第C章　測度論

C.1　測度の導入

$\mathbb{X}$ を空でない集合とし, $\mathcal{C}$ を $\mathbb{X}$ の部分集合の集まりで $\varnothing \in \mathcal{C}$ とする. $\mathbb{X}$ の部分集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**互いに排反**であるとは, $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \varnothing$ となるときをいう.

定義 C.1. (1) 関数 $\mu : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は**有限加法的**であるとは次の (1a) と (1b) をみたすときをいう.

(1a) $\mu(\varnothing) = 0$.

(1b) $n \in \mathbb{N}$ とする. 互いに排反な集合 $A_j \in \mathcal{C}\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$A := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C} \quad \text{かつ} \quad \mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

(2) $A_j \in \mathcal{C}\,(j = 1, 2, \ldots)$ は互いに排反で

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$$

とする. このとき

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

のとき μ は σ **加法的**という.

注意 C.2. 上の定義において和が定まっているので, ある $i \neq j$ があって $\mu(A_i) = +\infty$, $\mu(A_j) = -\infty$ のようにはならない. □

定義 C.3. (1) 与えられた空でない集合 $\mathbb{X}$ に対して集合族 $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{X}}$ は**環**であるとは次の (1a) と (1b) をみたすときをいう.

(1a) $\varnothing \in \mathcal{A}$.

(1b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ かつ $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

ただし $2^{\mathbb{X}}$ は $\mathbb{X}$ **の冪集合** を表し, $\mathbb{X}$ のすべての部分集合からなる集合族である.
(2) 環 $\mathcal{A}$ が**代数**であるとは

(2a) $\mathbb{X} \in \mathcal{A}$.

をみたすときをいう.
(3) 代数 $\mathcal{A}$ が σ **代数** であるとは

(3a) 任意の列 $A_n \in \mathcal{A}\,(n = 1, 2, \ldots)$ に対して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

をみたすときをいう.

注意 C.4. (1) $\mathcal{R}$ を環とする. すると $A, B \in \mathcal{R}$ のとき

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$$

となる.
(2) $2^{\mathbb{X}}$ は σ 代数である.
(3) 任意の集合族 $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{X}}$ に対して $\mathcal{C}$ を含む最小の σ 代数が唯一存在する. すなわち $\mathcal{C}$ を含むすべての σ 代数の共通部分である. これを $\mathcal{C}$ **によって生成される** σ **代数**といい, $\sigma[\mathcal{C}]$ と表すことにする.

問 C.1. $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ を σ 代数としたとき $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ も σ 代数であることを示せ.

定理 C.5. $\mathcal{A}$ を代数とする. 有限加法的関数 $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ が σ 加法的であるための必要十分条件は, 任意の集合列 $A_n \in \mathcal{A}$ で $A_n \supset A_{n+1}\,(n = 1, 2, \ldots)$ で $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ なるものに対して

$$\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

をみたすことである.

Proof. ($\Rightarrow$): μ は σ 加法的と仮定し, $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \supset A_{n+1}\,(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ とする. このとき $A_n \setminus A_{n+1}$ は互いに排反で

$$A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \big(A_n \setminus A_{n+1}\big) \qquad (m \in \mathbb{N})$$

なので

$$\mu(A_m) = \mu\Bigg(\bigcup_{n=m}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})\Bigg) = \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n+1})$$

となる. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\setminus A_{n+1})$ は収束するので

$$\sum_{n=m}^{\infty}\mu(A_n\setminus A_{n+1})\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

となる. よって $\mu(A_m)\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$ となる.
($\Leftarrow$): $B_j\in\mathcal{A}\,(j=1,2,\ldots)$ で $B_1, B_2, \ldots, B_n\,(n\in\mathbb{N})$ は互いに排反とする. $B:=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\in\mathcal{A}$ とし, $A_n:=B\setminus\bigcup_{j=1}^{n-1}B_j$ とおく. すると $A_n\in\mathcal{A}$ となり, $A_n\supset A_{n+1}$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ となる. μ の有限加法性から各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mu(B)=\mu\left(A_n\cup\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}B_j\right)\right)=\mu(A_n)+\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}B_j\right)=\mu(A_n)+\sum_{j=1}^{n-1}\mu(B_j)$$

となる. ここで $n\to\infty$ とすると仮定より $\mu(A_n)\to 0$ なので

$$\mu(B)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j)$$

を得る. □

定義 C.6. $\mathbb{X}$ を空でない集合とし, $\mathcal{A}$ を $\mathbb{X}$ の部分集合の σ 代数とする. $\mathcal{A}$ 上の σ 加法測度が $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty)\bigcup\{+\infty\}$ を**測度**という. さらに $(\mathbb{X},\mathcal{A},\mu)$ を**測度空間**という.

注意 C.7. 任意の $A\subset\mathbb{X}$ に対して, A が有限集合のとき, $\mu(A)$ を A の元の個数とし, A が無限集合のとき, $\mu(A)=+\infty$ と定める. すると μ は測度となる. この測度を**計数測度** ($\mathbb{X}$ 上の計数測度) という. □

定理 C.8. 任意の空でない集合 $\mathbb{X}$ と $\mathbb{X}$ の部分集合の環 $\mathcal{A}$ 上の σ 加法的な関数 $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty)\cup\{+\infty\}$ は $\mathcal{A}$ によって生成される σ 加法族 $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度に拡張できる.

Proof. 任意の $E\subset\mathbb{X}$ に対して

$$\mu^*(E):=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\ A_n\in\mathcal{A},\ E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}$$

と定める. $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ をみたす $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在しないとき $\mu^*(E)=+\infty$ と約束する. 証明は次の 4 つの補題に分割される.

補題 C.9. 任意の E と $E_n\subset\mathbb{X}\,(n=1,\ 2,\ldots)$ に対して $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ のとき

$$\mu^*(E)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$$

となる.

Proof. $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)=+\infty$ のときは自明なので, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)<+\infty$ と仮定する. $\forall\epsilon>0$ をとる. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $A_{mn}\in\mathcal{A}\,(m=1,2,\ldots)$ を

$$E_n\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{mn}\quad\text{かつ}\quad\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_{mn})<\mu^*(E_n)+\frac{\epsilon}{2^n}$$

となるように取る. すると

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{mn}\right)$$

なので

$$\mu^*(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_{mn})\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\mu^*(E_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)+\epsilon$$

を得る. ϵ は任意だったので, $\epsilon\downarrow 0$ とすれば, 補題の主張は得られる. □

補題 C.10. $\forall A\in\mathcal{A}$ に対して

$$\mu^*(A)=\mu(A).$$

Proof. $A_n\in\mathcal{A}$ かつ $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とし

$$B_n:=A\bigcap\left(A_n\setminus\bigcup_{j=1}^{n-1}A_j\right)$$

とおく. $B_1, B_2, \ldots$ は互いに排反で $B_n\in\mathcal{A}$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=A$ となる. μ は $\mathcal{A}$ 上で σ 加法的なので

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

となる. したがって

$$\mu(A)\le\mu^*(A)$$

を得る.

逆に $A_1=A,\ A_n=\varnothing\,(n=2,3,\ldots)$ と取る. すると

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n);\ A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ A_n\in\mathcal{A}\right\}$$

なので

$$\mu^*(A)\le\mu(A)$$

を得る. よって

$$\mu^*(A)=\mu(A)$$

が示せた. □

定義 C.11. $F \subset \mathbb{X}$ は μ^* 可測であるとは $\forall E \subset \mathbb{X}$ に対して

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F) \tag{C.1}$$

をみたすときをいう．(C.1) をみたす集合全体を $\mathcal{M}(\mu^*)$ と記すことにする．

補題 C.12. $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$.

Proof. $A \in \mathcal{A}$ とし，$E \subset \mathbb{X}$ は $\mu^*(E) < +\infty$ をみたすとする．与えられた $\epsilon > 0$ に対して $A_n \in \mathcal{A}\,(n = 1, 2, \ldots)$ をうまく取ると

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \epsilon$$

となる．このとき

$$E \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n), \quad E \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A)$$

なので

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) &\le \sum_{n=1}^{n} \Big\{ \mu(A \cap A_n) + \mu(A_n \setminus) \Big\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

となる．$\epsilon \downarrow 0$ とすれば

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \le \mu^*(E)$$

を得る．よって $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ が示せた． □

補題 C.13. $\mathcal{M}(\mu^*)$ は σ 加法族で μ^* は $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上の測度となる．

Proof. $\underline{\mathcal{M}(\mu^*) \text{ は代数であることの証明}}$: 明らかに

$$E \in \mathcal{M}(\mu^*) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{X} \setminus F \in \mathbb{M}(\mu^*)$$

である．$A, B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ のとき

$$A \cup B = \mathbb{X} \setminus \big[(\mathbb{X} \setminus A) \cap (\mathbb{X} \setminus B) \big]$$

である. $\forall E \subset \mathbb{X}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \bigl(\because A \in \mathcal{M}(\mu^*)\bigr) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*\bigl((E \cap A) \setminus \bigr) + \mu^*(E \setminus A) \\
&\qquad \bigl(\because B \in \mathcal{M}(\mu^*)\bigr) \\
&= \mu^*\bigl(E \cap (A \cap B)\bigr) + \mu^*\bigl(E \setminus (A \cap B)\bigr)
\end{aligned}
$$

となるので

$$A \cap B \in \mathcal{M}(\mu^*)$$

が示せた. $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ より $A \cup B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ となるので, $\mathcal{M}(\mu^*)$ は代数であることがわかる.

<u>$\mathcal{M}(\mu^*)$ は σ 代数であることの証明</u>: いま $E_n \in \mathcal{M}(\mu^*)\,(n = 1, 2, \ldots)$ とし

$$E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad F_n := \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

とおく. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \in \mathcal{M}(\mu^*) \qquad \bigl(\because \mathcal{M}(\mu^*) \text{ は代数}\bigr)$$

となる. このことから $E_1, E_2, \ldots, E_n$ は互いに排反としてよい. $\forall \in \mathbb{X}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus F_n) + \mu^*(E \cap F_n) \qquad \bigl(\because F_n \in \mathcal{M}(\mu^*)\bigr) \\
&= \mu^*(E \setminus F_n) + \mu^*(E \cap F_n \cap E_n) + \mu^*\bigl((E \cap F_n) \setminus E_n\bigr) \\
&\qquad \bigl(\because E_n \in \mathcal{M}(\mu^*)\bigr) \\
&= \mu^*(E \setminus F_n) + \mu^*(E \cap E_n) + \mu^*\left(E \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right)\right) \\
&\qquad (\because E_n \subset F_n)
\end{aligned}
$$

となる. n に対する帰納法により

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \setminus F_n) + \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap E_j) \\
&\geq \mu^*(E \setminus F) + \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap E_j)
\end{aligned}
$$

を得る. $n \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \setminus F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap E_j) \\ &\geq \mu^*(E \setminus F) + \mu^*(E \cap F)\end{aligned}$$

を得る. なぜならば $\bigcup_{j=1}^{\infty}(E \cap E_j) = E \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = E \cap F$ なので補題 C.9 から $\mu^*(E \cap F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap E_j)$ となることよりわかる. したがって $F \in \mathcal{M}(\mu^*)$ が示せた.

<u>μ^* は $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上の σ 加法的測度であることの証明</u>: 再び補題 C.9 から

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus F) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap E_j)$$

となる. $E = F$ とおくと μ^* は $\mathcal{M}(\mu^*)$ 上の測度となる.

$\mathcal{M}(\mu^*)$ は $\mathcal{A}$ を含む σ 代数であるので, $\sigma[\mathcal{A}]$ の定義から

$$\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}(\mu^*)$$

となる. したがって μ^* は $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度となる. □

命題 C.14. $E \subset \mathbb{X}$ に対して

$$\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}(\mu^*).$$

となる.

Proof. $\forall A \mathbb{X}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \mu^*(A \setminus F) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(E)\big(\because \mu^*(E) = 0\big) \\ &\geq \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E)\end{aligned}$$

なので $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$. □

定義 C.15. $\mathbb{X}$ の部分集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\mu(A_n)| < \infty$ かつ $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となるとき, μ は σ 有限測度という.

定理 C.16. μ は代数 $\mathcal{A}$ 上での σ 加法的な非負値関数とする. α を $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度で $A \in \mathcal{A}$ に対して $\alpha(A) = \mu(A)$ とする. このとき $\forall A \in \sigma[\mathcal{A}]$ で $\mu^*(A) < \infty$ なるものに対して

$$\alpha(A) = \mu^*(A)$$

となる. μ が σ 有限のとき代数 $\mathcal{A}$ からの σ 代数 $\sigma[\mathcal{A}]$ への μ の拡張は一意的である.

Proof. $A \in \sigma[\mathcal{A}]$ で $A_n \in \mathcal{A}\,(n = 1, 2, \ldots)$ で $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする．補題 C.9 の証明より

$$\alpha(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n) \qquad \bigl(\because A_n \in \mathcal{A}\bigr)$$

となる．すると

$$\alpha(A) \le \mu^*(A) = \inf\Biggl\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\, A_n \in \mathcal{A}\Biggr\} \tag{C.2}$$

となる．$\mu^*(A) < +\infty$ のとき, 与えられた $\epsilon > 0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \frac{\epsilon}{2}$$

とできる．$k \in \mathbb{N}$ に対して $B_k := \bigcup_{m=1}^{k-1} A_m$ とおくと $B_k \in \mathcal{A}$ で $B_\infty := \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \sigma[\mathcal{A}]$ となる．$A \subset B_\infty$ から

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B_\infty) < \mu^*(A) + \frac{\epsilon}{2}$$

となる．補題 C.12 と補題 C.13 から

$$\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}(\mu^*)$$

となる．定理 C.5 から十分大きな k に対して

$$\mu^*(B_\infty \setminus B_k) < \frac{\epsilon}{2} \tag{C.3}$$

となる．$B_\infty \in \sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ から

$$\mu^*(B_\infty \setminus A) = \mu^*(B_\infty) - \mu^*(A) < \frac{\epsilon}{2}$$

となる．(C.11) から

$$\alpha(B_\infty) \le \mu^*(B_\infty) < \infty$$

なので

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \alpha(B_\infty) - \alpha(B_\infty \setminus) \\
&\ge \alpha(B_k) - \mu^*(B_\infty \setminus A) \ge \mu^*(B_k) - \frac{\epsilon}{2} \qquad \bigl(\because \text{(C.12)}\bigr) \\
&\ge \mu^*(B_\infty) - \epsilon \ge \mu^*(A) - \epsilon
\end{aligned}$$

を得る．$\epsilon \downarrow 0$ とすると

$$\alpha(A) \ge \mu^*(A).$$

したがって

$$\alpha(A) = \mu^*(A).$$

さらに μ が σ 加法的なとき, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ は互いに排反で $\mu(A_n) < +\infty$ [1]とすると

$$\alpha(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_n) = \mu^*(A)$$

となるので, α の一意性は示せた. □

C.2 半環と環

節 C.1 において, 環 $\mathcal{A}$ 上の σ 有限な関数を σ 代数 $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の関数に拡張できることをしました. $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\,(a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)\}$ とし, $C := (a, b]$ に対して, $\mathcal{C}$ 上の関数 μ を $\mu(C) = b - a$ で定める. すると μ は $\mathcal{C}$ 上の σ 有限な測度となること[2]がわかる. しかし, $\mathcal{C}$ は環ではない. $\mathcal{C}$ がある性質をみたすと節 C.1 で述べた拡張は有効に働くことがわかる. そのための議論を以下で行う.

定義 C.17. 空でない集合 $\mathbb{X}$ に対して集合族 $\mathcal{D} \subset 2^{\mathbb{X}}$ が**半環**であるとは次の条件をみたすときをいう.

(i) $\varnothing \in \mathcal{D}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$ かつ有限個の互いに排反な $C_j \in \mathcal{D}\,(j = 1, 2, \ldots, n; n \in \mathbb{N})$ が存在して

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

と書ける.

命題 C.18. $\mathcal{C} = \{(a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$ は半環である.

Proof. $\varnothing \in (a, a] \in \mathcal{C}$ となる. $a < c < d < b$ に対して $(a, b] \setminus (c, d]$ は互いに排反な $\mathcal{C}$ の区間の和となる. □

[1] σ 有限なので, このようにできる.
[2] Dudley (2002, pp.87-88) を参照のこと.

