\} \\
&\quad \le \frac{t^2Y^2}{n}\mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t\sqrt{n}\}
\end{aligned} \tag{G.19}$$

を得る．(G.18) と (G.18) を合わせると

$$\left|e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2Y^2}{2n}\right| \le \epsilon\frac{t^2}{6n}Y^4 + \frac{t^2Y^2}{n}\mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t\sqrt{n}\}$$

となる. $\mathsf{E}[Y]=0$, $\mathsf{E}[Y^2]=1$ を用いると

$$n\left|\mathsf{E}\left[e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}}-1+\frac{t^2}{2n}\right]\right|\leq\epsilon\frac{t^2}{4}+t^2\mathsf{E}\big[Y^2\mathbb{1}\{|Y|>\epsilon t\sqrt{n}\}\big]$$

となる. よって

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\mathsf{E}\left[e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}}-1+\frac{t^2}{2n}\right]\right|\leq\epsilon\frac{t^2}{4}\searrow 0\,(\epsilon\to 0)$$

を得る. □

補題 G.10. 確率変数 Y は $\mathsf{E}[Y]=0$, $\mathsf{E}[Y^2]=1$ をみたすとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{E}\left[e^{\sqrt{-1}t\frac{Y}{\sqrt{n}}}\right]\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n=e^{-t^2/2},\qquad(-\infty<t<\infty)$$

が成り立つ.

Proof. 笠原 (2010, pp.162-163) を借用. □

中心極限定理の証明: $j=1,\,2,\ldots,\,n$ に対して

$$Y_j=\frac{X_j-\mu}{\sigma}$$

とし

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}+\frac{X_2-\mu}{\sigma}+\cdots+\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\big(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n\big)$$

とおく. すると補題 G.9 から $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\big[e^{\sqrt{-1}tS_n}\big]=\lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{E}\left[e^{\sqrt{-1}t\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}\right]\right)^2=e^{-t^2/2}$$

を得る. 定理 F.13 から

$$S_n\rightsquigarrow\mathsf{N}(0,\,1),\qquad(n\to\infty)$$

がわかる. □

G.4 中心極限定理の証明: Stein の方法による証明

定義 G.11. $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$ と関数 $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathsf{E}\big[|h(Z)|\big] < \infty$ をみたすとする.

$$f_h(x) = \frac{\mathsf{E}\big[h(Z)\mathbb{1}_{(-\infty, x]}(Z)\big] - \mathsf{E}\big[h(Z)\big]\mathsf{Pr}\big(Z \le x\big)}{\phi(x)}$$
$$= e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}\big\{h(y) - \mathsf{E}[h(Z)]\big\}e^{-y^2/2}\,dy \qquad \text{(G.20)}$$

で定義される関数 $f_h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を h に付随する Stein 関数 (Stein function) とよぶ. ただし $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,(-\infty < x < \infty)$ である.

補題 G.12. $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$ とし, 関数 $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathsf{E}\big[h(Z)\big] < \infty$ をみたすとする. さらに関数 $f_h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は h に付随する Stein 関数とする. 関数 h が連続ならば, f_h は連続微分可能で $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\dot{f}_h(x) - xf_h(x) = h(x) - \mathsf{E}\big[h(Z)\big] \qquad \text{(G.21)}$$

をみたす. ただし $\dot{f}_h(x) = \dfrac{d}{dx}f_h(x)$ である.

