第0章　準備

この章では, 集合・写像・位相の基本的な事項をまとめている. 詳しいは [39, 10, 17, 38] を参照のこと. 第 0.1 節では, 集合の言葉使いと数の集合についての基礎事項をまとめている. 第 0.2 節では, 写像の性質についての基礎事項をまとめている. 第 0.3 節では, 可算集合と非可算集合の基礎事項をまとめている. 第 0.4 節では, 距離空間と位相空間の定義と基礎事項をまとめている. 第 0.5 節では, 実数の拡張である $\mathbb{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ における演算の規則についてまとめた. これらのことは, よく理解している場合には, この章を読み飛ばしてもよい.

0.1　集合論の言葉使い

0.1.1　数の集合

数の集合に対して, 以下の記号を用いることにする.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &: \text{正の整数の集合 (0 を除く)} \\
\mathbb{Z} &: \text{整数の集合} \\
\mathbb{Q} &: \text{有理数の集合} \\
\mathbb{R} &: \text{実数の集合} \\
\mathbb{C} &: \text{複素数の集合}
\end{aligned}
$$

とする.

0.1.2　集合の記号

空集合を $\varnothing$ と記し, 集合 X のすべての部分集合をの族を 2^X と記す. すわわち

$$2^X := \big\{E;\, E \subset X\big\}$$

である.

$\mathcal{E}$ を集合 X の部分集合族としたとき

$$\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E := \bigl\{x \in X;\ \text{ある } E \in \mathcal{E} \text{ が存在して}, x \in E\bigr\},$$
$$\bigcap_{E\in\mathcal{E}} E := \bigl\{x \in X;\ \text{すべての } E \in \mathcal{E} \text{ に対して}, x \in E\bigr\}$$

と定める. 通常, 添え字集合を用いて, $\mathcal{E} = \{E_\alpha;\ \alpha \in A\} = \{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と書いたとき

$$\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha; \qquad \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$$

と表す. $\alpha \neq \beta\,(\alpha, \beta \in A)$ に対して, $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$ のとき, 集合族 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は**互いに排反**という. 部分集合族が $\mathbb{N}$ で添え字付けられるとする. すなわち, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. このとき, この集合族の**上極限**と**下極限**をそれぞれ

$$\limsup E_n := \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n; \qquad \liminf E_n := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

と定める. すると

$$\limsup E_n = \bigl\{x \in X;\ \text{可算個の } n \text{ に対して}, x \in E_n\bigr\}$$
$$\liminf E_n = \bigl\{x \in X;\ \text{有限個の } n \text{ を除いたすべてに対して}, x \in E_n\bigr\}$$

と書き直せることがわかる.

部分集合 $E, F \subset X$ のとき, $E \setminus F$ によって, それらの差を表す. すなわち

$$E \setminus F = \bigl\{x \in X;\ x \in E \text{ かつ } x \notin F\bigr\}$$

である. 集合 $E \subset X$ の**補集合**を E^c で表す. すなわち

$$E^c = X \setminus E$$

である. このとき, De Morgan の法則

$$\Bigl(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\Bigr)^c = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha^c; \qquad \Bigl(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\Bigr)^c = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha^c$$

が成立する.

集合 X と Y の**直積**を $X \times Y$ と書く. すなわち

$$X \times Y = \bigl\{(x, y) :\ x \in X, y \in Y\bigr\}$$

である. 有限個の集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の直積

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \left(\prod_{j=1}^{n} X_j \text{ とも表す}\right)$$

も同様に定義する. 特に, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を X^n とも書く.