命題 C.19. $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ を空でない集合とし, $\mathbb{X} = \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ とする. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ をそれぞれ $\mathbb{Y}$ と $\mathbb{Z}$ の部分集合族の半環とし

$$\mathcal{D} := \{A \times B;\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

とする. このとき $\mathcal{D}$ は半環である.

Proof. まず $\varnothing \times \varnothing = \varnothing \in \mathcal{D}$ に注意する. 次に $A,\ E \in \mathcal{A}$ と $B,\ F \in \mathcal{B}$ に対して

$$(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F) \in \mathcal{D}$$

となる. さらに

$$D := (A \times B) \setminus (E \times F) = (A \times B) \setminus \big((A \cap E) \times (b \cap F)\big)$$

なので $E \subset A$ と $F \subset B$ を仮定してよい. $A,\ E$ は半環 $\mathcal{A}$ の元なので, $m \in \mathbb{N}$ と互いに排反な $G_j \in \mathcal{A}\,(j = 1,\ 2,\ \ldots)$ があって, $A \setminus E = \bigcup_{j=1}^{m} G_j$ と書ける. 同様に, $n \in \mathbb{N}$ と互いに排反な $H_k \in \mathcal{B}\,(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ があって, $B \setminus F = \bigcup_{k=1}^{n} H_k$ と書ける. このことから

$$\begin{aligned} D &= \big((A \setminus E) \times B\big) \bigcup \big(E \times (B \setminus F)\big) \qquad (\because E \subset A,\ F \subset B) \\ &= \left\{\bigcup_{j=1}^{m} (G_j \times B)\right\} \bigcup \left\{\bigcup_{k=1}^{n} (E \cap H_k)\right\} \end{aligned}$$

となる. $G_j \subset A \setminus E$ なので, $G_j \cap E = \varnothing$ となるので, $\{(G_j \cap B)\}_{j=1}^{m}$, $\{E \times H_k\}_{k=1}^{n}$ は互いに排反で $G_j \times B,\ E \times H_k \in \mathcal{D}$ なので, $\mathcal{D}$ は半環であることが示せた. □

命題 C.20. $\mathcal{D}$ を任意の半環とし, $\mathcal{R}$ を $\mathcal{D}$ の有限個の排反な元の和がなす集合全体の集まりとする. このとき $\mathcal{R}$ は環である.

Proof. 明らかに $\varnothing \in \mathcal{R}$ である. 互いに排反な $A_j \in \mathcal{D}\,(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ m \in \mathbb{N})$ と互いに排反な $B_k \in \mathcal{D}\,(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n \in \mathbb{N})$ に対して

$$A := \bigcup_{j=1}^{m} A_j, \qquad B := \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

とおいたとき

$$A \cap B = \bigcup \left\{A_j \cap B_k;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right\}$$

であり, $A_j \cap B_k \in \mathcal{D}$ は互いに排反である. よって $A \cap B \in \mathcal{R}$ となる.

$$A \cup B = A \cup \big(B \setminus A\big)$$

なので, $B \setminus A \in \mathcal{R}$ を示せばよい.

$$B \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ B_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \right) \right\}$$

と書ける. $B_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ は互いに排反なので, あとは

$$B_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \right) = \bigcap_{j=1}^{m} (B_k \setminus A_j) \in \mathcal{R}$$

を示せばよい. $B_k, A_j \in \mathcal{D}$ なので, 半環の定義から $B_k \setminus A_j \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ である. $\mathcal{R}$ の任意の有限個の元の和も $\mathcal{R}$ に含まれるので, $B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{R}$ となる. よって $B \setminus A \in \mathcal{R}$ となる. 以上の議論から $\mathcal{R}$ は環となる. □

定義 C.21. 任意の集合族 $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{X}}$ に対して $\mathcal{A}$ を含むすべての環の共通部分を $\mathcal{A}$ **によって生成される環**という.

注意 C.22. $\mathcal{A}$ が半環のとき $\mathcal{A}$ によって生成される環は命題 C.20 で与えられたものである. □

命題 C.23. $\mathcal{D}$ を半環とし, α を $\mathcal{D}$ から $[0, \infty)$ への有限加法的な関数とする. 有限個の互いに排反な $D_j \in \mathcal{D}\,(j = 1, 2, \ldots, m;\, m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} D_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha(D_j) \tag{C.4}$$

とおく. このとき μ は well-defined で $\mathcal{D}$ で生成される環 $\mathcal{R}$ 上で有限加法的である. さらに α が $\mathcal{D}$ 上で σ 加法的ならば μ は環 $\mathcal{R}$ によって生成された σ 加法族 $\sigma[\mathcal{R}]$ 上の測度に拡張できる.

Proof. $C_j \in \mathcal{D}\,(j = 1, 2, \ldots, m;\, m \in \mathbb{N})$ と $D_k \in \mathcal{D}\,(k = 1, 2, \ldots, n;\, n \in \mathbb{N}$ はそれぞれ排反とし

$$\bigcup_{j=1}^{m} C_j = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$$

とする. 各 $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$$C_j = \bigcup_{k=1}^{n} (C_j \cap D_k), \quad \{C_j \cap D_k\}_{k=1}^{n} \text{ は互いに排反で } C_j \cap D_k \in \mathcal{D}$$

となる. α の有限加法性から

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha(C_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha(C_j \cap D_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha\left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j \right) \bigcap D_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(D_k)$$

とんる. よって α は well-defined である.

次に $n \in \mathbb{N}$ とし, $B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_n \in \mathcal{R}$ は互いに排反とする. すると各 $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ に対して $m(j) \in \mathbb{N}$ と $B_{j1},\, B_{j2},\, \ldots,\, B_{jm(j)} \in \mathcal{D}$ があって

$$B_j = \bigcup_{k=1}^{m(k)} B_{jk}$$

と書ける. さらに

$$B := \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

とおく. $B = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m(j)} B_{jk},\, B_{jk} \in \mathcal{D}$ であり, α は well-defined ので

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m(j)} \alpha(B_{jk}) \qquad \bigl(\because (\mathrm{C}.4)\bigr) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m(j)} \alpha(B_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{n} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m(j)} B_{jk} \right) \qquad \bigl(\because (\mathrm{C}.4)\bigr) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)
\end{aligned}$$

となる. よって μ は有限加法的であることがわかる.

次に α は σ 加法的と仮定する. $B \in \mathcal{R}$ とすると $m \in \mathbb{N}$ と互いに排反な $C_j \in \mathcal{D}\,(j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ があって,

$$B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

と書ける. さらに $A_k \in \mathcal{R}\,(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ があって

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

と書けたとする. $A_k \in \mathcal{R}$ なので, $\ell(k) \in \mathbb{N}$ と互いに排反な $A_{k1},\, A_{k2},\, \ldots,\, A_{k\ell(k)} \in \mathcal{D}$ があって

$$A_k = \cup_{m=1}^{\ell(k)} A_{km}$$

と書ける. これらから

$$B = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\ell(k)} C_j \cap A_{km}$$

となり, $\{C_j \cap A_{km};\ j = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, \ell(k)\}$ の任意の有限個は互いに排反になる. さらに各 A_k は $\mathcal{D}$ の有限個の互いに排反な元の和である. α は $\mathcal{D}$ 上で σ 加法的なので

$$
\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu\Bigg(\bigcup_{j=1}^{n} C_j\Bigg) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(C_j) \qquad \big(\because (\mathrm{C}.4)\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha\Bigg(C_j \cap \Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Bigg)\Bigg) = \sum_{j=1}^{n} \alpha\Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\ell(k)} (C_j \cap A_{km})\Bigg)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\ell(k)} \alpha(C_j \cap A_{km}) \qquad \big(\alpha \text{ の } \sigma \text{ 加法性}\big)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\ell(k)} \alpha(C_j \cap A_{km})\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Bigg(\Bigg(\bigcup_{j=1}^{n} C_j\Bigg) \bigcap \Bigg(\bigcup_{m=1}^{\ell(k)} A_{km}\Bigg)\Bigg) \qquad \big(\because (\mathrm{C}.4)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \big(\because A_k \subset B\big)
\end{aligned}
$$

となり, μ は $\mathcal{R}$ 上で σ 加法的になる. よって定理 C.8 から μ は $\sigma[\mathcal{R}]$ 上の測度に拡張できる. □

定義 C.24. $\mathbb{X}$ を空でない集合とする. $\mathbb{X}$ の部分集合族 $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{X}}$ が σ **環**であるとは次の条件 (i)-(iii) をみたすときをいう.

(i) $\varnothing \in \mathcal{R}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

(iii) $A_j \in \mathcal{R}\,(j = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$.

注意 C.25. (1) 任意の σ 代数は σ 環である. 逆に $\mathcal{R}$ が σ 環のとき

$$\mathcal{R} \text{ が } \sigma \text{ 環} \iff \mathbb{X} \in \mathcal{R}$$

である.
(2) $\mathcal{R}$ の任意の可算部分集合全体のなす族は σ 環であるが, σ 代数ではない.
(3) f を $\mathbb{X}$ 上の実数値関数とし, $\mathcal{R}$ を $\mathbb{X}$ の部分集合の σ 環とする. このとき f は可測であるとは, 0 を含まない任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{X};\ f(x) \in B\} \in \mathcal{R}$$

である.
(4) $\mathcal{C}$ を $\mathbb{X}$ の部分集合族とする. $\mathcal{C}$ を含む最小の σ 環を $\mathcal{C}$ **によって生成される** σ **環**という. □

定理 C.26. $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{B})$ を可測空間とする. $\mathcal{C}$ を $\mathbb{Y}$ の部分集合族とし, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ によって生成されるとする. 関数 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ が可測であるための必要十分条件は

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{A} \quad (\forall C \in \mathcal{C})$$

である. $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{A}$ を $\mathbb{X}$ 上の σ 環とする. このとき f が可測であるための必要十分条件は

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\, 0 \notin B)$$

である.

Proof. $(\Rightarrow)$ は明らかである.
$(\Leftarrow)$ の証明:

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{B};\, f^{-1} \in \mathcal{A}\}$$

とおく. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ となる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n \in \mathcal{D}$ のとき

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(D_n) \in \mathcal{A}$$

なので, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$ となる. $D,\, E \in \mathcal{D}$ に対して

$$f^{-1}(D \setminus E) = f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$$

より $D \setminus E \in \mathcal{D}$ がわかる. したがって $\mathcal{D}$ は σ 環である. $\mathcal{A}$ が σ 代数のとき $f^{-1}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X} \in \mathcal{S}$ なので $\mathbb{Y} \in \mathcal{D}$ となる. よって 注意 C.25(1) から $\mathcal{D}$ は σ 代数. $\mathcal{D}$ の作り方から $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ である. しかし $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ を含む最小の σ 代数なので, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ となる. したがって $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ がわかる. □

注意 C.27. (1) 定理 C.26 の記号を踏襲する. $\mathbb{R}$ 上の Borel 集合族 $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ を生成する $\mathbb{R}$ の部分集合族として $\{(t, \infty);\, t \in \mathbb{R}\}$ がある. よって $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ の可測性を示すために

$$\{x \in \mathbb{X};\, f(x) > t\} \in \mathbb{A}$$

を示せばよい.

(2) $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}), (\mathbb{Z}, \mathcal{C})$ を可測空間とし, $\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ の部分集合族 $\{B \times C;\, B \in \mathcal{B},\, C \in \mathcal{C}\}$ によって生成される σ 代数を $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ と記す. この $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ を直積空間 $\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ 上の直積 σ 代数という.
(3) $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ を可測空間とし, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ と $g; \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ を関数とする. 関数 $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ を

$$h(x) := (f(x),\, g(x))$$

と定める. 命題 C.23 から

$$h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \times \mathbb{Z} \text{ は可測} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ と } g \text{ はぞれぞれ可測}$$

となる. □

C.3 Lebeague-Stieltjes 測度

$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} = \{(a,\, b];\, a,\, b \in \mathbb{R}\}$$

で定めたとき, $\mathcal{D}$ は半環である. $\mathcal{D}$ の有限個の互いに排反な元の和で書ける集合全体の集まりを $\mathcal{R}$ とすると $\mathcal{R}$ は環となる. さらに $\mathbb{R} \in \mathcal{R}$ であれば $\mathcal{R}$ は代数となる. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を非増加右連続関数とし, F に対応する $\mathcal{D}$ 上の集合関数 μ_F を

$$\mu_F((a,\, b]) = F(b) - F(a) \qquad ((a,\, b] \in \mathcal{D})$$

で定める.

定理 C.28. 環 $\mathcal{R}$ 上の集合関数 μ_F は環 $\mathcal{R}$ 上の σ 加法的測度である.

Proof. σ 加法性を示すために

$$A = (a,\, b],\, A_j = (a_j,\, b_j] \in \mathcal{R}\, (j = 1,\, 2,\, \ldots)$$

とする. ただし $A_1, A_2, \ldots$ は互いに排反とする. さらに

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

とする. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset A$ なので

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_F(A_j) \le \mu_F(A)$$

となる．したがって $n \to \infty$ とすると

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F(A_j) \le \mu_F(A) \tag{C.5}$$

を得る．反対向きの不等号を示すために $\epsilon > 0$ を固定する．関数 F の右連続性から $\delta > 0$ と $\delta_j > 0\,(j = 1, 2, \ldots$ をうまく取ると

$$\mu_F((a,\, a+\delta]) = F(a+\delta) - F(a) \le \epsilon$$

と

$$\mu_F((b_j,\, b_j+\delta_j]) = F(b_j+\delta) - F(b_j) \le \frac{\epsilon}{2^j}$$

とできる．このとき

$$[a+\delta,\, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j,\, b_j+\delta_j)$$

となる．$[a+\delta,\, b]$ はコンパクトなので, $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$[a+\delta,\, b] \subset \bigcup_{j=1}^{k} (a_j,\, b_j+\delta_j)$$

とできる．必要ならば順番を入れ替えればよい．μ_F の非負性と有限加法性から

$$\begin{aligned}
\mu_F\big((a+\delta,\, b]\big) &= \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{k} (a_j,\, b_j+\delta_j)\right) = \sum_{j=1}^{k} \mu_F\big((a_j,\, b_j+\delta_j]\big) \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big((a_j,\, b_j+\delta_j]\big) \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,\, b_j]\big) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big((b_j,\, b_j+\delta_j]\big)
\end{aligned}$$

を得る．δ と ϵ の取り方から

$$\begin{aligned}
\mu_F\big((a,\, b]\big) &\le \mu_F\big((a,\, a+\delta]\big) + \mu_F\big((a+\delta,\, b]\big) \\
&\le \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,\, b_j]\big) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((b_j,\, b_j+\delta_j]\big) \\
&\le \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,\, b_j]\big) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,\, b_j]\big) + 2\epsilon
\end{aligned}$$

となる. $\epsilon \to 0$ とすると

$$\mu_F\big((a,\, b]\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,\, b_j]\big) \tag{C.6}$$

を得る. (C.5) と (C.6) から

$$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F\big((a_j,\, b_j]\big)$$

を得る. $\mathcal{R}$ は $\mathcal{D}$ の排反な有限個の元の和で書けるので, 上記の議論から μ_F は $\mathcal{R}$ 上の σ 加法的速度となることがわかる. □

定理 C.28 と C.16 から μ_F は $\sigma[\mathcal{R}]$ 上の測度 $\tilde{\mu}_F$ に一意的に拡張できる. すなわち $\tilde{\mu}_F$ は $\mathcal{R}$ を含む最小の σ 加法族 $\sigma[\mathcal{R}]$ 上の測度で

$$\tilde{\mu}_F(R) = \mu_F(R) \qquad R \in \mathcal{R}$$

である. この拡張された測度 $\tilde{\mu}_F$ のことを非増加右連続関数 F に対応する Lebeague-Stieltjes 測度という.

つぎの命題は定理 C.28 の逆を主張するものである.

命題 C.29. $\mathcal{D} = \{(a,\, b];\, a,\, b \in \mathbb{R}\}$ とし, $\mu : \mathcal{D} \to [0,\, \infty)$ は σ 加法的集合関数とする. このとき非増加右連続関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\mu\big((a,\, b]\big) = F(b) - F(a) \qquad (\forall a,\, b \in \mathbb{R},\, a < b)$$

と書ける.