Proof. Libniz の公式と微積分学の基本定理より, f_h は微分可能である. 実際

$$\dot{f}_h(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}\big\{h(y) - \mathsf{E}\big[h(Z)\big\}e^{-y^2/2}\,dy\right)$$
$$= xe^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}\big\{h(y) - \mathsf{E}\big[h(Z)\big\}e^{-y^2/2}\,dy + \big\{h(x) - \mathsf{E}\big[h(Z)\big]\big\}$$

となることから (G.21) をみたすことがわかる. よって f_h は連続微分可能となることもわかる. □

X を任意の確率変数とし, 関数 $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathsf{E}\big[h(Z)\big] < \infty$ をみたすとする. すると補題 G.12 より

$$\dot{f}_h(X) - Xf_h(X) = h(X) - \mathsf{E}\big[h(Z)\big]$$

となる. 両辺の期待値を X に関してとると

$$\mathsf{E}\big[\dot{f}_h(X) - Xf_h(X)\big] = \mathsf{E}\big[h(X)\big] - \mathsf{E}\big[h(Z)\big]$$

となる. 上の式の絶対値を評価するためには

$$\big|\mathsf{E}\big[\dot{f}_h(X) - Xf_h(X)\big]\big|$$

を評価すればよいことがわかる.

補題 G.13. $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt\,(x \in \mathbb{R})$ とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $x > 0$ に対して

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \leq \frac{1}{x}.$$

(2) $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$-\frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \leq x \leq \frac{(1+x^2)\big(1-\Phi(x)\big)}{\phi(x)}.$$

Proof. (1) の証明:

$$1-\Phi(x) = \int_x^\infty \phi(t)\,dt = \int_x^\infty \left\{-\frac{\dot{\phi}(t)}{t}\right\} dt \leq -\frac{1}{x}\int_x^\infty \dot{\phi}(t)\,dt = \frac{\phi(x)}{x}$$

より

$$\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \leq \frac{1}{x}$$

がわかる．
(2) の証明: $\forall x > 0$ に対して

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \iff \frac{(1+x^2)\big(1-\Phi(x)\big)}{\phi(x)} \geq x$$

となる．上の式は明らかに $x \leq 0$ のときも成立する．さらに $\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$ と $\phi(x) = \phi(-x)$ に注意すると

$$\frac{(1+x^2)\big(1-\Phi(-x)\big)}{\phi(x)} \geq -x \iff \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \geq -x \iff \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \leq x.$$

□

補題 G.14. X を確率変数とする．$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は非減少関数で $\mathsf{E}\big[\big|f(X)g(X)\big|\big] < \infty$ とする．このとき

$$\mathsf{E}\big[f(X)g(X)\big] \geq \mathsf{E}\big[f(X)\big]\,\mathsf{E}\big[g(X)\big]$$

が成り立つ．

Proof. X_1 と X_2 は X と同じ分布をもつ独立な確率変数 (X とも独立) とする．$f(X_1) - f(X_2)$ と $g(X_1) - g(X_2)$ は同符号であるので

$$\big\{f(X_1) - f(X_2)\big\}\big\{g(X_1) - g(X_2)\big\} \geq 0$$

となる．X_1, X_2 に関して期待値をとると

$$\mathsf{E}\bigl[\bigl\{f(X_1)-f(X_2)\bigr\}\bigl\{g(X_1)-g(X_2)\bigr\}\bigr] \geq 0$$

なので

$$\mathsf{E}\bigl[f(X_1)g(X_1)\bigr]+\mathsf{E}\bigl[f(X_2)g(X_2)\bigr]=\mathsf{E}\bigl[f(X_1)g(X_2)\bigr]+\mathsf{E}\bigl[f(X_2)g(X_1)\bigr]$$

を得る．X_1 と X_2 は独立に X と同じ分布に従うので

$$\mathsf{E}\bigl[f(X_1)g(X_2)\bigr]=\mathsf{E}\bigl[f(X_2)g(X_1)\bigr]=\mathsf{E}\bigl[f(X)\bigr]\mathsf{E}\bigl[g(X)\bigr]$$

となる．よって

$$\mathsf{E}\bigl[f(X)g(X)\bigr] \geq \mathsf{E}\bigl[f(X)\bigr]\mathsf{E}\bigl[g(X)\bigr]$$

がわかる． □

補題 G.15. $Z \sim \mathsf{N}(0,\,1)$ とする．関数 $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ はほとんどいたるところで連続微分可能で

$$K := \sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\dot{h}(x)\bigr| \tag{G.22}$$

