第A章　集合と位相の復習

A.1　集合の復習

To be written
章 0 で書いた.

A.2　ベクトル空間と線型写像の復習

定義 A.1. (1) $n \in \mathbb{N}$ とする. 空でない集合 $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ が**実ベクトル空間**であるとは $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ と $\forall c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{X} \quad \text{かつ} \quad c\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$$

をみたすときである.
(2) $k \in \mathbb{N}$ とする. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{X}$ と $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ を用いて定義されるベクトル

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k$$

を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ **の線型結合**という. $S \subset \mathbb{R}^n$ とし, E を S の元の線型結合のすべてから成る集合としたとき S は E **を張る**といい, $E = \mathrm{span}(S)$ と書く.
(3) ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ から成る集合が**独立**であるとは, $\forall c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}_n \ \Rightarrow\ c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

をみたすときをいう. そうでないとき $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ は**従属**であるという. ただし $\mathbf{0}_n^\top = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{k\text{ 個}}$ である.
(4) 実ベクトル空間 $\mathbb{X}$ が r 個の独立なベクトルからなる集合を部分集合として持ち, $(r+1)$ 個の独立なベクトルの集合を部分集合として持たないとき $\mathbb{X}$ の**次元**は r であるといい, $\dim \mathbb{X} = r$ と書く.
(5) 実ベクトル空間 $\mathbb{X}$ の独立な部分集合 S が $\mathbb{X}$ を張るとき集合 S は $\mathbb{X}$ の**基底**という.

注意 A.2. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を考える.

$$\boldsymbol{e}_i = (\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{i-1\ \text{個}},\ 1,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-i\ \text{個}})^\top \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

とおく. $S := \{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となる. この集合 S を $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**とよぶ. □

定理 A.3. $r \in \mathbb{N}$ とし, $\mathbb{X}$ を実ベクトル空間とする. ベクトル空間 $\mathbb{X}$ が $\mathbb{X}$ の r 個のベクトルで張られるとき $\dim \mathbb{X} \leq r$ となる.

Proof. Rudin (1976, p.205) を参照のこと. □

系 A.4. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Proof. $\mathrm{span}(\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n\}) = \mathbb{R}^n$ なので $\dim \mathbb{R}^n \leq n$ となる. しかし $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ は独立なので $\dim \mathbb{R}^n \geq n$ となる. よって定理は証明された. □

定理 A.5. $\mathbb{X}$ を実ベクトル空間とし, $\dim \mathbb{X} = n$ とする. 以下が成立する.
(1) E を $\mathbb{X}$ の n 個の異なる元から成る集合とする. このとき

$$\mathrm{span} E = \mathbb{X}\ \Rightarrow\ E \text{ は独立.}$$

(2) $\mathbb{X}$ は基底を持ち, すべての基底は $\mathbb{X}$ の n 個の異なる元から成る.
(3) $r \in \mathbb{N}$ を $1 \leq r \leq n$ とし, $\{\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{y}_r\} \subset \mathbb{X}$ は独立とする. このとき $\mathbb{X}$ は $\{\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{y}_r\}$ を含む $\mathbb{X}$ のベクトルから成る基底を持つ.

Proof. Rudin (1976, p.206) を参照. □

定義 A.6. $\mathbb{X}$ と $\mathbb{Y}$ を実ベクトル空間とする. 写像 $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ は**線型**であるとは

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1) + A(\boldsymbol{x}_2), \quad T(c\boldsymbol{x}) = cT(\boldsymbol{x}), \quad \bigl(\forall \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{X},\ \forall c \in \mathbb{R}\bigr)$$

をみたすときをいう.

定理 A.7. $\mathbb{X}$ を有限次元ベクトル空間とする. 線型写像 $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ が 1 対 1 であるための必要十分条件は

$$\mathbb{X} = \mathrm{range}(T) := \{T(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\}$$

が成り立つときである.

Proof. Rudin (1976, p.207) を参照. □

定義 A.8. $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{W}$ を実ベクトル空間とする．
(1) $\mathcal{L}(\mathbb{X},\, \mathbb{Y})$ を $\mathbb{X}$ から $\mathbb{Y}$ への線型写像すべてから成る集合とする．特に $\mathcal{L}(\mathbb{X},\, \mathbb{X})$ を $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ と書くことにする．$\forall T_1,\, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\, \mathbb{Y})$ と $\forall c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\big(c_1T_1 + c_2T_2\big)(\boldsymbol{x}) = c_1T_1(\boldsymbol{x}) + c_2T_2(\boldsymbol{x}) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X})$$

と定める．すると $c_1T_1 + c_2T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\, \mathbb{Y})$ となる．
(2) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\, \mathbb{Y})$ と $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y},\, \mathbb{W})$ とする．この時 T と S の積 ST を T と S の合成写像で定める．すなわち

$$\big(ST\big)(\boldsymbol{x}) := S\big(T(\boldsymbol{x})\big) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X})$$