Proof.

$$F(x) := \begin{cases} \mu\big((0,\, x]\big) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\mu\big((x,\, 0]\big) & (x < 0) \end{cases}$$

と定める. $b \geq a \geq 0$ のとき μ は加法的なので

$$\mu\big((a,\, b]\big) = \mu\big((0,\, b]\big) - \mu\big((0,\, a]\big) = F(b) - F(a)$$

となる. $a \leq b \leq 0$ のときも同様の式が得られる. つぎに F は非減少関数であることを示す.

$$a \leq b \;\Rightarrow\; F(b) - F(a) = \mu\big((a,\, b]\big) \geq 0 \;\Rightarrow\; F(a) \leq F(b)$$

よりわかる．最後に F の右連続性を示す．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は非増加列で $a_n \downarrow (n \to \infty)$ とする．このとき

$$(b,\, a_] = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{j+1},\, a_j)$$

と書けるので, μ の σ 加法性から

$$\begin{aligned}
F(a_1) - \mathsf{F}(b) &= \mu\big((0,\, a_1]\big) - \mu\big((0,\, b]\big) = \mu\big(b,\, a_1]\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big((a_{j+1},\, a_j]\big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \big\{F(a_j) - F(a_{j+1})\big\} \\
&= F(a_1) - \lim_{j\to\infty} F(a_j) \\
&\qquad \big(\because \text{上の式の級数は絶対収束するので, 順序を入れ替えてよい}\big)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$F(b) = \lim_{j\to\infty} F(a_j)$$

となるので, F の右連続性が示せた． □

以上の議論から次の主張を得る．

命題 C.30. $\mu :, \mathcal{B}\big(\mathbb{R}\big) \to [0,\, \infty) \cup \{+\infty\}$ を測度とし, $\mathbb{R}$ の有界区間に対して有限な値を取るものとする．このとき非増加右連続関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\mu\big((a,\, b]\big) = F(b) - F(a) \qquad \big(\forall a,\, b \in \mathbb{R},\, a < b\big)$$

をみたす．

C.4 Dynkin システムと Lebeague 測度の一意性

定義 C.31. $\mathbb{X}$ を空でない集合とし, $\mathcal{D} \subset 2^{\mathbb{X}}$ とする．$\mathcal{D}$ は Dynkin **システム**であるとは次の条件 (D_1) – (D_3) をみたすときをいう．

(D_1) $\mathbb{X} \in \mathcal{D}$,

(D_2) $\forall D \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; D^c \in \mathcal{D}$, (D$_3$) $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ は互いに排反なとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}.$$

注意 C.32. $\mathcal{D}$ が σ 代数ならば $\mathcal{D}$ は Dynkin システムである．しかし逆は一般には真ではない．たとえば $k \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 4k-1, 4k\}$ とする．このとき

$$\mathcal{D} := \{D \subset \mathbb{X};\ \#(D) = \text{偶数}\}$$

と定めると $\mathcal{D}$ は Dynkin システムであることが確認できる．しかし σ 代数ではない．たとえば $D_1 := \{1, 3\}$, $D_2 := 3, 4$ とすると $D_1 \cap D_2 = \{3\} \notin \mathcal{D}$ となることに注意せよ． □

命題 C.33. $\mathbb{X}$ を空でない集合とし, $\mathcal{G} \subset 2^{\mathbb{X}}$ を $\mathbb{X}$ の任意の部分集合族とする．このとき $\mathcal{G}$ を含む最小の Dynkin システムが存在する．これを $\mathcal{G}$ **によって生成された** Dynkin **システム**といい, $\delta[\mathcal{G}]$ と記す．さらに

$$\mathcal{G} \subset \delta[\mathcal{G}] \subset \sigma[\mathcal{G}]$$

となる．

Proof.

$$\mathcal{D} := \bigcap_{\mathcal{F}\ \text{は Dynkin システムで}\ \mathcal{F} \subset \mathcal{G}} \mathcal{F}$$

とおく． $2^{\mathbb{X}}$ は Dynkin システムなので $\mathcal{D} \neq \varnothing$ である． Dynkin システムである部分集合族の共通部分は Dynkin システムになるので $\mathcal{D}$ は Dynkin システムである．つぎに $\mathcal{D}$ の最小性を示すために $\mathcal{G}$ を含む任意の Dynkin システム $\widetilde{\mathcal{D}}$ を取る．$\mathcal{D}$ の定義から $\mathcal{D} \subset \widetilde{\mathcal{D}}$ が直ちにわかる．よって $\mathcal{D}$ の最小性が示せた．最後の主張を示す．$\mathcal{D}$ が Dynkin システムのとき $\mathcal{D} = \delta[\mathcal{D}]$ である．このことと $\sigma[\mathcal{D}]$ も Dynkin システムであることから

$$\delta\big[\sigma[\mathcal{D}]\big] = \sigma[\mathcal{G}]$$

となる．よって $\mathcal{G} \subset \sigma[\mathcal{G}]$ かつ $\sigma[\mathcal{G}]$ は Dynkin システムである．$\delta[\mathcal{G}]$ の最小性から

$$\delta[\mathcal{G}] \subset \sigma[\mathcal{G}]$$

がわかる． □

補題 C.34. Dynkin システム $\mathcal{D}$ が σ 代数であるための必要十分条件は

$$\forall D,\, E \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; D \cap E \in \mathcal{D} \tag{C.7}$$

である.

Proof. (1) をみたす Dynkin システムは σ 代数であることを示せばよい. そのために $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ に対して

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$$

を示せばよい. $E_1 := D_1 \in \mathcal{D}$ とおき $n \geq 1\,(n \in \mathbb{N})$ に対して

$$\begin{aligned} E_{n+1} &:= \underbrace{\Bigl(\cdots\Bigl(}_{n\text{ の括弧}} \bigl(D_{n+1} \setminus D_n\bigr) \setminus D_{n-1}\Bigr) \cdots\Bigr) \setminus D_1 \\ &= D_{n+1} \bigcup D_n^c \bigcup D_{n-1}^c \bigcup \cdots \bigcup D_1^c \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

となる. 上の式の最後の等号は (C.7) を用いた. すると $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ は互いに排反となるので Dynkin システムの条件 D_3 から

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}$$

となる. よって $\mathcal{D}$ は σ 代数となる. □

定理 C.35. $\mathcal{G} \subset 2^{\mathbb{X}}$ を $\mathbb{X}$ の任意の部分集合族とし,

$$\forall D,\, E \in \mathcal{G}, \Rightarrow\; D \cap D \in \mathcal{G}$$

をみたすとする.

Proof. 命題 C.33 から $\delta[\mathcal{G}] \subset \sigma[\mathcal{G}]$ である. したがって $\delta[\mathcal{G}] \supset \sigma[\mathcal{G}]$ を示せばよい. $\delta[\mathcal{G}]$ が σ 代数であることがわかれば $\sigma[\mathcal{G}]$ の最小性から $\delta[\mathcal{G}] \supset \sigma[\mathcal{G}]$ がわかる.

$\delta[\mathcal{G}]$ が σ 代数であることを確認するためには

$$\forall D,\, E \in \delta[\mathcal{G}] \;\Rightarrow\; D \cap E \in \delta[\mathcal{G}] \tag{C.8}$$

がわかえれば補題 C.34 から $\delta[\mathcal{G}]$ は σ 代数であることがわかる. そのために $D \in \delta[\mathcal{G}]$ を固定する. $\mathbb{X}$ の部分集合族 $\mathcal{D}_D$ を

$$\mathcal{D}_D := \bigl\{Q \in \mathbb{X};\, Q \cap D \in \delta[\mathcal{G}]\bigr\}$$

と定めたとき, $\mathcal{D}_D$ は Dynkin システムであることを示す. $\mathbb{X} \in \mathcal{D}_D$ は明らかなので $\mathcal{D}_D$ は Dynkin システムの定義 C.31 の条件 D_1 をみたす. つぎに $Q \in \mathcal{D}_D$ を取る. すると

$$Q^c \cap D := \big(Q^c \cap D\big)^c \cap D = \Big\{\underbrace{(Q \cap D)}_{\in\delta[\mathcal{G}]} \bigcup \underbrace{D^c}_{\in\delta[\mathcal{G}]}\Big\}^c$$

となる. $Q \cap D$ と D^c は排反なので

$$(Q \cap D) \cup D^c \in \delta[] \ \Rightarrow\ Q^c \cap D \in \delta[\mathcal{G}]$$

である. よって $Q^c \in \mathcal{D}_D$ となる. $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_D$ は互いに排反とする. すると $\{Q_n \cap D\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反かつ $Q_n \cap D \in \delta[\mathcal{G}]\,(n = 1, 2, \ldots)$ となることから

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \bigcap D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap D) \in \delta[\mathcal{G}]$$

となる. よって $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{D}_D$ がわかるので $\mathcal{D}_D$ は Dynkin システムであることが示せた. $\delta[\mathcal{G}]$ の最小性から

$$\delta[\mathcal{G}] \subset \mathcal{D}_G$$

となる. $\mathcal{D}_G$ の定義から

$$\forall G \in \mathcal{G}, \forall D \in \delta[\mathcal{G}] \ \Rightarrow\ D \cap G \in \delta[\mathcal{G}]$$

となる. このことから

$$\forall G \in \mathcal{G}, \forall D \in \delta[\mathcal{G}] \ \Rightarrow\ G \in \mathcal{D}_D$$

なので $\forall D \in \delta[\mathcal{G}]$ に対して

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{D}_D$$

がわかる. よって $\mathcal{D}_D$ は $\mathcal{G}$ を含む Dynkin システムなので

$$\delta[\mathcal{G}] \subset \mathcal{D}_D \qquad (\forall D \in \delta[\mathcal{G}])$$

となる. Dynkin システム $\delta[\mathcal{G}]$ が

$$D, E \in \delta[\mathcal{G}] \ \Rightarrow\ D \cap E \in \delta[\mathcal{G}]$$

をみたしていることを意味する. よって補題 C.34 から $\delta[\mathcal{G}]$ は σ 代数であることがわかる. 以上から補題は証明された. □

定理 C.36. $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ を測度空間とする. $\mathbb{X}$ の部分集合族 $\mathcal{G}$ は以下の条件 (1) – (3) をみたすとする.

(1) $\forall G, H \in \mathcal{G} \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{G}$,

(2) $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ があって $G_n \subset G_{n+1}\,(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{X}$,

(3) $\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{G}]$.

このとき $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の 2 つの測度 μ と ν が

$$\mu(G) = \nu(G) \quad (\forall \in \mathcal{G}) \qquad \text{かつ} \qquad \mu(G_n) = \nu(G_n) < \infty\,(n = 1, 2, \ldots)$$

ならば

$$\mu(A) = \nu(A) \qquad (\forall A \in \mathcal{A})$$

となる.

Proof. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{D}_n := \big\{A \in \mathcal{A};\, \mu(G_n \cap A)\nu(G_n \cap A) < \infty\big\}$$

とおく. すると $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{D}_n$ は Dynkin システムとなることを示す. まず $\mathbb{X} \in \mathcal{D}_n$ は明らか. $A \in \mathcal{D}_n$ を取る. すると

$$\begin{aligned}
\mu(G_n \cap A^c) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n) - \mu(G_n \cap A) \\
&= \nu(G_n) - \nu(G_n \cap A) \quad \big(\because G_n \in \mathcal{G}\,\text{かつ}\,G_n \cap A \in \mathcal{D}_n\big) \\
&= \nu(G_n \setminus A) = \nu(G_n \cap A^c)
\end{aligned}$$

となるので, $A^c \in \mathcal{D}_n$ となる. 最後に $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_n$ は互いに排反とする. このとき

$$\begin{aligned}
\mu\left(G_n \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_n \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_n \cap A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(G_n \cap A_k) \quad \big(\because A_k \in \mathcal{D}_n\big) \\
&= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_n \cap A_k\right) = \nu\left(G_n \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right)
\end{aligned}$$

となるので, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}_n$ となる.

さらに $\mathcal{G}$ は条件 (i) をみたしているので定理 C.35 から

$$\delta[\mathcal{G}] = \sigma[\mathcal{G}]$$

となる．したがって

$\mathcal{D}_n \subset \mathcal{G}$,　かつ　$\mathcal{D}_n$ は Dynkin システム $\Rightarrow \mathcal{D}_n \subset \delta[\mathcal{G}] = \sigma[\mathcal{G}]$　$(\forall n \in \mathbb{N})$

となる．一方

$$\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{G}] \subset \mathcal{D}_n = \mathcal{A}$$

なので $\mathcal{A} = \mathcal{D}_n\,(\forall n \in \mathbb{N})$ である．このことより

$$\mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A) \qquad (\forall n \in \mathbb{N},\, \forall A \in \mathcal{A})$$

となる．よって $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A \cap \mathbb{X}) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap G_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap G_n) \quad \big(\because A \cap G_n \subset A \cap G_{n+1}\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap G_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap G_n\right) = \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right)\right) \\
&= \nu(A \cap \mathbb{X}) = \nu(A)
\end{aligned}$$

となり, 定理は証明された. □

定理 C.37. (1) n 次元 Lebeague 測度 λ_n は

$$\lambda_n(\boldsymbol{x} + B) = \lambda_n(B) \qquad \big(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$$

をみたす．ただし $\boldsymbol{x} + B := \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\, \boldsymbol{y} \in B\}$ である．
(2) 可測空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の測度 μ が

$$\mu(\boldsymbol{x} + B) = \mu(B) \qquad \big(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$$

をみたすならば

$$\mu = \kappa\lambda_n, \qquad \kappa = \mu\big([0,\,1)^n\big) < \infty$$

と書ける．ただし $(0,\,1]^n = \underbrace{(0,\,1] \times (0,\,1] \times \cdots (0,\,1]}_{n\text{ 個の }(0,\,1]}$ である．

Proof. まず

$$B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} + B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) \tag{C.9}$$

を確認する．ただし $\boldsymbol{x} + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b};\, \boldsymbol{b} \in B\}$ である．そのために

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}} := \big\{B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big);\, \boldsymbol{x} + B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big)\big\}$$

と定める. 明らかに $\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}$ は σ 代数で

$$\mathcal{D} = \bigl\{[a_1,\, b_1) \times [a_2,\, b_2) \times \cdots \times [a_n,\, b_n) :\, a_i,\, b_i \in \mathbb{R}\,(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)\bigr\}$$
$$\subset \mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}$$

となる. よって

$$\mathcal{B}\bigl(\mathbb{R}^n\bigr) = \sigma[\mathcal{D}] = \mathcal{A}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathcal{B}\bigl(\mathbb{R}^n\bigr)$$

となり, (C.9) は示せた.
(1) $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ を固定し

$$\nu(B) := \lambda_n(\boldsymbol{x} + B) \qquad \bigl(\forall B \in \mathcal{B}\bigl(\mathbb{R}^n\bigr)\bigr)$$

と定める. いま

$$D = [a_1,\, b_1) \times [a_2,\, b_2) \times \cdots \times [a_n,\, b_n) \in \mathcal{D} \qquad \bigl(a_i,\, b_i \in \mathcal{R};\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\bigr)$$

を取る. ある $i \in \{1,\, 2, \ldots,\, n\}$ に対して $a_i \geq b_i$ の場合は $D = \varnothing$ と約束する. すると

$$\boldsymbol{x} + D = [a_1 + x_1,\, b_1 + x_1) \times \cdots \times [a_n + x_1,\, b_n + x_n) \in \mathcal{D}$$

となる. したがって

$$\nu(D) = \lambda_n(\boldsymbol{x} + D) = \prod_{i=1}^{n}\bigl\{(b_i + x_i) - (a_i + x_i)\bigr\} = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$
$$= \lambda_n(D)$$

となる. よって

$$\nu(D) = \mu(D) \qquad (\forall D \in \mathcal{D})$$

となる. $a_i,\, b_i,\, c_i,\, d_i \in \mathcal{R}\,(i = 1,\, 2, \ldots,\, n)$ に対して

$$\Bigl([a_1,\, b_1) \times \cdots \times [a_n,\, b_n)\Bigr) \bigcap \Bigl([c_1,\, d_1) \times \cdots \times [c_n,\, d_n)\Bigr)$$
$$= [a_1 \vee c_1,\, b_1 \wedge d_1) \times \cdots \times [a_n \vee c_n,\, b_n \wedge d_n)$$

となる. よって $\mathcal{D}$ は共通部分を取る演算に関して閉じているので定理 C.36 から

$$\nu(B) = \lambda_n(B) \qquad \bigl(\forall B \in \mathcal{B}\bigl(\mathbb{R}^n\bigr) = \sigma[\mathcal{D}]\bigr)$$

となる.