0.2 写像

0.2.1 写像の定義と性質

定義 0.1. (1) X, Y を空でない集合とする．このとき

- X の任意の元に対して
- その元に対応する Y のある元がただ 1 つ与えられる

とする．このことを

$$f\colon X \to Y$$

と表し, f を X から Y への**写像**という．
(2) X を写像 f の**定義域**, Y を写像 f の**終域**という．

注意 0.2. (1) X, Y を空でない集合とし, $y_0 \in Y$ を 1 つ選んで固定しておく．このとき, 写像 $f\colon X \to Y$ を

$$f(x) = y_0 \qquad (x \in X)$$

により定める．この f を**定値写像**という．
(2) X を空でない集合とし, $A \subset X$ とする．このとき, X から $\{0, 1\}$ への写像 $\mathbb{1}_A\colon X \to \{0, 1\}$ を

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

により定める．この $\mathbb{1}_A$ を**定義写像** (または**特性写像**) という．
(3) X, Y を空でない集合とし, $X \subset Y$ とする．このとき, 写像 $\imath\colon X \to Y$ を

$$\imath(x) = x \qquad (x \in X)$$

により定める．$\imath$ を**包含写像**という．特に, $X = Y$ のとき, $\imath$ を id_X と表し, **恒等写像**という．
(4) X, Y を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像とし, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$ とする．このとき, 写像 $f\big|_A\colon A \to Y$ を

$$f\big|_A(x) = f(x) \qquad (x \in A)$$

により定める．この $f\big|_A$ を f の A への**制限** (または**制限写像**) という．

定義 0.3. f, g を写像とする. f と g の定義域が等しく, f と g の値域も等しく, さらに f, g の定義域の任意の元 x に対して, $f(x) = g(x)$ がなりたつとき, $f = g$ と表し, 写像 f と g は**等しい**という. また, 写像 f と g が等しくないとき, $f \neq g$ と表す.

定義 0.4. X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像とする. このとき, $G(f) \subset X \times Y$ を

$$G(f) := \big\{\big(x,\, f(x)\big);\, x \in X\big\}$$

により定め, これを写像 f の**グラフ**という.

0.2.2 像と逆像

定義 0.5. X, Y を空でない集合とし, $f : X \to Y$ を写像とする.
(1) X の部分集合 A に対して, $\big\{f(x);\, x \in A\big\}$ を写像 f による部分集合 A の**像**といい, $f(A)$ と書く. $f(X)$ を写像 f の**値域**という.
(2) Y の部分集合 B に対して, 写像 f による B の**逆像** $f^{-1}(B)$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X;\, f(x) \in B\}$$

で定める. 略記して, $\{f \in B\}$ とも書く.
(3) $f(X) = Y$ のとき, f は**全射**という.
(4) $x,\, x' \in X$, $x \neq x'$ ならば, $f(x) \neq f(x')$ であるとき, f は**単射**という.
(5) f が全射かつ単射のとき, **全単射**という.

命題 0.6. X, Y を空でない集合とし, $f : X \to Y$ を写像とし, A, A_1, $A_2 \subset X$, B, B_1, $B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次の (1) $\sim$ (10) がなりたつ.
(1) $A_1 \subset A_2$ ならば, $f(A_1) \subset f(A_2)$.
(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
(4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(5) $B_1 \subset B_2$ ならば, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
(9) $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.
(10) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

Proof. 証明は [39, pp.32-33] を参照のこと. □

命題 0.6(3)(4)(9)(10) において, 等号が成立しない例をあげる.

注意 0.7. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=x^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

により定める.
(1) $A_1=(-1,\,0]$, $A_2=[0,\,1)$ とすると

$$f(A_1\cap A_2)=\{0\};\qquad f(A_1)\cap f(A_2)=[0,\,1);$$
$$f(A_1\setminus A_2)=(0,\,1);\qquad f(A_1)\setminus f(A_2)=\varnothing$$

となる.
(2) $A=[0,\,1)$, $B=(-1,\,1)$ とすると

$$f^{-1}\bigl(f(A)\bigr)=(-1,\,1);\qquad f\bigl(f^{-1}(B)\bigr)=[0,\,1)$$

となる. □

命題 0.8. X, Y を空でない集合とし, $f:X\to Y$ を写像とし, A, A_1, $A_2\subset X$, $B\subset Y$ とする. このとき, 次の (1) $\sim$ (10) がなりたつ.
(1) f が単射ならば, $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$.
(2) f が単射ならば, $f(A_1\setminus A_2)=f(A_1)\setminus f(A_2)$.
(3) f が単射ならば, $f^{-1}\bigl(f(A)\bigr)=A$.
(4) f が全射ならば, $f\bigl(f^{-1}(B)\bigr)=B$.