である．すると $ST \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\, \mathbb{W})$ となる．$\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{W}$ のときでも ST と TS は一般には一致しないことに注意せよ．
(3) $m,\, n \in \mathbb{N}$ とする．$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m)$ に対して T の**ノルム** $\|T\|$ を

$$\|T\| := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n;\, |\boldsymbol{x}|_{2,\,n}\le 1} \big|T(\boldsymbol{x})\big|_{2,\,m}$$

で定める．ただし $|\cdot|_{2,\,n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の Euclid ノルムである．

定理 A.9. (1) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m)$ のとき $\|T\| < \infty$ で

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

は一様連続である．
(2) $\forall T,\, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m)$ と $\forall c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|T + S\| \le \|T\| + \|S\|, \quad \|cT\| = |c|\, \|T\|$$

である．$\forall T,\, S,\, R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m)$ に対して関数

$$d : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m) \ni (T,\, S) \longrightarrow d(T,\, S) = \|T - S\|$$

と定めると d は距離関数となる．すなわち, 任意の $S,\, T,\, R \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m\big)$ に対して

(2a) $d(T,\, S) \ge 0; \quad d(T,\, S) = 0 \Leftrightarrow T = S,$

(2b) $d(T,\, S) = d(S,\, T),$

(2c) $d(T,\, R) \le d(T,\, S) + d(S,\, R)$

をみたす．
(3) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m)$ と $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\, \mathbb{R}^k)$ としたとき

$$\|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|$$

がなりたつ．

Proof. Rudin (1976, p.208-209) を参照. □

定理 A.10. $\mathcal{K}$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への可逆な線型写像すべての成す集合とする. このとき以下が成立する.
(1) $S \in \mathcal{K}$ と $T \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n\big)$ が

$$\|S - T\| \cdot \|S^{-1}\| < 1 \tag{A.1}$$

をみたすとき

$$T \in \mathcal{K}$$

である.
(2) $\mathcal{K}$ は $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n\big)$ の開部分集合で写像

$$\mathcal{K} \ni S \mapsto S^{-1} \in \mathcal{K}$$

は連続である.

Proof. (i) $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とすると, 定理 A.9(iii) から

$$1 = \|\mathrm{id}_n\| = \|SS^{-1}\| \leq \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$$

となる. よって, から $\|S^{-1}\| \neq 0$ であるので

$$\frac{1}{\|S^{-1}\|} \leq \|S\| < \infty$$

となる. このことを踏まえ

$$\|S^{-1}\| =: \frac{1}{\alpha} > 0$$

とおく. さらに $\|S - T\| =: \beta \geq 0$ とおく. 仮定 (A.1) から

$$\beta = \|S - T\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|} = \alpha$$

となる. よって

$$\beta < \alpha$$

である. 一方, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha|\boldsymbol{x}|_{2,n} &= \alpha\big|S^{-1}S(\boldsymbol{x})\big|_{2,n} \leq \alpha\|S^{-1}\| \cdot |S(\boldsymbol{x})|_{2,n} = |S(\boldsymbol{x})|_{2,n} \\ &\leq \big|\big(S - T\big)(\boldsymbol{x})\big|_{2,n} + |T(\boldsymbol{x})|_{2,n} \leq \beta|\boldsymbol{x}|_{2,n} + |T(\boldsymbol{x})|_{2,n}\end{aligned}$$

となる．この不等式から

$$(\alpha-\beta)|\boldsymbol{x}|_{2,n} \leq \bigl|T(\boldsymbol{x})\bigr|_{2,n} \qquad \bigl(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\bigr) \tag{A.2}$$

を得る．$\alpha-\beta>0$ なので

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n \ \Rightarrow\ T\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$$

を得る．よって T は 1 対 1 となる．定理 A.7 から

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{range} T$$

となるので $T \in \mathcal{K}$ がわかる．すべての $S \in \mathcal{K}$ に対して T は $\|S-T\| < \alpha$ をみたせば $T \in \mathcal{K}$ となる．このことから $\mathcal{K}$ は $\mathcal{L}\bigl(\mathbb{R}^n\bigr)$ の開集合であることがわかる．

(ii) $S, T \in \mathcal{K}$ とする．(A.2) において $\boldsymbol{x} = S^{-1}\boldsymbol{y}$ と置き換えると

$$(\alpha-\beta)\bigl|S^{-1}(\boldsymbol{y})\bigr|_{2,n} \leq \bigl|SS^{-1}(\boldsymbol{y})\bigr|_{2,n} = |\boldsymbol{y}|_{2,n} \qquad (\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

となる．よって $|\boldsymbol{y}|_{2,n} \neq 0$ のとき

$$\frac{\bigl|S^{-1}(\boldsymbol{y})\bigr|_{2,n}}{|\boldsymbol{y}|_{2,n}} \leq \frac{1}{\alpha-\beta}$$

となるので

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha-\beta}$$

を得る．等式

$$S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}\bigl(T-S\bigr)T^{-1}$$

と定理 A.9(ii) を合わせると

$$\|S^{-1}-T^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|T-S\| \bullet \|T^{-1}\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$$

を得る．$\beta \to 0$ とすれば $T \to S$ となるので写像 $\mathcal{K} \ni S \mapsto S^{-1} \in \mathcal{K}$ は連続となる． □

A.3 多変数関数の微分と逆写像定理

定義 A.11. $E \subset R^n$ を開集合とし，$\boldsymbol{x} \in E$ とし，$T:\ E \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．線型写像 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が存在して

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\bigl|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{h})\bigr|_{2,m}}{|\boldsymbol{h}|_{2,n}} = 0 \tag{A.3}$$

が成り立つとき T は点 $\boldsymbol{x}$ で微分可能といい

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) := A$$

と書く. T がすべての点 $\boldsymbol{x} \in E$ で微分可能なとき T は E 上で微分可能という.