(2) $D = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ で $a_i, b_i \in \mathbb{Q}\,(i = 1, 2, \ldots,)$ とする．するとある $M \in \mathbb{N}$, $k(D) \in \mathbb{N}$ と $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ があって

$$D = \bigsqcup_{i=1}^{k(D)} \left\{ \boldsymbol{x}^{(i)} + \left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right] \right\}$$

と書ける．ただし $\bigsqcup$ は直和を表す．μ と λ_n は移動不変なので

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= k(D)\mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right), \\
\lambda_n(D) &= k(D)\lambda_n\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right), \\
\mu\bigl([0, 1) \times \cdots \times [0, 1)\bigr) &= M^n \mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right) \\
\underbrace{\lambda_n\bigl([0, 1) \times \cdots \times [0, 1)\bigr)}_{=1} &= M^n \mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= k(D)\mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right) \\
&= k(D)M^n\mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right), \\
\lambda_n(D) &= k(D)\lambda_n\left(\left[0, \frac{1}{M}\right] \times \cdots \times \left[0, \frac{1}{M}\right]\right) = k(D)M^n
\end{aligned}$$

なので

$$\mu(D) = \mu\bigl([0, 1) \times \cdots \times [0, 1)\bigr)\lambda_n(D)$$

を得る． □

定理 C.38. $A \in \mathsf{M}(n, \mathbb{R})$ は正則行列とする．このとき

$$A(\lambda_n) = |\det A|^{-1}\lambda_n$$

となる．ただし λ_n は $\mathbb{R}^n$ 上の Lebeague 測度で

$$A(\lambda_n)(B) = \lambda_n\bigl(A^{-1}B\bigr) := \lambda_n\Bigl(\bigl\{A^{-1}\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x} \in B\bigr\}\Bigr) \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

である．

Proof. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\mu(B) := \lambda_n\big(A^{-1}B\big)$$

とおく．すると $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(\boldsymbol{x}+B) &= \lambda_n\big(A^{-1}(\boldsymbol{x}+B)\big) = \lambda_n\big(A^{-1}B\big) \qquad \big(\because \text{定理 C.37(i)}\big)\\ &= \mu(B)\end{aligned}$$

となる．よって定理 C.37(ii) から

$$\mu(B) = \mu\big([0,\,1)\times\cdots\times[0,\,1)\big)\lambda_n(B) = \mu\Big(A^{-1}\big([0,\,1)\times\cdots\times[0,\,1)\big)\Big)\lambda_n(B)$$

となる．$A^{-1}\big([0,\,1)\times\cdots\times[0,\,1)\big)$ は平行四辺形となり

$$\mathsf{vol}^{(n)} = |\det A^{-1}| = |\det A|^{-1}$$

となるので

$$\mu(B) = |\det A|^{-1}\lambda_n(B)$$

がわかる． $\square$

C.5　積分の定義

定義 C.39. (1) $d \in \mathbb{N})$ とし，$A \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$ とする．集合 A の**特性関数** $\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^d \to \{0,\,1\}$ を

$$\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in A)\\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin A)\end{cases}$$

で定める．
(2) 関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が Borel 可測であるとは各 $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d;\, f(\boldsymbol{x}) > r\big\} = f^{-1}\big((r,\,\infty)\big) \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$$

となることである．
(3) $N \in \mathbb{N}$ とする．有限個の $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_N \in \mathbb{R}$ とそれらと同数の Borel 可測集合の有限個の列 $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$ を用いて

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n}(\boldsymbol{x})$$

と表せる関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を Borel 単関数 という．

定理 C.40. 連続関数は Borel 可測である.

Proof. $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して (r,∞) は $\mathbb{R}$ の開集合である. f は連続であるので, $f^{-1}\big((r,\infty)\big)$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合となるので,

$$f^{-1}\big((r,\infty)\big) \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$$

がわかる. □

補題 C.41. Borel 集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R} \cup \{\pm\}$ への関数について次の性質が成り立つ.

(1) f が Borel 可測のとき $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{f < r\} = f^{-1}\big(-\infty, r)\big) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big).$$

(2) f, g を Borel 可測とするとき和 $f+g$, 積 $f \cdot g$ は Borel 可測である. ただし $f(x)+g(x) = \infty + (-\infty)$ または $(-\infty)+\infty$, $f(x)g(x) = 0 \cdot (\pm\infty)$ または $f(x)g(x) = \pm\infty \cdot 0$ の場合を除く.

(3) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Borel 可測関数列とするとき

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \limsup_{n\to\infty} f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

も Borel 可測となる. さらに $\lim_{n\to\infty} f_n$ が存在すれば $\lim_{n\to\infty} f_n$ も Borel 可測である.

Proof. (1)

$$(-\infty, r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, r - \frac{1}{n}\right]$$

を用いると

$$\{f < r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \le r - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f > r - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$$

よりわかる.
(2) $\forall r \in \mathbb{R}$ とすると

$$\big\{f+g > r\big\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \big\{f > q\big\} \cup \big\{g > r-q\big\}$$

となる. よって $f+g$ も Borel 可測である. また

$$\big\{f^2 > r\big\} = \begin{cases} \big\{g > \sqrt{r}\big\} \cup \big\{g < -\sqrt{r}\big\} & (r \ge 0), \\ \mathbb{R} & (r < 0) \end{cases} \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$$

となるので f^2 も Borel 可測となる．このことから

$$f \cdot g = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$$

と書けるので $f \cdot g$ も Borel 可測となる．
(3) $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > r\right\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > r\}, \\ \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n > r\right\} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f_n > r + \frac{1}{m}\right\}, \\ \limsup_{n\to\infty} &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} f_k\right), \\ \liminf_{n\to\infty} f_n &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} f_k\right) \end{aligned}$$

よりわかる． □

定理 C.42. $\mathbb{R}^d$ で定義される正値 Borel 可測函数は正値 Borel 単関数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の単調増大列の極限として表される．

Proof. $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ に対して単関数 f_n を

$$f_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{j-1}{2^n} & \left(\dfrac{j-1}{2^n} \leq f(\boldsymbol{x}) < \dfrac{j}{2^n} \left(j = 1, 2, \ldots, n2^n\right)\right), \\ n & (f(\boldsymbol{x}) \geq n) \end{cases}$$

で定義すると f_n は Borel 可測となる．また

$$\begin{aligned} &0 \leq f_1(\boldsymbol{x}) \leq f_2(\boldsymbol{x}) \leq \cdots \leq f(\boldsymbol{x}), \\ &\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

となる． □

注意 C.43. $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) < \infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left|f(\boldsymbol{x}) - f_n(\boldsymbol{x})\right| = 0$$

となる． □

定義 C.44. $E \subset \mathbb{R}^d$ は Borel 可測集合とする．$f\colon E \to [0, \infty)$ を正値 Borel 単関数とする．$N \in \mathbb{N}$ とし, $a_1, a_2, \dots, a_N \in (0, \infty)$ と互いに交わらない $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を用いた表現として

$$f = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbb{1}_{A_j}$$

と表されるとき Borel 単関数 f の E 上の積分を

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{N} a_j \mu\bigl(E \cap A_j\bigr)$$

と定める．

注意 C.45. 正値単関数 $f\colon E \to [0, \infty)$ の積分 $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$ は f の表現のとり方によらないことがわかる． □

定義 C.46. E を $\mathbb{R}^d$ の Borel 可測集合とする．$f\colon E \to [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ が正値 Borel 可測関数のとき f の積分 $\int_E f\, d\mu(\boldsymbol{x})$ を

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \sup\left\{\int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x});\, g \text{ は } 0 \le g \le f \text{ なる単関数}\right\}$$

と定める．

注意 C.47. 上記の定義において $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = 0,\ \infty$ の可能性も許している． □

命題 C.48. $g\colon E \to [0, \infty)$ を非負値単関数とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\forall \boldsymbol{x} \in E$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) \ge g(\boldsymbol{x})$$

をみたす正値 Borel 関数の増大列のとき

$$\int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \int_E \min\bigl\{f_n(\boldsymbol{x}),\, g(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

Proof. 単関数の積分について加法性が成り立つので, 一般性を失わず

$$g(\boldsymbol{x}) = a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}), \quad a > 0,\ A \in \mathcal{B}\bigl(\mathbb{R}^d\bigr)$$

と仮定して

$$a\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_E \min\bigl\{a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}),\, f_n(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{C.10}$$

を示せばよい. $\epsilon > 0$ を固定する. $n = 1, 2, \ldots$ として

$$A_n := \{f_n > a - \epsilon\} \cap A$$

とおくと $\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) \geq a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$ から

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \quad \text{かつ} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

となる. すると

$$a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \geq \min\bigl\{a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}),\, f_n(\boldsymbol{x})\bigr\}$$

から

$$\begin{aligned} a\mu(A) &\geq \lim_{n\to\infty} \int_E \min\bigl\{a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}),\, f_n(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \int_E (a-\epsilon)\mathbb{1}_{A_n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\ &= (a-\epsilon) \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\ &= (a-\epsilon)\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= (a-\epsilon)\mu(A) \end{aligned}$$

となる. ϵ は任意だったので

$$a\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_E \min\bigl\{a\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}),\, f_n(\boldsymbol{x})\bigr\}\,d\mu(\boldsymbol{x})$$

を得る. □

定理 C.49. $0 \leq f_n \leq f_{n+1}\,(n \in \mathbb{N})$ をみたす Borel 可測集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義された Borel 可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとする. 関数 $f\colon E \to \mathbb{R}$ を各点 $\boldsymbol{x} \in E$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めると

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

Proof. f_n の単調増加性より

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \leq \int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

は明らかである．逆向きの不等式を示すために単関数 g を $0 \le g \le f$ となるようにとる．命題 C.48 から

$$\int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty}\int_E \min\bigl\{g(\boldsymbol{x}),\, f_n(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

となる．さらに積分の定義から

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,d\mu(\boldsymbol{x}) = \sup_{0\le g\le f}\int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

を得る．よって定理は示された． □

命題 C.50. f, g は Borel 集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義された正値 Borel 可測関数ならば

$$\int_E \bigl\{f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

となる．

Proof. 単関数の増大列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとり $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ とする．定理 C.49 より

$$\begin{aligned}
\int_E \bigl\{f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) &= \lim_{n\to\infty}\int_E \bigl\{f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \int_E g_n(\boldsymbol{x})\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \int_E g_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

よりわかる． □

定理 C.51. (Fatou の補題) Borel 集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義さらた正値 Borel 可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \le \liminf_{n\to\infty}\int_e f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

Proof. $\left\{\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}\cap[k,\,\infty)} f_\ell\right\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加列であることに注意して定理 C.49

を用いると

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{\ell\to\infty} f_\ell(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) &= \int_E \lim_{k\to\infty}\left\{\inf_{\ell\in\mathbb{N}\cap[k,\,\infty)} f_\ell(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\right\}\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_E\left\{\inf_{\ell\in[k,\,\infty)} f_\ell(\boldsymbol{x})\right\}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\\ &= \liminf_{k\to\infty}\int_E\left\{\inf_{\ell\in[k,\,\infty)} f_\ell(\boldsymbol{x})\right\}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\\ &= \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となることから定理は証明された. □

定義 C.52. $E\subset\mathbb{R}^d$ を Borel 可測集合とする. $f\colon E\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して

$$f^+ := \max\{f,\,0\},\quad f^- := \max\{-f,\,0\}$$

とおく. f が可積分であるとは

$$\int_E f^+(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})<\infty,\quad \int_E f^{-1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})<\infty$$

のときをいう. さらにこのとき

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f^+(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \int_E f^{-1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

と定める.

注意 C.53. Borel 可測関数 $f\colon E\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ が可積分でることと $|f|$ が可積分であることは同値である.

定理 C.54. (Lebeague の収束定理) $E\subset\mathbb{R}^d$ を Borel 可測集合とする. $f_n\colon E\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\,(n=1,\,2,\,\ldots)$ を関数 f に各点で収束する Borel 可測関数とする. 非負値可積分関数 $g\colon E\to[0,\,\infty)\cup\{+\infty\}$ が存在し, $|f_n(\boldsymbol{x})|\le g(\boldsymbol{x})\,(\forall\boldsymbol{x}\in E,\,\forall n\in\mathbb{N})$ をみたしていれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

となる.

Proof. $g\pm f_n\ge 0$ であるから, Fatou の補題から

$$\begin{aligned}\int_E\{g(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x})\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) &\le \int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\\ \int_E\{g(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) &\le \int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \liminf_{n\to\infty}\int_E\{-f_n(\boldsymbol{x})\}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\\ &= \int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) - \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となる. 各項は有限であるので

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \le \int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$
$$\le \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

となり, 定理は証明された. □

系 C.55. Borel 可測集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上の可積分 Borel 可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) < \infty$ をみたすとする.

$$F = \left\{ x \in E;\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\boldsymbol{x})| \text{ は収束 } \right\}$$

とおいたとき

$$\mu\bigl(E \setminus F\bigr) = 0$$

で

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_F \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

Proof.

$$t_n(\boldsymbol{x}) := \sum_{\ell=1}^{n} |f_\ell(\boldsymbol{x})|$$

とおく. 単調収束定理から

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=1}^{n}\int_E |f_n(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_E \sum_{\ell=1}^{n} |f_n(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_E t_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_E \lim_{n\to\infty} t_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となるので, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\boldsymbol{x})|$ は可積分である. あとは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\boldsymbol{x})$ に Lebeague の収束定理を適用すればよい. □

定理 C.56. $E \subset \mathbb{R}^d$ を Borel 可測集合とする. $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$ とし, 関数 $f : (a, b) \times E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は次の条件をみたしているとする.

(1) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ を止めるごとに $f(\,\cdot\,, \boldsymbol{x})$ は連続関数となる.

(2) 非負値可積分関数 $g : E \to [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ が存在して $|f(t\,\cdot)| \leq g$ となる.

このとき $t_0 \in (a, b)$ に対して

$$\lim_{t \to t_0} \int_E f(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f(t_0, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

Proof. $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b)$ で $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ なる点列を取る. Lebeague の収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(t_n, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E \lim_{n\to\infty} f(t_n, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f(t_0, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

よりわかる. □

定理 C.57. $E \subset \mathbb{R}^d$ を Borel 可測集合とする. 関数 $f : (a, b) \times E \to \mathbb{R}$ は次の条件をみたすとする.

(1) $\forall t \in (a, b)$ と $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して $\dfrac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x})$ は存在する.

(2) $f(t, \,\cdot\,)$ は可積分である.

(3) 非負値可積分 $g : E \to (0, \infty)$ が存在して

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x})\right| \leq g(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \in E)$$

となる.