Proof. 証明は [39, p.37] を参照のこと. □

0.2.3 合成写像

定義 0.9. X, Y, Z を空でない集合とし, $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とする. このとき, X から Z への写像 $g\circ f$ を

$$(g\circ f)(x)=g\bigl(f(x)\bigr) \qquad (x\in X)$$

により定める. $g\circ f$ を f と g の**合成** (または**合成写像**) という.

命題 0.10. X, Y, Z, W を空でない集合, $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to W$ を写像とする. このとき

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

である. 特に, $h\circ(g\circ f)$ と $(h\circ g)\circ f$ をともに $h\circ g\circ f$ と表す.

Proof. 証明は [39, p.40] を参照のこと. □

命題 0.11. X, Y, Z を空でない集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. このとき, (1), (2) がなりたつ.
(1) f, g が全射ならば, $g \circ f$ も全射.
(2) f, g が単射ならば, $g \circ f$ も単射.
(3) f, g が全単射ならば, $g \circ f$ も全単射.

Proof. 証明は [39, p.40] を参照のこと. □

0.3 可算集合・非可算集合・濃度

定義 0.12. (1) X, Y を空でない集合とする. X から Y への全単射が存在するとき, X と Y は**濃度が等しい**という.
(2) 有限の元から構成される集合を**有限**集合という. 無限の元から構成される集合を**無限**集合という.
(3) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を**可算**集合という.
(4) 集合 X が有限集合または可算集合のとき, X は**高々可算集合**という.
(5) 可算集合でない無限集合を**非可算**集合という.

命題 0.13. (1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である.
(2) 自然数 d に対して, $\mathbb{N}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Q}^d$ は可算集合である.
(3) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{N}$ の冪集合 $2^{\mathbb{N}}$ は濃度が等しい.
(4) X を空でない集合とする. このとき, X から X の冪集合 2^X への全射は存在しない.
(5) d を自然数とする. このとき, $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^d$ は濃度が等しい.

Proof. 証明は [39, pp.68-80] を参照のこと. □

0.4 距離と位相

0.4.1 距離空間

定義 0.14. $\mathbb{X}$ を空でない集合とする. 写像 $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ が次の 3 条件をみたすとき, d を $\mathbb{X}$ 上の**距離関数**といい, 組 $(\mathbb{X}, d)$ を**距離空間**という.
(1) 任意の $x, y \in \mathbb{X}$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ である. 特に, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ がある.
(2) 任意の $x, y \in \mathbb{X}$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) 任意の $x, y, z \in \mathbb{X}$ に対して, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

注意 0.15. d を自然数とし, $\mathbb{X}=\mathbb{R}^d$ とする. 距離関数の例として, Euclid ノルム

$$|\boldsymbol{x}|_{2,\,d}=\sqrt{\sum_{j=1}^{d}x_j^2}\qquad(\boldsymbol{x}=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_d)^\top\in\mathbb{R}^d)$$

から定まる Euclid の距離 $d(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{2,\,d}\,(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d)$ である. □

定義 0.16. $(\mathbb{X},\,d)$ を距離空間とする.
(1) $x\in\mathbb{X},\,r>0$ に対して

$$B(x;\,r)=\{y\in\mathbb{X};\,d(x,\,y)<r\}$$

を, 中心 x, 半径 r の**開球**という.
(2) $\mathbb{X}$ の部分集合 A が**開集合**であるとは, 任意の $x\in A$ に対して, $\exists r>0$ を選んで, $B(x;\,r)\subset A$ とできること[1]である.
(3) 開集合の補集合を**閉集合**という.
(4) A が**有界**であるとは, $\exists x\in\mathbb{X}$ と $\exists r>0$ を選んで $A\subset B(x;\,r)$ とできることである.