注意 A.12. (A.3) をみたす $A \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\big)$ は一意である. これを示すために $A_1, A_2 \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\big)$ があって A_1 と A_2 はともに (A.3) をみたすと仮定する. $B := A_1 - A_2$ とおくと $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\big|B(\boldsymbol{h})\big|_{2,m} &= \big|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - A_2(\boldsymbol{h}) - \big\{T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - A_1(\boldsymbol{h})\big\}\big|_{2,m} \\ &\le \big|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - A_2(\boldsymbol{h})\big|_{2,m} + \big|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - A_1(\boldsymbol{h})\big|_{2,m}\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\big|B(\boldsymbol{x})\big|_{2,m}}{|\boldsymbol{h}|_{2,n}} = 0$$

となる. $\boldsymbol{h} \ne \boldsymbol{0}_n$ を固定すると

$$\lim_{t\to 0} \frac{\big|B(t\boldsymbol{h})\big|_{2,m}}{|t\boldsymbol{h}|_{2,n}} = 0 \tag{A.4}$$

を得る. B の線型性から (A.5) の左辺は t と独立なので $B(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{0}_m$ ($\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$) となる. よって $B = \boldsymbol{0}_{m\times n}$ がわかる. □

定理 A.13. $E \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする. 写像 $T: E \to \mathbb{R}^m$ は点 $\boldsymbol{x}_0 \in E$ で微分可能とし, $S: T(E) \to \mathbb{R}^k$ は点 $T(\boldsymbol{x}_0)$ で微分可能とする. さらに写像 $R: E \to \mathbb{R}^k$ を

$$R(\boldsymbol{x}) := S\big(T(\boldsymbol{x})\big)$$

で定義する. このとき R は点 $\boldsymbol{x}_0$ で微分可能で

$$\overset{\bullet}{R}(\boldsymbol{x}_0) = \overset{\bullet}{S}\big(T(\boldsymbol{x}_0)\big)\,\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}_0)$$

となる.

Proof. $\boldsymbol{y}_0 = T(\boldsymbol{x}_0)$, $A = \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}_0)$, $B = \overset{\bullet}{S}(\boldsymbol{y}_0)$ とおき

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{h}) &:= T(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}_0) - A(\boldsymbol{h}) \qquad (\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n), \\ V(\boldsymbol{k}) &:= S(\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{k}) - S(\boldsymbol{y}_0) - B(\boldsymbol{k}) \qquad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^m)\end{aligned}$$

と定める．ただし $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in E$, $\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{k} \in T(E)$ なるように $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$ を定めた．このとき

$$\big|U(\boldsymbol{h})\big|_{2,\,n} = \epsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}, \quad \big|V(\boldsymbol{k})\big|_{2,\,m} = \eta(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}|_{2,\,m} \tag{A.5}$$

$$\epsilon(\boldsymbol{h}) \to 0\,(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n), \quad \eta(\boldsymbol{k}) \to 0\,(\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}_m) \tag{A.6}$$

と書く．与えられた $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{k} := T(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}_0)$$

とすると

$$|\boldsymbol{k}|_{2,\,m} = \big|A(\boldsymbol{h}) + U(\boldsymbol{h})\big|_{2,\,m} \le \big[\|A\| + \epsilon(\boldsymbol{h})\big] \times |\boldsymbol{h}|_{2,\,n} \tag{A.7}$$

と

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - R(\boldsymbol{x}_0) - BA(\boldsymbol{h}) &= S\big(T(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})\big) - S\big(T(\boldsymbol{x}_0)\big) - BA(\boldsymbol{h}) \\
&= S\Bigg(T(\boldsymbol{x}_0) + \big(T(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}_0)\big)\Bigg) \\
&\qquad - S(\boldsymbol{y}_0) - BA(\boldsymbol{h}) \\
&= S(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{k}) - S(\boldsymbol{y}_0) - BA(\boldsymbol{h}) \\
&= V(\boldsymbol{k}) + B(\boldsymbol{k}) - BA(\boldsymbol{h}) \\
&= V(\boldsymbol{k}) + B\Bigg(T(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}_0) - A(\boldsymbol{h})\Bigg) \\
&= V(\boldsymbol{k}) + B\big(U(\boldsymbol{h})\big)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