このとき

$$\frac{d}{dt} \int_E f(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

Proof. $t_0 \in (a, b)$ を固定する. $t \in (a, b)$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して関数 $G(t, \boldsymbol{x})$ を

$$G(t, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(t, \boldsymbol{x}) - f(t_0, \boldsymbol{x})}{t - t_0} & (t \neq t_0) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} f(t_0, \boldsymbol{x}) & (t = t_0) \end{cases}$$

と定める. 定理 C.56 を関数 G に適用すればよい. □

C.6 Fubini の定理

命題 C.58. $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{U})$ 位相空間とする．任意の移送空間 $(\mathbb{Z}, \mathcal{V})$ に対して $\mathbb{B}(\mathbb{Z}, \mathcal{V})$ を $\mathcal{V}$ の位相によって生成される $\mathbb{Z}$ の Borel 集合族とする．このとき $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ の積位相によって生成される $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ 上の集合族 $\mathcal{C}$ は Borel 直積 σ 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ と $\mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathcal{U})$ を含む．$(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{U})$ がともに第 2 可算公理をみたすとき

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathcal{T}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathcal{U})$$

となる．

Proof. 証明はどこかをみること． □

$(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ を測度空間とし，

$$\mathcal{D} := \{A \times B;\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} \tag{C.11}$$

とする．すると命題 C.19 より $\mathcal{D}$ は半環となる．$\forall A \times B \in \mathcal{R}$ に対して

$$\rho(A \times B) := \mu(A) \times \nu(B) \tag{C.12}$$

と定める．ただし $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ と約束する．

定理 C.59. (C.12) で定義された ρ は $\mathcal{D}$ 上で σ 加法的となる．

Proof. $n \in \mathbb{N}$ とし，$B_n \in \mathcal{B}$, $C_n \in \mathcal{C}$ とする．$\{B_n \times C_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の有限部分集合は互いに排反とし

$$B \times C := \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \times C_n)$$

とおく．すると $x \in \mathbb{X}$ と $y \in \mathbb{Y}$ に対して

$$\mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_C(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(x)\mathbb{1}_{C_n}(y)$$

と書ける．各 x に対して，ν で積分をすると

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_B(x)\nu(C) = \int \mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_C(y)\,\mathrm{d}\nu(y) &= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(x)\mathbb{1}_{C_n}(y) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(x) \int \mathbb{1}_{C_n}(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \qquad (\because \text{単調収束定理 (定理 C.49)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(x)\nu(C_n)
\end{aligned}$$

となる．さらに μ で積分すると

$$
\begin{aligned}
\mu(B)\nu(C) &= \int \mathbb{1}_B(x)\nu(C)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(x)\nu(C_n)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) \int \mathbb{1}_{B_n}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (\because \text{単調収束定理 (定理 C.49)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\nu(C_n)
\end{aligned}
$$

を得る．よって ρ は $\mathcal{D}$ 上で σ 加法的である． □

$\mathcal{R}$ を (C.11) で定義さらた半環 $\mathcal{D}$ によって生成される環[3]とする．注意 C.22 から $\mathcal{R}$ は $\mathcal{D}$ の有限個の排反な元の和が成す部分集合族である．$\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\in\mathcal{R}$ なので注意 C.25(1) から σ 代数となる．

注意 C.60. (1) $n\in\mathbb{N}$ とする．排反な $R_1, R_2, \ldots, R_n\in\mathcal{R}$ に対して

$$
\rho\left(\bigcup_{j=1}^{n} R_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \rho(R_j)
$$

となるので命題 C.23 と定理 C.59 から ρ は well-defined で $\mathcal{R}$ 上で σ 加法的である．
(2) すると ρ は直積 σ 集合族 $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ 上の σ 加法的測度に拡張できる．しかし拡張が一意的であるとは一般的に限らない．次のステップで拡張が一意的であるための十分条件を求めよう． □

定義 C.61. 集合族 $\mathcal{M}$ は**単調族**であるとは，$M_n\in\mathcal{M}\,(n=1,2,\ldots)$ かつ $M_1\supset M_2\supset\cdots$ で $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n =: M$ または $M_1\subset M_2\subset\cdots$ で $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n =: M$ に対して $M\in\mathcal{M}$ のときをいう．

注意 C.62. 任意の σ 代数は単調族であるが，位相は一般にはそうではない．なぜならば無限個の開集合の共通部分は開集合でないことからわかる．またベキ集合は単調俗である．したがって任意の集合族 $\mathcal{D}$ を含む最小の単調族が存在する． □

定理 C.63. $\mathbb{X}$ を空でない集合とする．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{X}$ の部分集合の代数とする．このとき $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族 $\mathcal{M}$ は σ 代数である．

Proof. $\mathcal{N} := \{E\in\mathcal{M};\ \mathbb{X}\setminus E\in\mathcal{M}\}$ とおく．このとき $\mathcal{M}$ は単調族なので，$\mathcal{N}$ も単調族で $\mathcal{A}\subset\mathcal{N}$ となる．よって $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$ となる．各 $A\subset\mathbb{X}$ に

[3]作り方から $\mathcal{R}$ は σ 環になっていることに注意せよ．

対して

$$\mathcal{M}_A := \{E:\ E \cap A \in \mathcal{M}\}$$

とおく．このとき $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ であり, $\mathcal{M}_A$ も単調族なので, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$ となる．さらに $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{M}_E := \{F;\ F \cap E \in \mathcal{M}\}$$

とおくと $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_E$ なので $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_E$ となる．したがって $\mathcal{M}$ は代数となる．さらに $\mathcal{M}$ は単調族なので $\mathcal{M}$ は σ 代数となる． □

定理 C.64. $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ を測度空間とし, $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ かつ $\nu(\mathbb{Y}) < \infty$ とする．

$$\mathcal{F} := \Bigg\{E \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y};\ \int\left[\int \mathbb{1}_E(x,\, y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) = \int\left[\int \mathbb{1}_E(x,\, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)\Bigg\}$$

とおく．このとき

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$$

となる．

Proof. $B \in \mathcal{B}$ と $C \in \mathcal{C}$ に対して $E := B \times C$ とすると

$$\begin{aligned}\iint \mathbb{1}_E(x,\, y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) &= \mu(B)\int \mathbb{1}_C(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \mu(B)\nu(C)\\ &= \nu(C)\int \mathbb{1}_B(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \iint 1_E(x,\, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\mathcal{R} := \{B \times C;\ B \in \mathcal{B},\, C \in \mathcal{C}\}$$

としたとき

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$$

となる．$E_n \in \mathcal{F}\,(n = 1, 2, \ldots)$ で $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n =: E$ または $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n =: E$ としたとき, $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ かつ $\nu(\mathbb{Y}) < \infty$ なので, 有界収束定理 (定理 C.49) から $E \in \mathcal{F}$ となる．したがって $\mathcal{F}$ は単調族. $\mathcal{A}$ を $\mathcal{R}$ の有限個の互いに排反な元の和全体からなる集合族とすると $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ となる．したがって定理 C.63 から $\mathcal{F}$ は σ 代数で $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ となる． □

定理 C.65. $(\mathbb{X},\,\mathcal{A},\,\mu)$ と $(\mathbb{Y},\,\mathcal{B},\,\nu)$ を σ 有限測度空間とする．このとき

$$\rho(A\times B)=\mu(A)\nu(B)\qquad (A\in\mathcal{A},\,B\in\mathcal{B})$$

と定めると ρ は $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 上の測度に一意的に拡張され, $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ に対して

$$\rho(E)=\iint \mathbb{1}_E(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)=\iint \mathbb{1}_E(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

となる．

Proof. まず $\mu(\mathbb{X})<\infty$ かつ $\nu(\mathbb{Y})<\infty$ と仮定する．$E\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ に対して

$$\alpha(E):=\iint \mathbb{1}_E(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

とおく．定理 C.64 より積分の順序の交換ができる．α は有限加法的であり, 単調収束定理（定理 C.49）から σ 加法性もわかる．

さらに $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ の測度 β に拡張できたとする．すると

$$\mathcal{G}:=\{E\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C};\,\alpha(E)=\beta(E)=1\}$$

とおくと $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}$ かつ $\mathcal{G}$ は単調族なので, $\mathcal{G}\subset\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ となる．よって定理は有限測度に対して成立する．

次に $B_m\subset\mathbb{X}\,(m=1,\,2,\,\ldots)$ と $C_n\,(n=1,\,2,\,\ldots)$ は排反な集合で $\mathbb{X}=\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m$, $\mathbb{Y}=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ とする．$E\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ とし, $E_{mn}:=E\bigcup(B_m\times C_n)$ とおく．各 $m,\,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\iint \mathbb{1}_{E_{mn}}(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)=\iint \mathbb{1}_{E_{mn}}(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

となる．上の式について m と n に関して和を取る．単調収束定理（定理 C.49）より, $\forall E\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
\alpha(E)&:=\iint \mathbb{1}_E(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\iint\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_{mn}}(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\iint\mathbb{1}_{E_{mn}}(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\iint\mathbb{1}_{E_{mn}}(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\iint\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_{mn}}(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\iint \mathbb{1}_E(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

となる. α は有限加法的であり, 単調収束定理（定理 C.49）より, σ 加法的になり, α は $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ 上の測度で

$$\alpha(E)=\rho(E)\qquad(\forall E\in\mathcal{A})$$

となる. β を $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ 上の測度で

$$\beta(E)=\rho(E)\qquad(\forall E\in\mathcal{A})$$

とすると $\forall E\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\beta(E)=\beta\biggl(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{mn}\biggr)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\beta(E_{mn})=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(E_{mn})\\&=\alpha\biggl(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{mn}\biggr)=\alpha(E)\qquad(E_{mn}\in\mathcal{A})\end{aligned}$$

となり, 拡張は一意的であることもわかる. □

定理 C.66. $(\mathbb{X},\,\mathcal{A},\,\mu)$ と $(\mathbb{Y},\,\mathcal{B},\,\nu)$ を σ 有限測度空間とし, $f:\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to[0,\,\infty)\cup\{+\infty\}$ は $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ 可測関数または $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{X}\times\mathbb{Y},\,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\,\mu\times\nu)$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\int f(x,\,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,\,y)&=\iint f(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\&=\iint f(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. ほとんど至るところの $y\in\mathbb{Y}$ に対して $\int f(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ は定義され, ほとんど至るところの $x\in\mathbb{X}$ に対して $\int f(x,\,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ は定義される.

Proof. 定理 C.65 より, 非負値単関数 f に対して定理は成立する. 非負値関数 f に対して, 定理 C.42 と単調収束定理（定理 C.49）より, 定理は成り立つ. $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{X}\times\mathbb{Y},\,\mathcal{B}\otimes\mathcal{C},\,\mu\times\nu)$ のとき, $f^+=\max\{f,\,0\}$, $f^-=\max\{-f,\,0\}$ に対して, 定理は成立する. したがってほとんど至るところの $y\in\mathbb{Y}$ で $\int f^+(x,\,y)\,\mu(x)<\infty$ は定義される. 同様に f^- も同様の性質を持つ. よって ν に関してほとんど至るところの $y\in\mathbb{Y}$ に対して $\int|f(x,\,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$ となる. よって

$$\int f(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int f^+(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)-\int f^-(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

となり, それぞれの積分は有限値となる. よって $\iint f(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)$ は定義され, 有限値を取るので

$$\begin{aligned}&\iint f(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\&\quad=\iint f^+(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)-\iint f^-(x,\,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{aligned}$$

となる．よって $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ に対しても定理は成立する．
□

C.7 絶対連続性と Radon-Nikodym の定理

定義 C.67. $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ を可測空間とし, μ と ν を $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の測度とする．$\forall A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0$$

のとき ν は μ に関して**絶対連続**であるといい, $\nu \ll \mu$ と書く．

注意 C.68. f を可測関数とし, μ を測度とし

$$\int f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

が定義されているとする．このとき

$$\nu(A) := \int_A f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

と定めると $\mu\{x \in \mathbb{X};\ f(x) < 0\} > 0$ のとき ν は負値も取るので**符号付測度**となる． □

補題 C.69. μ と ν を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の測度とする．次の条件を考える．

任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$\mu(A) < \delta \ \Rightarrow\ \nu(A) < \epsilon. \tag{C.13}$$

このとき, 以下が成立する．

- 条件 (C.13) が成立 $\Rightarrow$ $\nu \ll \mu$.
- $\nu \ll \mu$ かつ ν は有限測度 $\Rightarrow$ (C.13) が成立.

Proof. 第 1 の主張の証明: $\forall \epsilon > 0$ に対して $\mu(A) = 0$ とする．このとき $\nu(A) < \epsilon$ となる．ϵ は任意だったので, $\nu(A) = 0$. よって $\nu \ll \mu$.
第 2 の主張の証明: $\nu \ll \mu$ とする．ν は有限測度として, (1) は成立しないと仮定する．すると $\exists \epsilon > 0$ が存在して, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \in \mathcal{A}$ が存在して

$$\mu(A_n) < \frac{1}{n^2} \quad \text{かつ} \quad \nu(A_n) \geq \epsilon$$

とできる.

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

とおくと, Borel-Cantelli の第 1 の補題より

$$\mu(A) = 0 \qquad \left(\because \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\right)$$

である. $B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ とおくと各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, $B \subset B_k$ なので,

$$\mu(B) \leq \mu(B_k).$$

さらに

$$\mu(B_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

なので,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$$

となるので, $\mu(B) = 0$ となる. ν は有限測度なので

$$\nu(A) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geq \epsilon$$

となり, $\nu(A) = 0$ と矛盾. よって第 2 の主張も証明された. □

定理 C.70. (Radon-Nikodym の定理) μ と ν を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の測度とし, μ は σ 有限とする. このとき可測関数 $f : \mathbb{X} \to [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ が存在して, $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{C.14}$$

と書ける. さらに $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ は ν 可積分とする. このとき

$$\int g(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int g(x) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

が成立する. 関数 f を μ に関する ν の Radon-Nikodym **の微分**といい, $\mu - a.e.$ で一意的である. f のことを $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x)$ と書く. ν が σ 有限のとき $\mu - a.e.$ で f は有限となる.

Proof. (1) 一意性の証明: (C.14) をみたす f が存在したとする．g は別の関数で

$$\mu\{x \in \mathbb{X};\ f(x) \neq g(x)\} > 0 \tag{C.15}$$

とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n := \left\{x \in \mathbb{X};\ f(x) > g(x) + \frac{1}{n}\right\} \quad B_n := \left\{x \in \mathbb{X};\ f(x) < g(x) - \frac{1}{n}\right\}.$$

とする．(C.15) からある $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\mu(A_n) > 0 \quad \text{または} \quad \mu(B_n) > 0$$

となる．$A \subset A_n$ または $A \subset B_N$ とし

$$0 < \mu(A_n) < +\infty$$

とする．このとき

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \neq \int_A g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

となるので, $g \neq \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ となる．
(2) f の存在の証明: 以下を順に証明していく．

(2-1) μ が有限測度のとき (C.14) が成立すれば, μ が σ 有限測度でも (C.14) が成立する．

(2-2) μ が有限測度のとき (C.14) をみたす f を構成し, f は可測である．

$(2-1)$ の証明: μ は σ 有限とする．$A_n \in \mathcal{A}\,(n = 1, 2, \ldots)$ は互いに排反で, $\mu(A_n) < \infty$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{X}$ とする．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu_k(A) := \mu(A \cap A_k) \quad (A \in \mathcal{A}), \qquad \nu_k(A) := \nu(A \cap A_k) \quad (A \in \mathcal{A})$$

とする．明らかに各 $k \in \mathbb{N}$ について $\nu_k \ll \mu_k$ となる．すると $k \in \mathbb{N}$ についてある可測関数 $f_k : \mathbb{X} \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ が存在して

$$\nu_k(A) = \int_A f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

とできる．ここで

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} f_k(x)$$

とおけば, f は (C.14) をみたすことがわかる.
(2 − 2) の証明: μ は有限測度とし, 非負の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\nu_q := q\mu - \nu$$

と定める. すると $\nu_q(A) < \infty \, (\forall A \in \mathcal{A})$ となる. 各 $q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\mathcal{P}_q := \{A \in \mathcal{A};\, \nu_q(B) \geq 0,\, \forall B \subset A\},$$
$$\lambda_q := \sup_{A \in \mathcal{P}_q} \nu_q(A)$$

と定める. 明らかに $\varnothing \in \mathcal{P}_q$ であるので, $\lambda_q \geq 0$ である. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ かつ $A_n \in \mathcal{P}_q$ をうまくとり

$$\lambda_q = \lim_{n \to \infty} \nu_q(A_n)$$

となるようにできる. さらに

$$A^q := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

とおく. A^q の部分集合は A_n の部分集合の和で表現できるので, $A^q \in \mathcal{P}_q$ となる[4]. したがって

$$\lambda_q \geq \nu_q(A^q) \tag{C.16}$$

がわかる. 一方, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $A^q \setminus A_n \subset A^q$ となる. $A^q \in \mathcal{P}_q$ なので, 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\nu_q(A^q \setminus A_n) \geq 0$$

となる. よって $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方から

$$\nu_q(A^q) = \nu_q(A^q \setminus A_n) + \nu(A_n) \geq \nu_q(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} \lambda_q$$

となる. よって $\nu_q(A^q) \geq \lambda_q$ と (C.16) より

$$\lambda_q = \nu_q(A^q)$$

がわかる.
　次に $B^q = (A^q)^c$ とおいたとき

$$\nu_q(B) \leq 0 \qquad (\forall B \subset B^q) \tag{C.17}$$

[4] $\forall B \subset A^q$ に対して $B \cap A_n \subset A_n$. よって $0 \leq \nu_q(B \cap A_n) \leq \nu_q(B)$ なので, $A^q \in \mathcal{P}_q$ がわかる.

であることを背理法で示す.