をみたすものとする．このとき $\mathsf{E}\bigl[\bigl|h(Z)\bigr|\bigr]<\infty$ である．さらに h に付随する Stein 関数 f_h は C^2 級であり

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\ddot{f}_h(x)\bigr| \leq 2K \tag{G.23}$$

となる．

Proof. 平均値の定理より $0<{}^{\exists}C<\infty$ があって

$$\bigl|h(x)\bigr| \leq C+K|x|$$

となるので

$$\mathsf{E}\bigl[\bigl|h(Z)\bigr|\bigr] \leq C+K\mathsf{E}[|Z|]<\infty$$

を得る．

つぎに補題 G.12 より f_h は連続可能微分になることは Lebeague の有界収束定理を (G.20) に適用するとわかる．

最後に (G.23) を 3 つの段階にわけて証明する．

段階 1: $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して

$$h(x)-\mathsf{E}[h(Z)]=\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt-\int_{x}^{\infty}\dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt \tag{G.24}$$

が成り立つことを示す. ただし $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)\,dt$, $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ である. 実際, 部分積分により

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt-\int_{x}^{\infty}\dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt\\
&\quad=h(t)\Phi(t)\Big|_{-\infty}^{x}-\int_{-\infty}^{x}h(t)\phi(t)\,dt-h(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\Big|_{x}^{\infty}-\int_{x}^{\infty}h(t)\phi(t)\,dt\\
&\quad=h(x)\Phi(x)+h(x)\bigl\{1-\Phi(x)\bigr\}-\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\phi(t)\,dt\\
&\quad=h(x)-\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\phi(t)\,dt\\
&\quad=h(x)-\mathsf{E}[h(Z)]
\end{aligned}$$

からわかる.

段階 2: $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f_h(x)=-\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)}\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt-\frac{\Phi(x)}{\phi(x)}\int_{x}^{\infty}\dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt \tag{G.25}$$

が成り立つ. 実際, 部分積分の公式から

$$\begin{aligned}
f_h(x)&=e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x}\bigl\{h(t)-\mathsf{E}\bigl[h(Z)\bigr]\bigr\}e^{-t^2/2}\,dt\\
&=e^{x^2/2}\Biggl[\bigl\{h(t)-\mathsf{E}[h(Z)]\bigr\}\int_{-\infty}^{t}e^{-y^2/2}\,dy\Big|_{-\infty}^{x}\\
&\qquad-\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\biggl\{\int_{-\infty}^{t}e^{-y^2/2}\,dy\biggr\}\,dt\Biggr]\\
&=\sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\biggl[\bigl\{h(x)-\mathsf{E}[h(Z)]\bigr\}\Phi(x)-\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt\biggr] \qquad \text{(G.26)}
\end{aligned}$$

を得る. (G.24) を (G.26) に代入すると

$$\begin{aligned}
f_h(x)&=\sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\Biggl\{\biggl(\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt\\
&\qquad-\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt\biggr)\Phi(x)-\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt\Biggr\}\\
&=\frac{1}{\phi(x)}\biggl\{\bigl\{\Phi(x)-1\bigr\}\int_{-\infty}^{x}\dot{h}(t)\Phi(t)\,dt-\Phi(x)\int_{x}^{\infty}\dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt\biggr\}
\end{aligned}$$

を得る. よって (G.25) は示された.

段階 3: (G.21) から

$$\begin{aligned}
\ddot{f}_h(x)&=f_h(x)+x\dot{f}_h(x)+\dot{h}(x)\\
&=(1+x^2)f_h(x)+x\bigl\{h(x)-\mathsf{E}[h(Z)]\bigr\}+\dot{h}(x)
\end{aligned}$$