となる．(A.5) と (A.7) から $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}_n$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{\big|R(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - R(\boldsymbol{x}_0) - BA(\boldsymbol{h})\big|_{2,\,k}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}} &= \frac{\big|BU(\boldsymbol{h}) + V(\boldsymbol{k})\big|_{2,\,k}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}} \qquad \big(\because \text{(A.8)}\big) \\
&\le \frac{\|B\|\epsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|_{2,\,n} + \eta(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}|_{2,\,m}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}} \\
&\le \|B\|\epsilon(\boldsymbol{h}) + \frac{\eta(\boldsymbol{k})\big[\|A\| + \epsilon(\boldsymbol{h})\big]|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}} \\
&\qquad \big(\because \text{(A.7)}\big) \\
&\le \|B\|\epsilon(\boldsymbol{h}) + \eta(\boldsymbol{k})\big[\|A\| + \epsilon(\boldsymbol{h})\big]
\end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$ のとき $\epsilon(\boldsymbol{h}) \to 0$ かつ $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}_m$ なので $\eta(\boldsymbol{k}) \to 0$ となる．よって

$$\overset{\bullet}{R}(\boldsymbol{x}_0) = BA$$

がわかる. □

$E \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, $T:\ E \to \mathbb{R}^m$ を写像とする. $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \dots,\, \boldsymbol{e}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \dots,\, \boldsymbol{u}_m\}$ を $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底とする. 写像 T の成分は実数値関数 $T_i:\ E \to \mathbb{R}\,(i = 1,\, 2,\, \dots,\, m)$ を用いて

$$T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} T_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i \qquad (\boldsymbol{x} \in E)$$

と表現できる. $\boldsymbol{x} \in E$ と $i = 1,\, 2,\, \dots,\, m;\ j = 1,\, 2,\, \dots,\, n$ に対して

$$\big(D_j T_i\big)(\boldsymbol{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{T_i(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) - T_i(\boldsymbol{x})}{t}$$

と定める. これを

$$D_j T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \qquad \boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)^\top$$

と書くことにする.

定理 A.14. $E \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, 写像 $T:\ E \to \mathbb{R}^m$ は点 $\boldsymbol{x} \in E$ で微分可能とする. このとき偏導関数 $\big(D_j T_i\big)(\boldsymbol{x})\,(i = 1,\, 2, \dots,\, m;\ j = 1,\, 2,\, \dots,\, n)$ は存在し

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \big(D_j T_i\big)(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i \qquad (j = 1,\, 2,\, \dots,\, n)$$

と書ける. ただし $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \dots,\, \boldsymbol{e}_n\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \dots,\, \boldsymbol{u}_m\}$ を $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底である.

Proof. $j\,(1 \le j \le n;\ j \in \mathbb{N})$ を固定する. 写像 T は点 $\boldsymbol{x} \in E$ で微分可能なので

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) - T(\boldsymbol{x}) &= \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(t\boldsymbol{e}_j) + \boldsymbol{r}(t\boldsymbol{e}_j), \\ \lim_{t \to 0} \frac{\big|\boldsymbol{r}(t\boldsymbol{e}_j)\big|_{2,\,m}}{t} &= 0 \qquad (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j \in E) \end{aligned}$$

と書ける. $\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})$ の線型性から

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{T(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) - T(\boldsymbol{x})}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(t\boldsymbol{e}_j) + \boldsymbol{r}(t\boldsymbol{e}_j)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t\,\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_j) + \boldsymbol{r}(t\boldsymbol{e}_j)}{t} \\ &= \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_j) + \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t\boldsymbol{e}_j)}{t} \\ &= \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_j) \end{aligned}$$

となる．これを T の成分で表現すると

$$\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{T_i(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_j)-T_i(\boldsymbol{x})}{t}\boldsymbol{u}_i = \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j$$

となる．よって $\big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x})$ は存在する．さらに

$$\sum_{i=1}^{m}\big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i = \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j$$

から

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j &= \lim_{t\to 0}\frac{T(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_j)-T(\boldsymbol{x})}{t} = \lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{T_i(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_j)-T_i(\boldsymbol{x})}{t}\boldsymbol{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i\end{aligned}$$

を得る．　□

　このことより

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\big(D_1T_1\big)(\boldsymbol{x}) & \cdots & \big(D_nT_1\big)(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \big(D_1T_m\big)(\boldsymbol{x}) & \cdots & \big(D_nT_m\big)(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

と書ける．$\boldsymbol{h} = \sum_{j=1}^{n} h_j\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^n$ $(h_j \in \mathbb{R};\ j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ に対して

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}\big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x})h_j\right\}\boldsymbol{u}_i$$

となる．

定理 A.15. $E \subset \mathbb{R}^n$ を凸開集合とする．写像 $T : E \to \mathbb{R}^m$ は E 上で微分可能とし, ある定数 $M > 0$ が存在して

$$\big\|\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\big\| \le M \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in E)$$

とする．このとき

$$\big|T(\boldsymbol{a}) - T(\boldsymbol{b})\big|_{2,\,n} \le M\big|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\big|_{2,\,n} \qquad (\forall \boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b} \in E)$$