そのために

$$\text{ある } B \subset B^q \text{ があって } \nu_q(B) > 0 \tag{C.18}$$

と仮定する. B が負の測度をもつ部分集合を持たなければ, $B \in \mathcal{P}_q$ となる. B と A^q は排反なので

$$\nu_q(A^q \cup B) = \nu_q(B^q) + \nu_q(B) > \lambda_q$$

となる. したがって

$$B \cup A^q \in \mathcal{P}_q \quad \text{かつ} \quad \nu_q(A^q \cup B) > \lambda$$

となるので, これは A^q の定義と矛盾する. よって

$$\exists \widetilde{B} \subset B \text{ で } \nu_q(\widetilde{B}) < 0$$

となるものが存在する.

このことを踏まえて自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を以下のように定める. 各 $k \in \mathbb{N}$ と $k = 2, 3, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned}
&n_1 := \min\left\{n \in \mathbb{N};\, \nu_q(B_1) < -\frac{1}{n},\, \exists B_1 \subset B\right\},\\
&n_2 := \min\left\{n \in \mathbb{N} \cap [n_1, \infty);\, \nu_q(B_2) < -\frac{1}{n},\, \exists B_2 \subset B \setminus B_1\right\},\\
&\quad \vdots\\
&n_k := \min\left\{n \in \mathbb{N} \cap [n_{k-1}, \infty);\, \nu_q(B_k) < -\frac{1}{n},\, \exists B_k \subset B \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{k-1} B_\ell\right)\right\}
\end{aligned}$$

とする. いま

$$C := B \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)$$

とおく. 明らかに $\nu_q(C) > 0$ である. なぜならば

$$\nu_q(C) = \nu_q(B) - \underbrace{\nu_q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)}_{<} > 0$$

よりわかる.

もし C が負の測度を持つ部分集合を持たなければ, $C \in \mathcal{P}_q$ となり,

$$C \subset B \subset B^q = (A^q)^c$$

と矛盾し, (C.17) が示せる. このことを踏まえ

$$\nu_q(D) \geq 0 \qquad (\forall D \subset C) \tag{C.19}$$

を背理法で示す. そのためにある $D \subset C$ が存在して

$$\nu_q(D) =: -\epsilon < 0$$

を仮定する. (C.18) で $\nu_q(B) > 0$ と仮定していたので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_q(B_k) > -\infty$$

となる. なぜならば $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_q(B_k) = -\infty$ ならば

$$C = B \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right)$$

なので $\nu_q(B) > 0$ とはならない. よって

$$\lim_{k\to\infty} \nu_q(B_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$$

となることがわかる. このことからある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{n_{k+1} - 1} < \epsilon \tag{C.20}$$

とできる. したがって

$$\nu_q(D) = -\epsilon < -\frac{1}{n_{k+1} - 1} \quad かつ \quad D \subset B \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{k} B_\ell \right)$$

であることと n_{k+1} の定義に注意すると

$$\nu_q(D) \geq -\frac{1}{n_{k+1}}$$

となり, これと (C.20) は矛盾する. よって (C.19) が確認できた. これで (C.17) が示せた.

$\widetilde{q} > q$ なる $\widetilde{q} \in \mathbb{Q}$ をとる. すると

$$A^{\widetilde{q}} \supset A^q \Leftrightarrow B^q \supset B^{\widetilde{q}}$$

となること[5]に注意する.

$$A^q \cap B^{\widetilde{q}} \subset B^{\widetilde{q}} \quad かつ \quad \left(B^{\widetilde{q}}\right)^c = A^{\widetilde{q}} \in \mathcal{P}_{\widetilde{q}}$$

[5]なぜならば $\nu_{\widetilde{q}}(A) = \widetilde{q}\mu(A) - \nu(A) > q\mu(A) - \nu(A) = \nu_q(A)$ からわかる.

なので

$$\widetilde{q}\mu\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) - \nu\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) = \nu_{\widetilde{q}}\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) \le 0 \tag{C.21}$$

となる．一方

$$A^q \cap B^{\widetilde{q}} \subset A^q \quad \text{かつ} \quad A^q \in \mathcal{P}_q$$

なので

$$q\mu\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) - \nu\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) = \nu_q\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) \ge 0 \tag{C.22}$$

となる．(C.21) − (C.22) から

$$\big(\widetilde{q} - q\big)\mu\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) \le 0$$

を得る．$\big(\widetilde{q} - q\big) > 0$ なので

$$\mu\big(A^q \cap B^{\widetilde{q}}\big) = 0$$

を得る．

以上のことを踏まえて

$$f(x) := \sup\{q \in \mathbb{Q};\, x \in B^q\} \tag{C.23}$$

と定まる．

まず f の可測性を示す．$B^0 = \mathbb{X}$ なので

$$f(x) \ge 0 \qquad (x \in \mathbb{X})$$

となる．明らかに

$$x \in B^q \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge 0; \qquad x \in A^q \quad \Rightarrow \quad f(x) \le 0;$$

である．さらに

$$\{x \in \mathbb{X};\, f(x) \ge q\} = \bigcup_{\widetilde{q} \in \mathbb{Q};\, \widetilde{q} \ge q} B^{\widetilde{q}}$$

となる．よって補題 C.41 より f は可測となる．

つぎに (C.23) で定めた関数 f は任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して (C.14) をみたすことを示す．そのために $A \in \mathcal{A}$ とし，$\epsilon > 0$ を取る．N を正の整数とし

$$N > \frac{\mu(A)}{\epsilon} \tag{C.24}$$

をみたすものとする．$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$E_k := A \cap B^{k/N} \cap A^{(k+1)/N}; \quad E_\infty := A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^{k/N} \right)$$

と定める．すると

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \cup E_\infty &= A \cap \left(B^{k/N} \right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^{(k+1)/N} \right) \cup \left\{ A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^{k/N} \right) \right\} \\ &= A\end{aligned}$$

となる．さらに $k < \widetilde{k}$ のとき

$$\left(B^{k/N} \cap A^{(k+1)/N} \right) \cap \left(B^{\widetilde{k}/N} \cap A^{(\widetilde{k}+1)/N} \right) = \varnothing$$

となるので, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ は排反になる．したがって

$$\nu(A) = \nu(E_\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$$

となる．f の作り方と

$$x \in E_k \Leftrightarrow x \in B^{k/N} \quad \text{かつ} \quad x \in A^{(k+1)/N}$$

から

$$\begin{aligned} x \in E_k &\Rightarrow \frac{k}{N} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{N}; \\ x \in E_\infty &\Rightarrow f(x) = \infty \end{aligned}$$

となる．さらに

$$\begin{aligned} E_k \subset B^{k/N} &\Rightarrow \quad \nu_{k/N}(E_k) \leq 0; \\ E_k \subset A^{(k+1)/N} &\Rightarrow \nu_{(k+1)/N}(E_k) \geq 0 \end{aligned}$$

となる．こららのことから有限の k に対して

$$\begin{aligned} &\frac{k}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k) \\ &\Rightarrow \\ &\frac{k}{N}\mu(E_k) - \nu(E_k) \leq \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \nu(E_k) \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k) - \nu(E_k) \end{aligned}$$

から

$$\left| \nu(E_k) - \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right| \leq \frac{1}{N}\mu(E_k) \tag{C.25}$$

がわかる. 任意の $q \in \mathbb{Q}\,(q \geq 0)$ に対して

$$E_\infty \subset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^{k/N} \right)^c$$

なので $0 > \nu_q(E_\infty) = q\mu(E_\infty) - \nu(E_\infty)$ となる. $\mu(E_\infty) > 0$ ならば

$$\nu(E_\infty) = \infty$$

となる. もし $\mu(E_\infty) =$ ならば, ν は μ に関して絶対連続なので, $\nu(E_\infty) = 0$ となる. いずれの場合でも

$$\nu(E_\infty) = \int_{E_\infty} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

となる. これと (C.24) – (C.25) を合わせると

$$\left| \nu(A) - \int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right| \leq \frac{1}{N}\mu(A) < \epsilon$$

を得る. ϵ は任意だったので, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して (C.14) をみたすことを示せた. □

注意 C.71. 上記の証明は Hahn 分解を経由したものである. Hilbert 空間と Riesz の定理を用いた関数解析的な証明は Axler (2020, pp.272-274) を参照のこと. Schilling(2017, pp.230-234) により関数解析で初等的な証明がある. □

C.7.1 定理 C.70 の証明の主張 $(2-2)$ の Bradley (1989) による別証明

ここでは Bradley (1989) による Radon-Nikodym の微分の存在の初等的な証明を書く. Hahn 分解を経由することなく $\mathbb{X}$ の分割を用いて Radon-Nikodym の微分を構成している.

まず特別な場合について Radon-Nikodym の微分を構成する.

定理 C.72. $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ を可測空間とし, ν と μ を $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の非負値測度で

(i) $\mu(\mathbb{X}) = 1$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して $\nu(A) \leq \mu(A)$

をみたすとする. このとき $\mathbb{X}$ 上の $\mathcal{A}$ 可測関数 h で $0 \leq h(x) \leq 1\,(x \in \mathbb{X})$ なるものが存在して任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{C.26}$$

が成り立つ. すなわち $h = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ である.

以下では定理 C.72 を証明するための準備をする．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\Pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ を $\mathbb{X}$ **の** $\mathcal{A}$ **可測な分割**とする．すなわち

$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{かつ} \quad A_i \in \mathcal{A},\, A_i \cap A_j = \varnothing\, (i \neq j;\, i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

である．$\mathbb{X}$ 上の関数 h_Π をつぎのように定める．$\forall x \in A_i\, (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ に対して

$$h_\Pi(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu(A_i)}{\mu(A_i)} & (\mu(A_i) > 0) \\ 0 & (\mu(A_i) = 0) \end{cases}$$

と定める．すると定理 C.72 の条件 (ii) より

$$0 \leq h_\Pi(x) \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{X}) \tag{C.27}$$

となることに注意する．

補題 C.73. $n \in \mathbb{N}$ とし，$\Pi = \{A_j\}_{j=1}^n$ を $\mathbb{X}$ の $\mathcal{A}$ 可測な分割とする．ある添え字集合 $I \subset \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ に対して

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

と書けたとき

$$\nu(A) = \int_A h_\Pi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

となる．特に

$$\nu(\mathbb{X}) = \int_{\mathbb{X}} h_\Pi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

である．

Proof.

$$\begin{aligned} \int_A h_\Pi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\bigcup_{i \in I} A_i} h_\Pi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i \in I} \int_{A_i} h_\Pi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{A_i} \frac{\nu(A_i)}{\mu(A_i)}\, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i \in I} \frac{\nu(A_i)}{\mu(A_i)} \int_{A_i} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{i \in I} \nu(A_i) = \nu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \nu(A). \end{aligned}$$

□

補題 C.74. Π_1 と Π_2 は $\mathbb{X}$ の $\mathcal{A}$ 可測な分割で Π_2 は Π_1 の細分とする. すなわち別の分割 Π_0 があって

$$\Pi_2 = \{A \cap B;\, A \in \Pi_1,\, B \in \Pi_0\}$$

と書ける. このとき

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_2}(x)\}^2 \,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_1}(x)\}^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_2}(x) - h_{\Pi_1}(x)\}^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\geq \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_1}(x)\}^2 \,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. $A \in \Pi_1$ に対して

$$\int_A h_{\Pi_2}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \nu(A) = \int_A h_{\Pi_1}(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

となる. 2 番目の等号は h_{Π_1} の定義と $A \in \Pi_1$ から明らかである. 1 番目の等号を示す. Π_2 は Π_1 の細分なので, ある添え字集合 $I \subset \{1,\, 2,\, \ldots,\, \#(\Pi_2)\}$ があって

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i, \qquad B_i \in \Pi_2 =: \{B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_{\#(\Pi_2)}\}$$

と書ける. このことから

$$\begin{aligned}\int_A h_{\Pi_2}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{i \in I} \int_{B_i} h_{\Pi_2}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i \in I} \frac{\nu(B_i)}{\mu(B_i)} \mu(B_i) = \sum_{i \in I} \nu(B_i) \\ &= \nu\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \nu(A)\end{aligned}$$

からわかる. さらに $A \in \Pi_1$ に対して

$$\int_A h_{\Pi_1}(x) h_{\Pi_2}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_A \{h_{\Pi_1}(x)\}^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \tag{C.28}$$

となる．なぜならば

$$
\begin{aligned}
\int_A h_{\Pi_1}(x)h_{\Pi_2}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\bigcup_{i\in I}B_i} h_{\Pi_1}(x)h_{\Pi_2}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i\in I}\int_{B_i} h_{\Pi_1}(x)h_{\Pi_2}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i\in I}\int_{B_i} \frac{\nu(B_i)}{\mu(B_i)}\,\frac{\nu(A)}{\mu(A)}\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i\in I}\frac{\nu(B_i)}{\mu(B_i)}\,\frac{\nu(A)}{\mu(A)}\int_{B_i}\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i\in I}\frac{\nu(B_i)}{\mu(B_i)}\,\frac{\nu(A)}{\mu(A)}\mu(B_i) \\
&= \sum_{i\in I}\nu(B_i)\,\frac{\nu(A)}{\mu(A)} \\
&= \nu\Biggl(\bigcup_{i\in I}B_i\Biggr)\frac{\nu(A)}{\mu(A)} \\
&= \nu(A)\frac{\nu(A)}{\mu(A)} \\
&= \frac{\nu(A)}{\mu(A)}\,\frac{\nu(A)}{\mu(A)}\int_A \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_A\left\{\frac{\nu(A)}{\mu(A)}\right\}^2\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_A\{h_{\Pi_1}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}
$$

からわかる．(C.28) から

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}}\{h_{\Pi_2}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{X}}\Bigl\{h_{\Pi_1}(x)+\bigl(h_{\Pi_2}(x)-h_{\Pi_1}(x)\bigr)\Bigr\}^2\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{X}}\{h_{\Pi_1}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x)+\int_{\mathbb{X}}\bigl(h_{\Pi_2}(x)-h_{\Pi_1}(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\quad + 2\underbrace{\int_{\mathbb{X}}h_{\Pi_1}(x)\bigl\{h_{\Pi_2}(x)-h_{\Pi_1}(x)\bigr\}\,\mathrm{d}\mu(x)}_{=0\quad(\because(\mathrm{C}.28))} \\
&= \int_{\mathbb{X}}\{h_{\Pi_1}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x)+\int_{\mathbb{X}}\bigl(h_{\Pi_2}(x)-h_{\Pi_1}(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\geq \int_{\mathbb{X}}\{h_{\Pi_1}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}
$$

を得る．よって補題は証明された．　□

定理 C.72 **の証明** ((C.26) における h の構成):

$$c := \sup \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x)$$

とおく．ただし上の式の上限は $\mathbb{X}$ の $\mathcal{A}$ 可測な有限分割すべてに関するものである．(C.27) と $\mu(\mathbb{X}) = 1$ より

$$0 \leq \sup \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \sup \int_{\mathbb{X}} \mathrm{d}\mu(x) = \mu(\mathbb{X}) = 1$$

となるので

$$c \leq 1 \tag{C.29}$$

となる．

各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して Π_n を $\mathbb{X}$ の $\mathcal{A}$ 可測な有限分割で

$$\int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_n}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \geq c - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

をみたすように取る．

$$\Pi_n^c := \left\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n;\ A_i \in \Pi_i \,(i = 1, 2, \ldots, n)\right\} \tag{C.30}$$

とする．すなわち $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ の共通の細分で一番おおきいものである．補題 C.74 より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} c - \left(\frac{1}{4}\right)^n &\leq \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_n}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_n^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_{n+1}^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

となる．よって各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{X}} \left\{h_{\Pi_{n+1}^c}(x) - h_{\Pi_n^c}(x)\right\}^2 \mathrm{d}\mu(x) \\ &\quad = \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_{n+1}^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) - 2 \underbrace{\int_{\mathbb{X}} h_{\Pi_{n+1}^c}(x) h_{\Pi_n^c}(x) \, \mathrm{d}\mu(x)}_{= \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_n^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \quad (\because \text{(C.28)})} \\ &\qquad + \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_n^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\quad = \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_{n+1}^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) - \int_{\mathbb{X}} \{h_{\Pi_n^c}(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\quad \leq c - \left\{c - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \end{aligned} \tag{C.31}$$