定義 0.17. $(\mathbb{X},\,d)$ を距離空間とし, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{X}$ の点列とする.
(1) $x\in\mathbb{X}$ とする. 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束するとは

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,\,x)=0$$

がなりたつことである.
(2) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは, 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $m\geq N,\,n\geq N$ ならば, $d(x_m,\,x_n)<\epsilon$ となることである.
(3) Cauchy 列が常に収束するとき, 距離空間 $\mathbb{X}$ は**完備**であるという.

定義 0.18. $(\mathbb{X},\,d_X)$ と $(\mathbb{Y},\,d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ が点 $x\in\mathbb{X}$ で**連続**であるとは, 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, 任意の $x'\in\mathbb{X}$ に対して

$$d_X(x,\,x')<\delta\;\Rightarrow\;d_Y(f(x),\,f(x'))<\epsilon$$

をみたすときをいう. 任意の $x\in\mathbb{X}$ で f が連続ならば, 単に f は連続という.

[1] $C,\,D$ を命題とする. そのとき, C が成立しないならば, 命題「$C\Rightarrow D$」は真と約束する. したがって, $A=\varnothing$ の場合には, 任意の $x\in A$ が取れないので, 空集合も開集合である. 本によっては, 上記のような論理を踏まずに空集合は開集合であることを約束する場合もあるようだ. この論法を使うと空集合は閉集合でもあることがわかる. Euclid 位相空間において, 空集合と全体集合は常に開集合でもあり, 閉集合である.

(2) 写像 f が一様連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x,\, x' \in \mathbb{X}$ に対して

$$d_X(x,\, x') < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x),\, f(x')) < \epsilon$$

がなりたつときをいう.

定義 0.19. X を集合, $(\mathbb{Y},\, d)$ を距離空間とする. $f,\, f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n\, \ldots$ を X から $\mathbb{Y}$ への写像の列とする.
(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に**各点収束**するとは, 任意の $x \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n(x),\, f(x)) = 0$$

であることをいう.
(2) X の部分集合 $A\,(\neq \varnothing)$ に対して, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に A 上で**一様収束**するとは

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} d(f_n(x),\, f(x)) = 0$$

がなりたつときをいう.

0.4.2 位相空間

定義 0.20. $\mathbb{X}$ を空でない集合とする. $\mathbb{X}$ 上の集合族 $\mathcal{O} \subset 2^{\mathbb{X}}$ が次の条件 (1) $\sim$ (3) をみたつとき, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{X}$ の**位相**という. 組 $(\mathbb{X},\, \mathcal{O})$ を**位相空間**という. $\mathcal{O}$ の元を $\mathbb{X}$ の開集合という.
(1) $\varnothing,\, \mathbb{X} \in \mathcal{O}$.
(2) $A,\, B \in \mathcal{O}$ ならば, $A \cap B \in \mathcal{O}$.
(3) $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{O}$ の元から成る集合族としたとき

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}$$

である.

定義 0.21. $(\mathbb{X},\, \mathcal{O})$ を位相空間とする.
(1) $A \subset \mathbb{X}$ とする. A のすべての部分開集合からなる族を $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする. このとき, A の**内部** A° を

$$A^\circ = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

により定める. また, A° の元を A の**内点**という.

