第B章　数列と級数の収束と関数の性質

B.1　数列と級数

定義 B.1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とし, a を実数とする.
(1) 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し, 条件

$$\forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

をみたすとき数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に**収束**するといい, a を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**または**極限値**という. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ あるいは $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ と記す.
(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\forall k, \ell \geq N \Rightarrow |a_k - a_\ell| < \epsilon$$

をみたすとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は **Cauchy 列**であるという.

命題 B.2. (数列の重要な性質) 以下が成立する.

(1) 収束する数列の極限値はただ一つ.

(2) 収束する数列は有界.

(3) $\mathbb{R}$ 内の有界な単調数列は収束する.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するための必要十分条件は, すべての部分列が a に収束することである.

(5) (Bolzano-Weierstrass) 有界な数列は収束する部分列を持つ.

(6) 有界な数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は, その上極限と下極限が同じ有限値であることである.

(7) 数列が収束するための必要十分条件は, それが Cauchy 列であることである.

Proof. 証明は後ほど書く. □

命題 B.3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, a を実数列とする. 数列 $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が a に収束するさらなる部分列 $\{a_{n(k(\ell))}\}_{\ell=1}^{\infty}$ を持つならば, $a_n \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} a$ となる.

Proof. 背理法を用いて証明する. $a_n \not\to a$ と仮定する. あると開区間 G が存在して, $a \in G$ であり, $a_{n(m)}$ の部分列をうまくとれば $a_{n(m)} \notin G$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ とできる. 明らかに $a_{n(m)} \overset{n\to\infty}{\not\to} a$ となり矛盾. □

注意 B.4. 命題 B.2(4), (5) から, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界のとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束する任意の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ の収束先が同じ $a \in \mathbb{R}$ のとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となる. □

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, その n 項部分列 s_n を

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

で定義する. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束と発散を部分和の列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束と発散で定義する.

命題 B.5. (級数の重要な性質) 以下が成立する.

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる.

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

(3) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は, 部分和の列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることである.

(4) (d'Alambert の収束判定法)

- $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は収束.
- $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は発散.

(5) (Cauchy の収束判定法)

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は収束.
- $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ は発散.

(6) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n} \dfrac{1}{n^s}$ $(s > 0)$ とする.

- $s > 1 \Rightarrow \zeta(s) < \infty$.
- $0 < s \leq 1 \Rightarrow \zeta(s) = \infty$.

Proof. 証明は後ほど書く. □

B.2　Starling **の公式**

定理 B.6. (Wallis の公式) 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}.$$

Proof. 石谷 (2021, p.189) から借用すること．Stroock (2011, p.32) から借用か. □

定理 B.7. (Starling の公式) 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n=1.$$

Proof. 石谷 (2021, p.190-191) から借用すること. □

B.3　下半連続関数

定義 B.8. $d\in\mathbb{N}$ とし, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ とする．関数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は $c<f(\boldsymbol{x})$ となる任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して $\boldsymbol{x}$ の近傍 U が存在して, $\forall\boldsymbol{y}\in U$ に対して $c<f(\boldsymbol{y})$ となるとき, f は**下半連続**という．関数 f がすべての $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ で下半連続のとき, f は $\mathbb{R}^d$ で下半連続とという.

補題 B.9. 関数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ で下半連続であるための必要十分条件は $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}$ となる任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^d$ で

$$\liminf_{n\to\infty}f(\boldsymbol{x}_n)\geq f(\boldsymbol{x}) \tag{B.1}$$

となることである.

Proof. $\underline{(\Rightarrow\text{ の証明})}$: f は $\boldsymbol{x}=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$ で下半連続で $c<f(\boldsymbol{x})$ とする．このとき $\boldsymbol{x}$ の近傍 U が存在して, $\forall\boldsymbol{y}\in U$ に対して

$$c<f(\boldsymbol{y})$$

である．一方 $\boldsymbol{x}_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\boldsymbol{x}$ なので, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$\forall n\geq N\Rightarrow\boldsymbol{x}_n\in U$$

となる．したがって $c<f(\boldsymbol{x})$ なる任意の c に対して

$$\forall n\geq N\ \Rightarrow\ f(\boldsymbol{x}_n)>c$$

となるので

$$\liminf_{n\to\infty}f(\boldsymbol{x}_n)\geq f(\boldsymbol{x})$$

を得る.

(⇐ の証明): $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ となる任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ で (B.1) をみたすとする. $c < f(\boldsymbol{x})$ とする. すべての $\boldsymbol{y} \in U$ で $c < f(\boldsymbol{y})$ となるような $\boldsymbol{x}$ の近傍 U が存在しないとすると仮定する. すると $\forall n \in \mathbb{N}$ で

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n|_{2,n} < \frac{1}{n}, \quad f(\boldsymbol{x}_n) \le c$$

となる. このとき $\boldsymbol{x}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{x}$ で

$$\liminf_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) \le c < f(\boldsymbol{x})$$

となり, (B.1) と矛盾する. □

補題 B.10. $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合[1]K 上の下半連続関数 f は最小値を K 上で持つ.

Proof. $\mu := \inf_{\boldsymbol{x}\in K} f(\boldsymbol{x})$ とおく. $f(\boldsymbol{x}_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ となる点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ をとると K はコンパクトなので, ある点 $\boldsymbol{x} \in K$ に収束する部分列 $\{\boldsymbol{x}_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する. 補題 (B.9) から

$$f(\boldsymbol{x}) \le \liminf_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{n(k)}) = \mu$$

となる. 一方 μ の定義から $f(\boldsymbol{x}) \ge \mu$ なので $f(\boldsymbol{x}) = \mu$ となる. よって f は最小値 μ を $\boldsymbol{x}$ で取る. □

B.4　章末注釈と参考文献

[1]この場合は有界閉集合と同値.