を得る．Cauchy-Schwarz の不等式から

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{X}} \left| h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right| \mathrm{d}\mu(x) \\
&\quad \leq \sqrt{\int_{\mathbb{X}} \left\{ h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right\}^2 \mathrm{d}\mu(x)} \sqrt{\int_{\mathbb{X}} 1^2 \,\mathrm{d}\mu(x)} \\
&\quad \leq \sqrt{\int_{\mathbb{X}} \left\{ h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right\}^2 \mathrm{d}\mu(x)} \sqrt{\mu(\mathbb{X})} \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2 \qquad \left(\because \text{(C.31) と } \mu(\mathbb{X}) = 1 \right)
\end{aligned}
$$

を得る．単調収束定理から

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right| \right\} \mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{X}} \left| h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right| \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n < \infty
\end{aligned}
$$

となる．よって積分の性質から

$$
\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right| < \infty \right) = 1
$$

となる．すなわち μ に関してほとんど至るところで

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{\Pi^c_{n+1}}(x) - h_{\Pi^c_n}(x) \right| < \infty
$$

である．このことより μ に関してほとんどいたるところで

$$
\lim_{n \to \infty} h_{\Pi^c_n}(x)
$$

は収束する．$\mathbb{X}$ 上の関数 h をつぎのように定める．$x \in \mathbb{X}$ に対して

$$
h(x) := \begin{cases} \lim_{n \to \infty} h_{\Pi^c_n}(x) & \text{(右辺の極限が収束するとき)} \\ 0 & \text{(その他)} \end{cases}
$$

とする．作り方から関数 h は $\mathcal{A}$ 可測であり，(C.27) から

$$
0 \leq h(x) \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{X})
$$

となる．あとは $\forall A \in \mathbb{A}$ に対して (C.26) となることを示せばよい．そのために (C.30) で定めた分割 Π^c_n に対して

$$
\Pi^A_n := \{ B \cap A,\, B \cap (\mathbb{X} \setminus A);\, B \in \Pi^c_n \}
$$

とおく. (C.28) と (C.31) から

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}}\left\{h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\right\}^2\mathrm{d}\mu(x)&=\int_{\mathbb{X}}\{h_{\Pi_n^A}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x)-\int_{\mathbb{X}}\{h_{\Pi_n^c}(x)\}^2\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\leq\left(\frac{1}{4}\right)^4\end{aligned}\tag{C.32}$$

となる. 再度 Cauchy-Schwarz の不等式と (C.32) を用いると

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{A}}\{h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\}\,\mathrm{d}\mu(x)\right| &&(\text{C.33})\\&\quad\leq\int_{\mathbb{A}}\left|h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\right|\mathrm{d}\mu(x)\\&\quad\leq\sqrt{\int_A\left\{h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\right\}^2\mathrm{d}\mu(x)}\sqrt{\int_A 1\,\mathrm{d}\mu(x)}\\&\quad\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2\underbrace{\sqrt{\mu(\mathbb{X})}}_{=1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2 &&(\text{C.34})\end{aligned}$$

となる. 補題 C.73 から $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\nu(A)=\int_A h_{\Pi_n^A}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_A\left\{h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\right\}\mathrm{d}\mu(x)+\int_A h_{\Pi_n^c}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

となる. (C.34) より

$$\lim_{n\to\infty}\int_A\left\{h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\right\}\ \mathrm{d}\mu(x)=0$$

となる. このことと有界収束定理から

$$\begin{aligned}\nu(A)&=\lim_{n\to\infty}\int_A h_{\Pi_n^A}(x)\,\mathrm{d}\mu\\&=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_A\left\{h_{\Pi_n^A}(x)-h_{\Pi_n^c}(x)\right\}\ \mathrm{d}\mu(x)}_{=0}+\lim_{n\to\infty}\int_A h_{\Pi_n^c}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_A\lim_{n\to\infty}\quad h_{\Pi_n^c}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\qquad(\because |h_{\Pi_n^c}(x)|\leq 1\ \text{と}\ \mu(\mathbb{X})=1\ \text{から有界収束定理})\\&=\int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

を得る. よって定理 C.72 は証明された. □

系 C.75. μ と ν は測度空間 $(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 上の非負値測度で

(i) $0 < \mu(\mathbb{X}) < \infty$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して $\nu(A) \leq \mu(A)$

とする．このとき $\mathbb{X}$ 上の $\mathcal{A}$ 可測関数 h で $0 \leq h(x) \leq 1\,(x \in \mathbb{X})$ なるものが存在して

$$\nu(A) = \int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (A \in \mathcal{A}) \tag{C.35}$$

が成り立つ．すなわち $h = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ である．

Proof.

$$\widetilde{\mu}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\mathbb{X})}, \quad \widetilde{\nu}(A) = \frac{\nu(A)}{\mu(\mathbb{X})}$$

とおくと

$$\widetilde{\nu}(A) \leq \widetilde{\mu}(A)\,(\forall A \in \mathcal{A}) \quad \text{かつ} \quad \widetilde{\mu}(\mathbb{X}) = 1$$

となるので定理 C.72 の仮定を $\widetilde{\mu}$ と $\widetilde{\nu}$ はみたす．したがって $\mathcal{A}$ 可測関数で $0 \leq h(x) \leq 1\,(x \in \mathbb{X})$ なるものが存在して

$$\widetilde{\nu}(A) = \int_A h(x)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \mu(\mathbb{X})\widetilde{\nu}(A) = \mu(\mathbb{X}) \int_A h(x)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = \int_A h(x)\widetilde{\mu}(\mathbb{X})\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) \\ &= \int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

がわかる． □

系 C.76. μ と ν は可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の非負値測度で

(1) $0 < \mu(\mathbb{X}) < \infty$,

(2) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \nu(A) \leq \mu(A)$

をみたすとする．任意の非負値 $\mathcal{A}$ 可測関数 $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{X}} g(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbb{X}} g(x)h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{C.36}$$

が成り立つ．ただし $h =: \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ は (C.35) をみたす関数である．

Proof. $B \in \mathcal{A}$ に対して $g(x) = \mathbb{1}_B(x)$ のとき (C.36) を示す．これは系 C.75 を用いると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} g(x)\,\mathrm{d}\nu(x) &= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_B(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \nu(B) = \int_B h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_B(x) h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned} \tag{C.37}$$

となることからわかる．つぎに $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負値単関数の増加列で

$$g_n \uparrow g\,(n \to \infty)$$

とする．すると単調収束定理から

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} g(x)\,\mathrm{d}\nu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} g_n(x)\,\mathrm{d}\nu(x) && (\because \text{単調収束定理}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} g_n(x) h(x)\,\mathrm{d}\nu(x) && (\because \text{(C.37) から}) \\ &= \int_{\mathbb{X}} \lim_{n\to\infty} g_n(x) h(x)\,\mathrm{d}\nu(x) && (\because \text{単調収束定理}) \\ &= \int_A g(x) h(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

となり系は証明された． □

定理 C.77. μ と ν は測度空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の非負値測度で

(1) $0 < \nu(\mathbb{X}) < \infty$ かつ $0 < \mu(\mathbb{X}) < \infty$,

(2) $\nu \ll \mu$

とする．このとき $\mathbb{X}$ 上の $\mathcal{A}$ 可測関数 h が存在して

$$\nu(A) = \int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (\forall A \in \mathcal{A})$$

をみたす．すなわち $h = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ である．

Proof. $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して $\nu(A) \le (\nu+\mu)(A)$ かつ $\mu(A) \le (\nu+\mu)(A)$ なので, 系 C.75 から $\mathbb{X}$ 上の $\mathcal{A}$ 可測関数 h_ν と h_μ で $0 \le h_\nu(x) \le 1$, $0 \le h_\mu(x) \le 1\,(x \in \mathbb{X})$ なるものが存在して

$$\nu(A) = \int_A h_\nu(x)\,\mathrm{d}(\nu+\mu)(x), \qquad \nu(A) = \int_A h_\mu(x)\,\mathrm{d}(\nu+\mu)(x),$$

となる．ここで

$$B := \{x \in \mathbb{X};\, h_\mu(x) > 0\}, \quad C := B^c = \{x \in \mathbb{X};\, h_\mu(x) = 0\}$$

とおく．すると

$$\mu(C) = \int_C h_\mu(x)\,\mathrm{d}(\nu+\mu)(x) = 0$$

となるので, 条件 (ii) から

$$\nu(C) = 0$$

となる．このことから $\mathbb{X}$ 上の関数 h を

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{h_\nu(x)}{h_\mu(x)} & (x \in B) \\ 0 & (x \in C) \end{cases} \tag{C.38}$$

と定める．$A \in \mathcal{A}$ かつ $A \subset B$ に対して

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_A h_\nu(x)\,\mathrm{d}(\nu+\mu)(x) = \int_A \frac{h_\nu(x)}{h_\mu(x)} h_\mu(x)\,\mathrm{d}(\nu+\mu)(x) \\ &= \int_A h(x)h_\mu(x)\,\mathrm{d}(\nu+\mu)(x) = \int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad (\because \text{系 C.76})\end{aligned} \tag{C.39}$$

となる．$\nu(C) = \mu(C) = 0$ かつ $A \cap C \in \mathcal{A}$ である．このこと B と C の定義に注意すると $\nu(A\cap C) = 0$, $A \cap B \subset B$, $B \cup C = \mathbb{X}$ となる．上記を踏まえて (C.39) を用いると

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(A\cap B) + \underbrace{\nu(A\cap C)}_{=0} \qquad (\because B\cap C = \varnothing,\ B\cup C = \mathbb{X}) \\ &= \nu(A\cap B) \\ &= \int_{A\cap B} h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad (\because \text{(C.39)}) \\ &= \int_{A\cap B} h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{A\cap C} h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\qquad (\text{(C.38) から } A\cap C \text{ 上では } h(x) = 0\ ) \\ &= \int_A h(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

を得る．よって定理は証明された． □

C.8 Jacobi 変換定理

補題 C.78. $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ と $(\mathbb{X}', \mathcal{A}')$ を測度空間とし, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ を可測関数とする．$(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の測度 μ に対して

$$\mu'(A') := \mu\bigl(T^{-1}(A')\bigr) \qquad (\forall A' \in \mathcal{A}')$$

と定めたとき, μ' は $(\mathbb{X}', \mathcal{A}')$ 上の測度となる．

Proof. $A' = \varnothing$ のとき, $T^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ から

$$\mu'(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

となる. $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}'$ 互いに排反な部分集合列としたとき

$$\begin{aligned}
\mu'\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\Bigr) = \mu\Bigl(T^{-1}\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\Bigr)\Bigr) &= \mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n)\Bigr) \\
&\quad (\because \text{逆像の性質}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\bigl(T^{-1}(A'_n)\bigr) \qquad (\because \mu \text{ の } \sigma \text{ 加法性}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A'_n)
\end{aligned}$$

となる. よって μ' の σ 加法性は証明された. □

注意 C.79. μ' のことを $T(\mu)$ と書くことにする. すなわち

$$T(\mu)(A') := \mu\bigl(T^{-1}(A')\bigr) \qquad (A' \in \mathcal{A}')$$

である. □

補題 C.80. $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし, $(\mathbb{X}', \mathcal{A}')$ を可測空間とし, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ を可測写像とする. $T(\mu)$ 可積関数 $f : (\mathbb{X}', \mathcal{A}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対して

$$\int_{\mathbb{X}} f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') = \int_{\mathbb{X}'} f\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{C.40}$$

が成り立つ.

Proof. f と T は可測なので $f \circ T$ も可測. 標準機械 (standard machine) を用いて証明する.
<u>第 1 段階</u>: $f(\boldsymbol{x}') = \mathbb{1}_{A'}(\boldsymbol{x}')\,(A' \in \mathcal{A}')$ とする. すると $\mathbb{1}_{T^{-1}(A')}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_{A'}\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr)$ となるので

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}'} f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') &= \int_{\mathbb{X}'} \mathbb{1}_{A'}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') \\
&= T(\mu)(A') = \mu\bigl(T^{-1}(A')\bigr) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{T^{-1}(A')}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{T^{-1}(A')}\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{X}} f\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となるので $f = \mathbb{1}_{A'}$ のとき (C.40) は成立する.

第 2 段階: $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$, $A'_n \in \mathcal{A}'$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ とし

$$f(\boldsymbol{x}') = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A'_n}(\boldsymbol{x}')$$

とすると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}'} f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') &= \int_{\mathbb{X}'} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A'_n}(\boldsymbol{x}') \right\} \mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_{\mathbb{X}'} \mathbb{1}_{A'_n}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_{\mathbb{X}'} \mathbb{1}_{T^{-1}(A'_n)}\big(T(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&\qquad \big(\because \text{第 1 段階の結果}\big) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T^{-1}(A'_n)}\big(T(\boldsymbol{x})\big) \right\} \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f\big(T(\boldsymbol{x})\big) \right\} \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となり, 単関数 f に対して (C.40) は成立する.
第 3 段階: $f \geq 0$ とし $\int_{\mathbb{X}} f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}') < \infty$ とする. すると非負値単関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $f_n \uparrow f$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する. このことより

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}'} f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') &= \int_{\mathbb{X}'} \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}'} f_n(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') \qquad \big(\because \text{単調収束定理}\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n\big(T(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathbb{X}} \lim_{n\to\infty} f_n\big(T(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \qquad \big(\because \text{単調収束定理}\big) \\
&= \int_{\mathbb{X}} f\big(T(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となる. よって $f \geq 0$ のとき (C.40) は成立する.
第 4 段階: $\int_{\mathbb{X}'} |f(\boldsymbol{x}')|\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') < \infty$ のとき

$$f^{+}(\boldsymbol{x}') = \max\big\{f(\boldsymbol{x}'),\,0\big\}, \quad f^{-}(\boldsymbol{x}') = \max\big\{-f(\boldsymbol{x}'),\,0\big\}$$

とおく．すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}'} f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') &= \int_{\mathbb{X}'} f^+(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') - \int_{\mathbb{X}'} f^-(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}T(\mu)(\boldsymbol{x}') \\ &= \int_{\mathbb{X}} f^+\big(T(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) - \int_{\mathbb{X}} f^-\big(T(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\ &\qquad \big(\because \text{第 4 段階の結果}\big)\end{aligned}$$

となり，補題は証明された． □

補題 C.81. $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ とする．ただし A は $n \times n$ の行列で $\det(A) \neq 0$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ である．このとき可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{T(U)} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{y}) = \int_U f\big(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\big)|\det(A)|\,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}) \qquad \big(U \subset \mathbb{R}^n \text{ は開集合}\big)$$

が成立する．ただし $\mathbb{R}^n$ 上の Lebeague 速度を λ_n である．

Proof. 補題 C.80 から

$$\begin{aligned}\int_U f\big(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\big)|\det(A)|\,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}) &= \int_U f\big(T(\boldsymbol{x})\big)|\det(A)|\,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_U f\big(T(\boldsymbol{x})\big)\mathbb{1}_U(\boldsymbol{x})|\det(A)|\,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f\big(T(\boldsymbol{x})\big)\mathbb{1}_{T(U)}\big(T(\boldsymbol{x})\big)|\det A|\,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})\mathbb{1}_{T(U)}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}T(|\det A|\lambda_n)(\boldsymbol{y}) \\ &= \int_{T(U)} f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}T(|\det A|\lambda_n)(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

を得る．あとは

$$T(|\det A|\lambda_n) = \lambda_n$$

を示せばよい．$T^{-1}(\boldsymbol{y}) = A^{-1}(\boldsymbol{y}) - A^{-1}\boldsymbol{b}$ なので $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}T(|\det A|\lambda_n)(B) &= |\det A|\lambda_n\big(T^{-1}(B)\big) = |\det A|\lambda_n\big(A^{-1}(B) - A^{-1}(\boldsymbol{b})\big) \\ &= |\det A|\lambda_n\big(A^{-1}(B)\big) \\ &= |\det A| \cdot |\det A^{-1}|\lambda_n(B) \quad \big(\because \text{定理 C.38}\big) = \lambda_n(B)\end{aligned}$$

より補題は証明された． □

定義 C.82. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．写像 $T : U \to V$ は C^1 級微分同相であるとは次の条件をみたすときをいう．

(1) T は全単射.

(2) T と T^{-1} は連続微分可能.

点 $\boldsymbol{x} \in U$ における微分

$$DT(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial}{\partial x_j} T_j(\boldsymbol{x})\right)_{i,j=1}^{n}$$

を**ヤコビアン** (**Jacobian**) という．ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ である.