(2) $A \subset \mathbb{X}$ とする. A を含むすべての $\mathbb{X}$ の部分閉集合から成る族を $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする. このとき, A の**閉包** $\mathrm{cl}(A)$ を

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$$

により定める. また, $\mathrm{cl}(A)$ の元を A の**触点**という.
(3) $A \subset \mathbb{X}$ とする. $\partial A = \mathrm{cl}(A) \setminus A^\circ$ とし, A の**境界**という.
(4) $A \subset \mathbb{X}$ とする. $x \in A^\circ$ のとき, A は x の**近傍**という.
(5) $A \subset \mathbb{X}$ とする. $\mathcal{O}_A = \{O \cap A; O \in \mathcal{O}\}$ とすると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる. これを A 上の**相対位相**という.
(6) $A \subset \mathbb{X}$ とする. A が $\mathbb{X}$ において**稠密**であるとは, $\mathrm{cl}(A) = \mathbb{X}$ となることである.
(7) $\mathbb{X}$ が**可分**であるとは, $\mathbb{X}$ の高々可算な部分集合 A で, $\mathbb{X}$ において稠密なものが存在するときである.
(8) $\mathbb{X}$ が**コンパクト**であるとは, $\mathbb{X}$ に任意の**開被覆** $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, すなわち, $\mathbb{X} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ に対して, Λ の有限部分集合 Λ_0 が存在して, $\mathbb{X} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} O_\lambda$ となるときをいう.

定義 0.22. $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ を位相空間とする.
(1) 写像 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ が**連続**であるとは, $\mathbb{Y}$ の任意の開集合 B に対して, $f^{-1}(B)$ は $\mathbb{X}$ の開集合となるときをいう. この定義は距離空間の連続写像の定義と整合している.
(2) 全単射な連続写像 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ で逆写像 f^{-1} も連続のとき, $\mathbb{X}$ と $\mathbb{Y}$ は**同相**であるという. また, f を**同相写像**という.

命題 0.23. (1) $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ を位相空間とし, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ を連続写像とする. $\mathbb{X}$ のコンパクト部分集合 A に対して, $f(A)$ は $\mathbb{Y}$ のコンパクト部分集合となる.
(2) $(\mathbb{X}, d_X)$ をコンパクト距離空間, $(\mathbb{Y}, d_Y)$ を距離空間とする. $\mathbb{X}$ から $\mathbb{Y}$ への連続写像は一様連続である.

Proof. 証明は省略. □

0.5 $\mathbb{R}$ の拡張

集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ と書くことにする. $\overline{\mathbb{R}}$ での演算を以下のように定める.

- 実数に関する演算は通常通り.
- $a \in \mathbb{R}$ に対して, $-\infty < a < \infty$.

- $a \in \mathbb{R}$ に対して, 以下のように定める.
  - $a + (\pm\infty) = \pm\infty$, $\pm\infty + a = \pm\infty$.
  - $a > 0$ のとき, $a \times (\pm\infty) = \pm\infty$, $\pm\infty \times a = \pm\infty$.
  - $a + (\pm\infty) = \pm\infty$, $\pm\infty + a = \pm\infty$.
  - $a < 0$ のとき, $a \times (\pm\infty) = \mp\infty$, $\pm \times a = \mp\infty$.
  - $0 \times (\pm\infty) = 0$, $\pm\infty \times 0 = 0$.
  - $0/(\pm\infty) = 0$.
- $(\pm\infty) + \pm(\infty) = \pm\infty$, $(\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$.
- $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty$, $(\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$.
- $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, $(\pm\infty)/(\mp\infty)$ は定義されないものとする.
- $|\pm\infty| = +\infty$.
- $\overline{\mathbb{R}}$ の部分集合 $A\,(\neq \varnothing)$ に対して, 上限 $\sup A$ と下限 $\inf A$ が定まり, $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる.
- $a,\, b \in \overline{\mathbb{R}}$ について, 閉区間 $[a,\, b]$ と開区間 $(a,\, b)$ を

  $$[a,\, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}};\, a \leq x \leq b\}, \qquad (a,\, b)\{x \in \overline{\mathbb{R}};\, a < x < b\}$$

  により定める.

0.6 章末注釈と参考文献

第 0.1 節は [38] を借用した. 第 0.2 節は [39, pp.26 − 29] を借用した. 第 0.3 節は [38] を借用した. 第 0.4 節は [38] と [39] を参照した. 第 0.5 節は [38, pp.18 − 19] を借用した.