を得る. (G.24) − (G.25) から

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)f_h(x) + x\bigl\{h(x) - \mathsf{E}[h(Z)]\bigr\} \\
&\quad = -\frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))}{\phi(x)}\int_{-\infty}^{x} \dot{h}(t)\Phi(t)\,dt - \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)}\int_{x}^{\infty} \dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt \\
&\qquad + x\int_{-\infty}^{x} \dot{h}(t)\Phi(t)\,dt - x\int_{x}^{\infty} \dot{h}(t)\bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt
\end{aligned}
$$

と書ける. 補題 G.13(2) から

$$
\frac{(1+x^2)\bigl(1-\Phi(x)\bigr)}{\phi(x)} - x \geq 0, \quad \text{と} \quad \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} + x \geq 0
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&\Bigl|(1+x^2)f_h(x) + x\bigl\{h(x) - \mathsf{E}[h(Z)]\bigr\}\Bigr| \\
&\qquad \leq K\left\{\frac{(1+x^2)\bigl(1-\Phi(x)\bigr)}{\phi(x)} - x\right\}\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt \\
&\qquad + K\left\{\frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} + x\right\}\int_{x}^{\infty} \bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt
\end{aligned} \tag{G.27}
$$

を得る. 再度, 部分積分の公式から

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt &= x\Phi(x) - \int_{-\infty}^{x} t\phi(t)\,dt = x\Phi(x) + \int_{-\infty}^{x} \dot{\phi}(t)\,dt = x\Phi(x) + \phi(x), \\
\int_{x}^{\infty} \bigl\{1-\Phi(t)\bigr\}\,dt &= -x\bigl\{1-\Phi(x)\bigr\} + \int_{x}^{\infty} t\phi(t)\,dt = -x\bigl\{1-\Phi(x)\bigr\} - \int_{x}^{\infty} \dot{\phi}(t)\,dt \\
&= -x\bigl\{1-\Phi(x)\bigr\} + \phi(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. これらの式を (G.27) に代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
&\Bigl|(1+x^2)f_h(x) + x\bigl\{h(x) - \mathsf{E}[h(Z)]\bigr\}\Bigr| \\
&\quad \leq K\left\{\frac{(1+x^2)x\bigl(1-\Phi(x)\bigr)}{\phi(x)} - x\right\}\bigl\{x\Phi(x) + \phi(x)\bigr\} \\
&\qquad + K\left\{\frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} + x\right\}\bigl\{-x\bigl\{1-\Phi(x)\bigr\} + \phi(x)\bigr\} \\
&\quad = K\left\{\frac{(1+x^2)\bigl(1-\Phi(x)\bigr)\Phi(x)}{\phi(x)} + (1+x^2)\bigl(1-\Phi(x)\bigr) - x^2\Phi(x) - x\phi(x)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{(1+x^2)x\bigl(1-\Phi(x)\bigr)\Phi(x)}{\phi(x)} + (1+x^2)\Phi(x) - x^2\bigl(1-\Phi(x)\bigr) + x\phi(x)\right\} \\
&\quad = K
\end{aligned}
$$

を得る．この式と (G.22) から

$$\left|\ddot{f}_h(x)\right| \le \left|\dot{h}(x)\right| + \left|(1+x^2)f_h(x) + x\left\{h(x) - \mathsf{E}[h(Z)]\right\}\right| \le 2K$$

を得る． □

ここで与えられた $\delta > 0$ と $\forall z \in \mathbb{R}$ に対して

$$h_{\delta,\,z}(x) = \begin{cases} 1 & (x \le z), \\ 0 & (x \ge z+\delta), \\ \dfrac{\delta + z - x}{\delta} & (\text{その他}), \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{G.28}$$

と定める．すると

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\dot{h}_{\delta,\,z}(x)\right| = \frac{1}{\delta}$$

となる．したがって補題 G.13 から

$$\left|\sup_{x\in\mathbb{R}}\ddot{h}_{\delta,\,z}(x)\right| \le \frac{2}{\delta}$$

となる．よって $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|\dot{h}_{\delta,\,z}(x) - \dot{h}_{\delta,\,z}(y)\right| \le \int_{\min(x,\,y)}^{\max(x,\,y)} \left|\ddot{h}_{\delta,\,z}(t)\right| dt \le \frac{2}{\delta}|x-y|$$