が成立する．

Proof. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ を固定し

$$\boldsymbol{r}(t) := (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と定める. E は凸集合なので

$$\boldsymbol{r}(t) \in E \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

となる. いま

$$S(t) = T\bigl(\boldsymbol{h}(t)\bigr)$$

とおく. このとき定理 A.13 を用いると

$$\dot{S}\,(t) = \dot{T}\,\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr)\,\dot{\boldsymbol{r}}\,(t) = \dot{T}\,\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr)(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^m$$

を得る. よって

$$\bigl|\,\dot{S}\,(t)\bigr|_{2,\,m} \leq \bigl\|\,\dot{T}\,\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr)\bigr\| \cdot |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{2,\,n} \leq M\,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{2,\,n} \qquad (\forall t \in [0,\,1])$$

となる. しかし $S(1) = T(\boldsymbol{a})$ と $S(0) = T(\boldsymbol{b})$ なので

$$\begin{aligned}\bigl|T(\boldsymbol{a}) - T(\boldsymbol{b})\bigr|_{2,\,m} &= \left|\int_0^1 \dot{S}\,(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \bigl|\,\dot{S}\,(t)\bigr|\,\mathrm{d}t \\ &= \leq M|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{2,\,n} \int_0^1 \mathrm{d}t = M|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{2,\,n}\end{aligned}$$

がわかる. □

定義 A.16. $E \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする. 写像 $T\colon\, E \to \mathbb{R}^m$ が E 上で連続微分可能 (C^1 級) であるとは

$$\dot{T}\colon\, E \to \mathcal{L}\bigl(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^m\bigr)$$

が連続写像となることである. すなわち $\forall \boldsymbol{x} \in E$ と $\forall \epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって, $\forall \boldsymbol{y} \in E$ に対して

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{2,\,n} \;\Rightarrow\; \|\,\dot{T}\,(\boldsymbol{x}) - \dot{T}\,(\boldsymbol{y})\| < \epsilon$$

をみたすことである.

定理 A.17. $E \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, $T\,:\,E \to \mathbb{R}^m$ を写像とする. このとき T が E 上で C^1 級であるための必要十分条件は, すべての $i = 1,\,2,\,\ldots,\,m$; $j = 1,\,2,\ldots,\,n$ に対して偏導関数 D_jT_i が存在し, E 上で連続であることである.

Proof. 写像 T は C^1 級とする．すると

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i$$

から

$$\big(\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j \,\big|\, \boldsymbol{u}_i\big)_m = \big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x}) \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m;\, j = 1,\, 2, \ldots,\, n)$$

となる．ただし $(\cdot|\cdot)_m$ は $\mathbb{R}^m$ 上の標準内積である．しがたって

$$\big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x}) - \big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{y}) = \big(\{\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{y})\}\boldsymbol{e}_j \,\big|\, \boldsymbol{u}_i\big)_m$$

となる．$|\boldsymbol{u}_i|_m = |\boldsymbol{e}_j|_n = 1$ から

$$\begin{aligned}\Big|\big(\{\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{y})\}\boldsymbol{e}_j \,\big|\, \boldsymbol{u}_i\big)_m\Big| &\le \big|\{\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{y})\}\boldsymbol{e}_j\big|_{2,\,n} \cdot |\boldsymbol{u}_i|_{2,\,m} \\ &\le \|\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{y})\|\end{aligned}$$

となり，D_jT_i は連続であることがわかる．

逆を示す．$m = 1$ の場合を考えれば十分なことに注意する．$\boldsymbol{x} \in E$ と $\epsilon > 0$ を取る．E は開集合なので $\boldsymbol{x}$ を中心とした半径 $r > 0$ の開球 B を

$$B \subset E$$

とすることができる．D_jT_i の連続性から r を必要ならばさらに小さく取り

$$\big|\big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{y}) - \big(D_jT_i\big)(\boldsymbol{x})\big| \le \frac{\epsilon}{n} \qquad (\boldsymbol{y} \in B,\, 1 \le j \le n)$$

とできる．ここで，$k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ に対して

$$\boldsymbol{h} := \sum_{j=1}^{n} h_j\boldsymbol{e}_j, \quad |\boldsymbol{h}|_{2,\,n} \le r, \quad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}_{2,\,n}, \quad \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{v}_j$$

とおく．このとき

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m}\big[T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_j) - T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1})\big]$$

となる．$|\boldsymbol{v}_k|_{2,\,n} < r\,(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ で B は凸開集合なので

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1},\, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_j \in B$$

となる. $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j-1} + h_j \boldsymbol{e}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) なので中間値の定理から

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_j) - T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1}) &= T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1}+h_j\boldsymbol{e}_j) - T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1}) \\ &= h_j\big(D_jT\big)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1}+\theta_j h_j \boldsymbol{e}_j) \\ &\quad (0 < \theta_j < 1;\ j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

となる. ただし $D_jT = (D_1T_1, D_jT_2, \ldots, D_jT_m)^\top$ である. 以上のことから

$$\begin{aligned} &\left| T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^n h_j\big(D_jT\big)(\boldsymbol{x}) \right|_{2,m} \\ &\quad = \left| \sum_{j=1}^n h_j \Big\{ \big(D_jT\big)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_{j-1}+\theta_j h_j \boldsymbol{e}_j) - \big(D_jT\big)(\boldsymbol{x}) \Big\} \right|_{2,m} \\ &\quad \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |h_j|\epsilon = |\boldsymbol{h}|_{2,n}\epsilon \qquad (\forall |\boldsymbol{h}|_{2,n} < \epsilon) \end{aligned}$$

となる. よって写像 T は点 $\boldsymbol{x}$ で微分可能で $\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})$ は線型で $\boldsymbol{h} = \sum_{j=1}^n h_j \boldsymbol{e}_j$ に対して

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}) = \sum_{j=1}^n h_j\big(D_jT\big)(\boldsymbol{x})$$

となる. さらに

$$\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \big\{\big(D_1T\big)(\boldsymbol{x})\big\}^\top \\ \big\{\big(D_2T\big)(\boldsymbol{x})\big\}^\top \\ \vdots \\ \big\{\big(D_nT\big)(\boldsymbol{x})\big\}^\top \end{bmatrix}$$

となり, $D_1T, D_2T, \ldots, D_nT$ は連続なので $\overset{\bullet}{T}$ も連続であることがわかる. □

定義 A.18. 写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は次の条件をみたすとする. ある $c < 1$ があって

$$\big|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y})\big|_{2,n} \le c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{2,n} \qquad (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

となる. このとき T を $\mathbb{R}^n$ **から** $\mathbb{R}^n$ **への縮小写像**という.

定理 A.19. $C \subset \mathbb{R}^n$ を閉集合とし, $T : C \to C$ を縮小写像とする. このときある $\boldsymbol{x}_0 \in C$ が唯一存在して

$$T(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$$

をみたす.

Proof. $\boldsymbol{x}_0 \in C$ を任意に取り点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C$ を

$$\boldsymbol{k}_{k+1} = T(\boldsymbol{x}_k) \qquad (k = 1,\, 2, \ldots)$$

と定める. $k \geq 1$ に対して

$$|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k|_{2,\,n} = |T(\boldsymbol{x}_k) - T(\boldsymbol{x}_{k-1})|_{2,\,n} \leq c|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}|_{2,\,n}$$

となる. したがって

$$|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k|_{2,\,n} \leq c\,|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0|_{2,\,n} \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots)$$

を得る. $k < \ell$ に対して

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_\ell|_{2,\,n} &\leq \sum_{i=k+1}^{\ell} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}|_{2,\,n} \leq \Big\{c^k + c^{k-1} + \cdots + c^{\ell-1}\Big\}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0|_{2,\,n} \\ &\leq \left[\frac{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0|_n}{1-c}\right]c^k \end{aligned}$$

となる. よって　$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることがわかる. よって C は閉集合であるのである $\boldsymbol{x} \in C$ があって

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$$

となる. さらに T は縮小写像なので連続である. よって

$$T(\boldsymbol{x}) = T\left(\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k\right) = \lim_{k\to\infty} T(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}$$

がわかる. よって定理は証明された. □

定理 A.20. $E \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, $T:\, E \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級とする. すなわち $\dot{T}$ は連続で

$$\begin{aligned} &T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) = \dot{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{h}) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in E,\, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in E), \\ &\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})|_{2,\,n}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}} = 0 \end{aligned}$$

をみたすことである. さらにある $\boldsymbol{a} \in E$ に対して $\dot{T}(\boldsymbol{a})$ は可逆とし, $\boldsymbol{b} = T(\boldsymbol{a})$ とおく. このとき以下が成立する.

(1) $\mathbb{R}^n$ のある開集合 U と V で $\boldsymbol{a} \in U$ と $\boldsymbol{b} \in V$ なるものがあって

$$T:\, U \to V$$

は 1 対 1 で $T(U) = V$ となる.

(2) V 上で定義さらた T の逆写像を S とする．すなわち

$$S\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr) = \boldsymbol{x} \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in U)$$

である．このとき S は C^1 級である．

Proof. (1) $\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{a}) = A$ とおき, $\lambda > 0$ を

$$2\lambda \|A\| = 1 \tag{A.9}$$

となるように取る．$\boldsymbol{a}$ を中心とした開球 U が存在して

$$U \subset E$$

とできる．$\overset{\bullet}{T}$ は点 $\boldsymbol{a}$ で連続なので必要ならばU 半径をさらに小さくとると

$$\| \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) - A\| < \lambda \qquad (\boldsymbol{x} \in U) \tag{A.10}$$

とできる．

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^m$ に対応して関数 φ を

$$\varphi(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} + A^{-1}\bigl(\boldsymbol{y} - T(\boldsymbol{x})\bigr) \qquad (\boldsymbol{x} \in E) \tag{A.11}$$

と定める．このとき

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \text{ は関数 } \varphi \text{ の不動点}$$