を得る． □

定理 G.16. $Z \sim \mathsf{N}(0,\,1)$ と $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n Y_j$ とおく．ただし $Y_1,\, Y_2,\, \ldots,\, Y_n$ は互いに独立で $\mathsf{E}[Y_j] = 0$, $\mathsf{E}[Y_j^2] = 1$, $\mathsf{E}[|Y_j|^3] < \infty\,(j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ である．このとき

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Bigl|\mathsf{Pr}\bigl(S_n \le x\bigr) - \mathsf{Pr}\bigl(Z \le x\bigr)\Bigr| \le 2\sqrt{\frac{3}{n^{3/2}}\sum_{j=1}^n \mathsf{E}\bigl[|Y_j|^3\bigr]} \longrightarrow 0\,(n \to \infty)$$

が成り立つ．

Proof. 定数 $\delta > 0$ と $\forall z \in \mathbb{R}$ に対して, $h_{\delta,\,z}$ は (G.28) で与えられ,

$$f_h(x) := e^{x^2/2}\int_{-\infty}^x \left\{h_{\delta,\,z}(t) - \mathsf{E}[h_{\delta,\,z}(Z)]\right\} e^{-t^2/2}\,dt$$

とおく．このとき $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big(S_n \le x\big) - \mathsf{Pr}\big(Z \le x\big) &= \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big] + \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big] - \mathsf{Pr}\big(Z \le x\big) \\
&\le \Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big]\Big| + \mathsf{Pr}\big(x \le Z \le x+\delta\big) \\
&= \Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big]\Big| + \int_x^{x+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \\
&\le \Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big]\Big| + \delta \qquad \text{(G.29)}
\end{aligned}$$

となる．$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big)\Big| \quad \le \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{\delta n^{3/2}} \mathsf{E}\big[|Y_j|^3\big] \tag{G.30}$$

を示すことができれば

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\big[|Y_j|^3\big]} \tag{G.31}$$

として，これを (G.29) – (G.30) に代入して整理すると

$$\mathsf{Pr}\big(S_n \le x\big) - \mathsf{Pr}\big(Z \le x\big) \le 2\sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\big[|Y_j|^3\big]} \tag{G.32}$$

を得る．同様に

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big(Z \le x\big) - \mathsf{Pr}\big(S_n \le x\big) &\le \mathsf{Pr}\big(Z \le x\big) - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z+\delta)\big] \\
&\quad + \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z+\delta)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n+\delta)\big] \\
&\le \Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n+\delta)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z+\delta)\big]\Big| \\
&\quad + \int_x^{x+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \\
&\le \Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x-\delta}(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h_{\delta,x-\delta}(Z)\big]\Big| + \delta
\end{aligned}$$

となるので，(G.30) – (G.31) と合わせると

$$\mathsf{Pr}\big(Z \le x\big) - \mathsf{Pr}\big(S_n \le x\big) \le 2\sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\big[|Y_j|^3\big]} \tag{G.33}$$

を得る. (G.32) – (G.33) を合わせると

$$\Big|\mathsf{Pr}\big(S_n \le x\big) - \mathsf{Pr}\big(Z \le x\big)\Big| \le 2\sqrt{\frac{3}{n^{3/2}}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}\big[|Y_j|^3\big]} \tag{G.34}$$

を得る. よって (G.30) を示すことができれば, 定理は証明される.