に注意する．簡単な計算から

$$\overset{\bullet}{\varphi}(\boldsymbol{x}) = I_n - A^{-1}\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\bigl(A - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\bigr)$$

なので (A.10) と (A.11) から

$$\| \overset{\bullet}{\varphi}(\boldsymbol{x})\| \leq \|A\| \cdot \|A - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\| < \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{2} \qquad (\boldsymbol{x} \in U)$$

を得る．いま $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ を取る．中間値の定理から $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を結ぶ直線上の端点以外の点 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in U$ が存在して

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}_2) = \overset{\bullet}{\varphi}(\widetilde{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$$

と書ける．したがって

$$|\varphi(\boldsymbol{x}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}_2)|_{2,n} \leq \| \overset{\bullet}{\varphi}(\widetilde{\boldsymbol{x}})\| \cdot |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|_{2,n} < \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|_{2,n} \tag{A.12}$$

となる．よって定理 A.19 から $\boldsymbol{x} \in \overline{U}$ が唯一存在して

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$$

となる．よって T は $\overline{U}$ 上で 1 対 1 である．

次に $V = T(U)$ とおき $\boldsymbol{y}_0 \in V$ を取る．このときある点 $\boldsymbol{x}_0 \in U$ が唯一存在して

$$\boldsymbol{y}_0 = T(\boldsymbol{x}_0)$$

となる．B を $\boldsymbol{x}_0$ を中心とした半径 $r > 0$ の開球とする．r を十分小さくすると

$$\overline{B} := \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}_0|_{2,n} < r\} \subset U$$

とできる．このとき

$$\boldsymbol{y} \in V \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0|_{2,n} < \lambda r$$

を示すことができると V は開集合であることがわかる．そのために $\boldsymbol{y}$ を固定する．すると

$$\begin{aligned}
|\varphi(\boldsymbol{x}_0) - \varphi(\boldsymbol{x})|_{2,n} &= \left|\left\{\boldsymbol{x}_0 + A^{-1}\big(\boldsymbol{y} - T(\boldsymbol{x}_0)\big)\right\} - \boldsymbol{x}_0\right|_{2,n} \\
&= \left|A^{-1}\big(\boldsymbol{y} - T(\boldsymbol{x}_0)\big)\right|_{2,n} \\
&\le \|A^{-1}\| \cdot |\boldsymbol{y} - T(\boldsymbol{x}_0)|_{2,n} = \|A^{-1}\| \cdot |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0|_{2,n} \\
&< \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda r = \frac{r}{2}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

を得る．$\boldsymbol{x} \in \overline{B}$ のとき

$$\begin{aligned}
|\varphi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_0|_{2,n} &= |\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)|_n + |\varphi(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0|_{2,n} \\
&\le \frac{1}{2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|_{2,n} + \frac{r}{2} \qquad \big(\because \text{(A.12) と (A.13)}\big) \\
&\le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r
\end{aligned}$$

がわかる．これより $\varphi(\boldsymbol{x}) \in B$ となる．さらに $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \overline{B} \subset U$ のとき

$$|\varphi(\boldsymbol{x}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}_2)|_{2,n} \le \frac{1}{2N}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|_{2,n}$$

が成立する．よって $\varphi : \overline{B} \to \overline{B}$ は縮小写像となる．$\overline{B}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合なので点 $\boldsymbol{x} \in \overline{B}$ が唯一存在hして φ の不動点となる．すると

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

をみたすので

$$\boldsymbol{y} \in T\big(\overline{B}\big) \subset T(U) = V$$

がわかる．よって (1) が示せた．
(2) $\boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k} \in V$ を取る．すると $\boldsymbol{x} \in U$ と $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in U$ が存在して

$$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y}+\boldsymbol{k} = T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$$

となる．すると

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}) &= \bigl\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} - A^{-1}\bigl(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k} - T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\bigr)\bigr\} \\ &\qquad - \bigl\{\boldsymbol{x} - A^{-1}\bigl(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k} - T(\boldsymbol{x})\bigr)\bigr\} \\ &= \boldsymbol{h} + A^{-1}\bigl\{T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\bigr\} \\ &= \boldsymbol{h} - A^{-1}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

となる．よって (A.13) から

$$|\boldsymbol{h} - A^{-1}\boldsymbol{k}|_{2,n} = |\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{x})|_{2,n} \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{h}|_{2,n}$$

となる．したがって

$$|\boldsymbol{h} - A^{-1}\boldsymbol{k}|_{2,n} \geq |\boldsymbol{h}|_{2,n} \times |A^{-1}\boldsymbol{k}|_{2,m}$$

から

$$|A^{-1}\boldsymbol{k}|_{2,n} \geq \frac{1}{2}|\boldsymbol{h}|_{2,n}$$

と

$$|\boldsymbol{h}|_{2,n} \leq \|A^{-1}\| \cdot |\boldsymbol{k}|_{2,m}\frac{|\boldsymbol{k}|_{2,m}}{\lambda} \tag{A.14}$$

を得る．よって (A.13) と (A.14) から

$$\|\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) - A\| \cdot \|A^{-1}\| < \lambda\frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

となるので定理 A.10 から $\overset{\bullet}{T}$ は逆写像を持つことがわかる．そこで $\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})$ の逆写像を W と書くと

$$\begin{aligned}S(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k}) - S(\boldsymbol{y}) - W(\boldsymbol{k}) &= S\bigl(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\bigr) - S\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr) - W(\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} - \boldsymbol{x} - W(\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{h} - W(\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{h} - W\bigl\{T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x})\bigr\} \\ &= -W\bigl\{T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - T(\boldsymbol{x}) - \overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\bigr\} \qquad \text{(A.15)} \\ &\qquad \bigl(\because W\,\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x}) = I_n\bigr)\end{aligned}$$

となる．(A.14) から

$$\frac{\left|S(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-S(\boldsymbol{y})-W(\boldsymbol{k})\right|_{2,\,m}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}}=\frac{\left|-W\left[T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-T(\boldsymbol{x})-\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\right]\right|_{2,\,n}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}}$$

$$\leq\frac{\|W\|}{\lambda}\frac{\left|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-T(\boldsymbol{x})-\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\right|_{2,\,n}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}}\qquad(\because \text{(A.15)})$$

を得る．$\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{0}_m$ のとき $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n$ となり

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{0}_m}\frac{\left|S(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-S(\boldsymbol{y})-W(\boldsymbol{k})\right|_{2,\,m}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}}$$

$$\leq\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{\|W\|}{\lambda}\frac{\left|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-T(\boldsymbol{x})-\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right|_{2,\,n}}{|\boldsymbol{h}|_{2,\,n}}=0$$

となる．よって

$$\overset{\bullet}{S}(\boldsymbol{y})=W$$

がわかる．W は $\overset{\bullet}{T}(\boldsymbol{x})=\overset{\bullet}{T}\left(S(\boldsymbol{y})\right)$ の逆写像になうように選んだ．したがって

$$\overset{\bullet}{S}(\boldsymbol{y})=\left\{\overset{\bullet}{T}\left(S(\boldsymbol{y})\right)\right\}^{-1}\qquad(\boldsymbol{y}\in V)$$

を得る． □

A.4 連続関数の性質

定理 A.21 (Heine-Borel)**.** $K\subset\mathbb{R}^d$ を部分集合とする．K がコンパクトであるために必要十分条件は, K が閉かつ有界集合であることである．

Proof. □

命題 A.22. $K\subset\mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし, $f\in C(K)$ とする．ただし, $C(K)$ は K 上の実数値連続関数全体のなす集合である．さらに, $M:=\sup_{\boldsymbol{x}\in K}f(\boldsymbol{x})$ とおく．このとき, ある $\boldsymbol{x}\in K$ があって, $f(\boldsymbol{x})=M$ が成立する．

Proof. □

定義 A.23. $D\subset\mathbb{R}^d$ を部分集合とする．関数 $f:D\to\mathbb{R}$ が**一様連続**であるとは

$$\sup_{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in D;\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{2,\,d}<\epsilon}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\xrightarrow{\epsilon\to 0}0$$

が成り立つときをいう．

命題 A.24. $K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし, $f \in C(K)$ とする. このとき, f は一様連続である.

Proof. □

定理 A.25 (Dini)**.** $K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とｓる. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(K)$ は $f_n \geq 0\,(n \in \mathbb{N})$ かつ $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ で $f_n(\boldsymbol{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,(\forall \boldsymbol{x} \in K)$ をみたすとする. このとき, $\sup_{\boldsymbol{x}\in K} f_n(\boldsymbol{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となる.

Proof. 固定した $\epsilon > 0$ に対して

$$O_n := f_n^{-1}\big((-\infty,\, \epsilon)\big) = \{\boldsymbol{x} \in K;\, f_n(\boldsymbol{x}) < \epsilon\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

とおく. 関数 f は連続なので, 集合 $O_n\,(n \in \mathbb{N})$ は開であり, 関数列 $f_1,\, f_2,\, \ldots$ は減少列なので, $O_1 \subset O_2 \subset \cdots$ である. $f_n(\boldsymbol{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ なので, n を十分おおくすると $\boldsymbol{x} \in O_n$ とできる. したがって, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \supset K$ となる. K はコンパクト部分集合であるので, ある $m \in \mathbb{N}$ と $n_j \in \mathbb{N}\,(j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$ が存在して, $\bigcup_{j=1}^{m} O_{n_j} \supset K$ となる. ここで, $N = \max\{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m\}$ とおくと $f_N(\boldsymbol{x}) < \epsilon\,(\forall \boldsymbol{x} \in K)$ となる. 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は減少列なので, $\forall n \geq N$ と $\forall \boldsymbol{x} \in K$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) < \epsilon$ となる. したがって

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{x}\in K} f_n(x) \leq \epsilon$$

となる. $\epsilon > 0$ は任意だったので, $\sup_{\boldsymbol{x}\in K} f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ がわかる. □

A.5　章末注釈と参考文献