(G.30) を示すために

$$S_n^{(j)} = S_n - \frac{1}{\sqrt{n}}Y_j \qquad (j = 1,\, 2 \,\ldots,\, n$$

とおき, W_j は Y_j と同じ分布をもち, 他のすべてと独立な確率変数とする. すると

$$\mathsf{V}[S_n] = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\mathsf{V}[W_j] = 1$$

と

$$\mathsf{E}\big[Y_j f_h(S_n^{(j)})\big] = \mathsf{E}[Y_j]\mathsf{E}\big[f_h\big(S_n^{(j)}\big)\big] = 0$$

となる. すると不等式

$$\big|S_n - S_n^{(j)} + t\big| \le |t| + \frac{1}{\sqrt{n}}|Y_j|$$

と補題 G.13 から

$$
\begin{aligned}
\Big|\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(S_n)\big]-\mathsf{E}\big[h_{\delta,x}(Z)\big]\Big| &= \Big|\mathsf{E}\big[\dot{f}_h(S_n)-S_nf_h(S_n)\big]\Big| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n\left\{\mathsf{E}\left[\frac{1}{n}W_j^2\dot{f}_h(S_n)-\frac{Y_j}{\sqrt{n}}f_h(S_n)\right]+\underbrace{\mathsf{E}\left[\frac{Y_j}{\sqrt{n}}f_h(S_n^{(j)})\right]}_{=0}\right\}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{n}W_j^2\dot{f}_h(S_n)-\frac{Y_j}{\sqrt{n}}\big\{f_h(S_n)-f_h(S_n^{(j)})\big\}\right]\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{n}W_j^2\dot{f}_h(S_n)-\frac{Y_j}{\sqrt{n}}\int_0^{Y_j/\sqrt{n}}\dot{f}_h\big(S_n^{(j)}+t\big)\,dt\right]\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}W_j\int_0^{W_j/\sqrt{n}}\dot{f}_h(S_n)\,dt-\frac{W_j}{\sqrt{n}}\int_0^{W_j/\sqrt{n}}\dot{f}_h\big(S_n^{(j)}+t\big)\,dt\right]\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}W_j\int_0^{W_j/\sqrt{n}}\left\{\dot{f}_h(S_n)-\dot{f}_h\big(S_n^{(j)}+t\big)\,dt\right\}\right]\right| \\
&\le \sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}W_j\int_0^{W_j/\sqrt{n}}\left|\dot{f}_h(S_n)-\dot{f}_h\big(S_n^{(j)}+t\big)\right|dt\right] \\
&\le \sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}|W_j|\int_0^{W_j/\sqrt{n}}\frac{2}{\delta}\left|S_n-\big(S_n^{(j)}+t\big)\right|dt\right]\Bigg] \\
&\le \sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}|W_j|\int_0^{W_j/\sqrt{n}}\frac{2}{\delta}\left\{|t|+\frac{1}{\sqrt{n}}|Y_j|\right\}dt\right] \\
&= \sum_{j=1}^n\mathsf{E}\left[\frac{|W_j|}{\delta\sqrt{n}}\left\{\frac{|W_j|^2}{n}+\frac{2}{n}|W_j||Y_j|\right\}\right] \\
&= \sum_{j=1}^n\frac{1}{\delta n^{3/2}}\Big\{\mathsf{E}\big[|W_j|^3\big]+2\mathsf{E}\big[|W_j|^2\big]\mathsf{E}\big[|Y_j|\big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n\frac{1}{\delta n^{3/2}}\Big\{\mathsf{E}\big[|W_j|^3\big]+2\mathsf{E}\big[|W_j|^2\big]\mathsf{E}\big[|W_j|\big]\Big\} \\
&\le \sum_{j=1}^n\frac{1}{\delta n^{3/2}}\Big\{\mathsf{E}\big[|W_j|^3\big]+2\mathsf{E}\big[|W_j|^3\big]\Big\} \qquad (\because \text{補題 G.14 より}) \\
&= \sum_{j=1}^n\frac{3}{\delta n^{3/2}}\mathsf{E}\big[|W_j|^3\big] \\
&= \sum_{j=1}^n\frac{3}{\delta n^{3/2}}\mathsf{E}\big[|Y_j|^3\big]
\end{aligned}
$$

を得る．よって定理は示された． □

G.5 Fisher 情報量による証明

清水 (1976, pp.141-145) を借用.

G.6 Berry-Esseen 定理

G.7 章末注釈と参考文献