定理 C.83. (Rudin (1976, pp.221-228)) $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．写像

$$T : U \to V = T(U)$$

が C^1 級微分同相であるための必要十分条件は次の (a), (b), (c) すべてが成立することである.

(a) $T : U \to \mathbb{R}^n$ は単射.

(b) $T : U \to \mathbb{R}^n$ は連続微分可能.

(c) $DT(\boldsymbol{x})$ は各 $\boldsymbol{x} \in U$ で可逆.

さらに (a), (b), (c) が成り立つとき

$$D(T^{-1})(\boldsymbol{y}) = (DT)^{-1}\big(T^{-1}(\boldsymbol{y})\big) \qquad (\forall \boldsymbol{y} \in V)$$

が成り立つ.

Proof. 証明は定理 A.20 のところをみよ. □

定理 C.84. U, V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $T : U \to V$ は C^1 級微分同相写像とする．$W \subset \mathbb{R}^n$ と可測空間 $(W, \mathcal{B}(W))$ 上の Lebeague 測度を λ_W を

$$\lambda_W(A) = \lambda_n(A \cap W) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \tag{C.41}$$

で定める．ただし λ_n は $\mathbb{R}^n$ 上の Lebeague 速度である．このとき

$$\lambda_V = T\big(|\det DT(\,\cdot\,)|\lambda_U\big) \tag{C.42}$$

となる．すなわち $f : V \to [0, \infty)$ に対して

$$\int_V f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) = \int_U f\big(T(\boldsymbol{x})\big)|\det DT(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x}) \tag{C.43}$$

である.

定理 C.84 の証明はいくつかの段階を必要とする．$\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_{\ell^\infty(n)} := \max\bigl\{|x_1|,\, |x_2|,\, \ldots,\, |x_n|\bigr\}$$

と定める．さらに

$$\mathcal{D} := \{(a_1,\, b_1] \times (a_2,\, b_2] \times \cdots (a_n,\, b_n] \subset \mathbb{R}^n;\; a_i < b_i \in \mathbb{R}\,(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)\}$$

とする．

補題 C.85. $d \in \mathbb{N}$ とし, $T = (T_1,\, T_2,\, \ldots,\, T_d) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ を Lipschitz 写像とする．すなわち $\exists L \geq 0$ があって

$$|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y})|_{\ell^\infty(d)} \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|_{\ell^\infty(n)} \qquad (\forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

である．さらに $\forall \boldsymbol{c} = (c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n) \in \mathbb{R}^n$ と $s > 0$ に対して

$$D = [c_1 - s,\, c_1 + s] \times [c_2 - s,\, c_2 + s] \times \cdots \times [c_n - s,\, c_n + s]$$

とする．このとき

$$T(D) \subset E = [\tilde{a}_1,\, \tilde{b}_1] \times [\tilde{a}_2,\, \tilde{b}_2] \times \cdots \times [\tilde{a}_d,\, \tilde{b}_d]$$

となる．ただし

$$\tilde{a}_i = T_i(\boldsymbol{c}) - Ls, \quad \tilde{b}_i = T_i(\boldsymbol{c}) + Ls\,(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \mathrm{d})$$

である．特に

$$\lambda_d(T(D)) \leq L^d\bigl(\lambda_n(D)\bigr)^{d/n}$$

となる．ただし λ_n は $\mathbb{R}^n$ 上の Lebeague 測度である．

Proof. $D = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\, |\boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}|_{\ell^\infty(n)} \leq s\}$ と書けることに注意する．Lipschitz 連続性から

$$T\bigl(\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\, |\boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}|_{\ell^\infty(n)} \leq s\}\bigr) \subset \{T(\boldsymbol{y});\, |T(\boldsymbol{c}) - T(\boldsymbol{y})|_{\ell^\infty(d)} \leq Ls\} = E$$

となる．D の一辺は $2s$, E の一辺は $2Ls$ であるので

$$\lambda_d\bigl(T(D)\bigr) \leq \lambda_d(E) = (2Ls)^d = L^d\bigl((2s)^n\bigr)^{d/n} = L^d\bigl(\lambda_n(D)\bigr)^{d/n}$$

を得る．$\square$

補題 C.86. $\mathbb{R}$ 上の半環 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} := \{(a_1,\, b_1] \times (a_2,\, b_2] \times \cdots \times (a_n,\, b_n] \subset \mathbb{R}^n;\, a_i < b_i \in \mathbb{R}\,(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)\}$$

で定義し, $\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{D}]$ とする. さらに μ と ν を可測空間 $(\mathbb{R},\, \mathcal{A})$ 上の測度とし

$$\mu(D) \leq \nu(D) < \infty \qquad (\forall D \in \mathcal{D})$$

で $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ があって $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{R}$ とする. このとき

$$\mu(A) \leq \nu(A) \qquad (\forall A \in \mathcal{A})$$

が成り立つ.

Proof. μ と ν の性質から

$$\rho := \mu - \nu :\, \mathcal{D} \to [0,\, \infty)$$

となる. ρ は $\mathcal{D}$ 上で σ 加法的なので, ρ は $\mathcal{A}$ 上の測度 $\tilde{\rho}$ に一意的に拡張できる. さらに

$$\nu(D) = (\rho + \mu)(D) = \widetilde{\rho + \mu}(D) \qquad (\forall D \in \mathcal{D})$$

となる. ただし $\widetilde{\rho + \mu}$ は $\rho + \mu$ の $\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{D}]$ 上への拡張である. しかし

$$\nu(D) = \widetilde{\rho + \mu}(D) = (\rho + \mu)(D) = \tilde{\rho}(D) + \mu(D) \qquad (\forall D \in \mathcal{D})$$

となる. $\mathcal{A}$ 上への拡張は一意なので

$$\begin{aligned} \nu(A) = \tilde{\rho}(A) + \mu(A) \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \\ \Leftrightarrow l\nu(A) - \mu(A) = \tilde{\rho}(A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \end{aligned}$$

となり

$$\nu(A) \geq \mu(A) \qquad (\forall A \in \mathcal{A})$$

がわかる. □

補題 C.87. $U,\, V$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $T :\, U \to V$ を C^1 級微分同相写像とする. このとき

$$\lambda_V\bigl(T(D)\bigr) \leq \int_D |\det DT(\boldsymbol{x})| \,\mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{x})$$

である. ただし $D \in \mathcal{D}$ で $\overline{D} \in V$ であり, λ_U と λ_V は (C.41) により定まる U と V 上の Lebeague 測度である.

Proof. $a_i,\, b_i \in \mathbb{R}\,(i = 1,\, 2,\, \dots,\, n)$ に対して $D = [a_1,\, b_1) \times [a_2,\, b_2) \times \cdots \times [a_n,\, b_n)$ と書いたとき $\overline{D} = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \times \cdots \times [a_n,\, b_n] \subset V$ である. また $A \in \mathsf{M}(n,\, \mathbb{R})$ に対して

$$\|A\| := \sup_{|\boldsymbol{x}|_{\ell^\infty(n)} \le 1} |A\boldsymbol{x}|_{\ell^\infty(n)}$$

と定める. 逆写像定理 (定理 C.83) を用いると

$$\begin{aligned} L := \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{D}} \|(DT)^{-1}(\boldsymbol{x})\| &= \sup_{\boldsymbol{y}\in T\left(\overline{D}\right)} \|(DT)^{-1}\big(T^{-1}(\boldsymbol{y})\big)\| \\ &= \sup_{\boldsymbol{y}\in T\left(\overline{D}\right)} \|D\big(T^{-1}\big)(\boldsymbol{y})\| \end{aligned} \tag{C.44}$$

となる. DT は $\overline{D} \subset U$ 上で一様連続なので $\forall\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって

$$\sup_{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}'\in\overline{D};\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|_{\ell^\infty(n)}\le\delta} \|DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}')\| \le \frac{\epsilon}{L} \tag{C.45}$$

とできる. いま $D_i\,(i = 1,\, 2,\, \dots,\, N)$ は一辺の長さが $\delta > 0$ 以下の $\mathcal{D}$ のとする. すなわち

$$\begin{aligned} D_j = [a_{i1},\, a_{i1} + \delta] \times [a_{i2},\, a_{i2} + \delta] \times \cdots \times [a_{in},\, a_{in} + \delta], \\ a_{ij} \in \mathbb{R}\,(i = 1,\, 2,\, \dots,\, N;\, j = 1,\, 2,\, \dots,\, n), \end{aligned}$$

とし, $D_k \bigcap D_\ell = \varnothing\,(k \ne \ell)$ とする. さらに D は $\{D \cap D_j\}_{j=1}^N$ で分割されるとする.

$$D \subset \bigcup_{n=1}^N D_n$$

とする. DT と $\det DT$ は連続関数で各 $i = 1,\, 2,\, \dots,\, N$ に対して $\boldsymbol{x}_i \in \overline{D}_i$ を

$$\|\det DT(\boldsymbol{x}_i)\| = \inf_{\boldsymbol{y}\in D_i} \|DT(\boldsymbol{y})\| \tag{C.46}$$

と定める. $A_i := DT(\boldsymbol{x}_i)\,(i = 1,\, 2,\, \dots,\, N)$ は可逆で写像 $\boldsymbol{x} \mapsto A_i\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{aligned} D\big(A_i^{-1} \circ T\big)(\boldsymbol{x}) &= A_i^{-1} \circ \big(DT\big)(\boldsymbol{x}) \quad (\because D \text{ の線型性}) \\ &= \mathsf{id}_n + A_i^{-1} \circ \big[DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}_i)\big] \end{aligned} \tag{C.47}$$

をみたす. ただし id_n は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への恒等写像である. (C.44) − (C.47) から

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{D}} \|D\big(A_i^{-1} \circ T\big)(\boldsymbol{x})\| &\le \|\mathsf{id}_n\| + \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{D}_i} \left\|A_i^{-1} \circ \big[DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}_i)\big]\right\| \\ &\le 1 + L\frac{\epsilon}{L} = 1 + \epsilon \end{aligned} \tag{C.48}$$

となる．なぜならば

$$\begin{aligned}
&\|A_i^{-1} \circ \bigl[DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}_i)\bigr]\| \\
&\quad = \|(DT)^{-1}(\boldsymbol{x}_i)\bigl[DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}_i)\bigr]\| \\
&\quad \le \|(DT)^{-1}(\boldsymbol{x}_i)\| \times \|DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}_i)\| \\
&\quad \le \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{D}} \|(DT)^{-1}(\boldsymbol{x})\| \times \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in\overline{D};\, |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|_{\ell^\infty(n)}\le\delta} \|DT(\boldsymbol{x}) - DT(\boldsymbol{x}')\| \\
&\quad \le L \times \frac{\epsilon}{L}
\end{aligned}$$

からわかる．さらに中間値の定理から $\boldsymbol{\xi} \in \overline{D}$ があって

$$\begin{aligned}
\bigl|A_i^{-1} \circ T(\boldsymbol{x}) - A_i^{-1} \circ T(\boldsymbol{x}')\bigr|_{\ell^\infty(n)} &= \bigl|\bigl(D(A_i^{-1} \circ T)(\boldsymbol{\xi})\bigr)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\bigr|_{\ell^\infty(n)} \\
&\le \bigl\|D\bigl(A_i^{-1} \circ T)(\boldsymbol{\xi})\bigr\| \times |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|_{\ell^\infty(n)} \\
&\le \sup_{\boldsymbol{x}\in\overline{D}} \bigl\|D\bigl(A_i^{-1} \circ T)(\boldsymbol{\xi})\bigr\| \times |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|_{\ell^\infty(n)} \\
&\le (1+\epsilon)|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|_{\ell^\infty(n)}
\end{aligned}$$

となるので写像 $\boldsymbol{x} \mapsto A_i^{-1} \circ T$ は Lipschitz 連続である．よって補題 C.81 と補題 C.85 から

$$\begin{aligned}
\lambda_V\bigl(T(D_i)\bigr) &= \lambda_V\bigl(A_i \circ A_i^{-1} \circ T(D_i)\bigr) \quad \bigl(\because \text{補題 C.81}\bigr) \\
&= |\det A_i| \lambda_{A_i^{-1}V}\bigl(A_i^{-1} \circ T(D_i)\bigr) \quad \bigl(\because \text{補題 C.85}\bigr) \\
&\le |\det A_i| (1+\epsilon)^n \lambda_U(D_i)
\end{aligned}$$

となる．$D = \bigcup_{i=1}^N D_i$ と $|\det A_i| \le |\det DT(\boldsymbol{x}_i)|\,(\boldsymbol{x} \in D_i)$ なので

$$\begin{aligned}
\lambda_V\bigl(T(D)\bigr) &\le \sum_{i=1}^N \lambda_V\bigl(T(D_i)\bigr) \\
&\le (1+\epsilon)^n \sum_{i=1}^N \int_{D_i} |\det A_i| \,\mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x}) \\
&\le (1+\epsilon)^n \int_D |\det DT(\boldsymbol{x})| \,\mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となる．$\epsilon \searrow 0$ とすれば補題は証明される． □

定理 C.84 の証明: まず (C.42) $\Leftrightarrow$ (C.43) を証明する．$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \cap V)$ と $f = \mathbb{1}_B$ とおく．このとき (C.43) は (C.42) となる．一方 (C.43) は標準機械 (standard machine) を用いると (C.42) から導くことができる．
第 2 段階: $S := T^{-1}$ とおくと

$$\mu := \lambda_V \circ T = \lambda_V \circ S^{-1} = S(\lambda_V)$$

となる．一方 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \cap U)$ に対して

$$\nu(B) := \int_{B \cap U} |\det DT(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x})$$

は密度 $|\det DT(\boldsymbol{x})|$ を持つ測度となる．補題 C.87 から

$$\mu(D) \leq \nu(D) \qquad (\forall D \in \mathcal{D})$$

である．よって補題 C.86 から

$$\mu(A) \leq \nu(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

となる．第 1 段階の結果から

$$\int f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \leq \int f\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr) |\det DT(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x}) \tag{C.49}$$

となる．
第 3 段階: 逆向きの不等号を示すために $S = T^{-1}$ は C^1 級微分同相であることを使う．(C.49) において $U \longleftrightarrow V$ と $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$ と交換すると

$$\int f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x}) \leq \int f\bigl(S(\boldsymbol{y})\bigr) |\det DS(\boldsymbol{y})| \, \mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \tag{C.50}$$

となる．ここで $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \cap U)$ を取り

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_{T(A)} \circ T(\boldsymbol{x}) |\det DT(\boldsymbol{x})|$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
\int f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x}) &= \int \mathbb{1}_{T(A)}\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr) |\det DT(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x}) \\
&\leq \int \bigl(\mathbb{1}_{T(A)} \circ T(\boldsymbol{x}) |\det DT(\boldsymbol{x})|\bigr) \circ S(\boldsymbol{y}) |\det DS(\boldsymbol{y})| \, \mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \\
&\quad \bigl(\because \text{(C.50)}\bigr) \\
&\leq \int \bigl(\mathbb{1}_{T(A)}\bigl(T \circ S(\boldsymbol{y})\bigr) |\det (DT) \circ S(\boldsymbol{y})| \times |\det DS(\boldsymbol{y})| \, \mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \\
&\quad \bigl(\because \boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{y}) \text{ を代入}\bigr) \\
&= \int \mathbb{1}_{T(A)}(\boldsymbol{y}) \Bigl|\det\Bigl[\underbrace{(DT) \circ S(\boldsymbol{y}) \times DS(\boldsymbol{y})}_{=\mathsf{id}_n = D\left(T \circ S\right)(\boldsymbol{y}) = (DT)\left(S(\boldsymbol{y})\right) \times DS} \Bigr]\Bigr| \, \mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \\
&= \int \mathbb{1}_{T(A)}(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \\
&= \lambda_V(T(A))
\end{aligned}$$

となる．あとは標準機械 (standard machine) を用いると

$$\int f\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr)|\det DT(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{x}) \le \int f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) \tag{C.51}$$

を得る．(C.49) と (C.51) から

$$\int f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\lambda_V(\boldsymbol{y}) = \int f\bigl(T(\boldsymbol{x})\bigr)|\det DT(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\lambda_U(\boldsymbol{x})$$

がわかる． □

C.9 条件付き期待値: 再訪問

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ を確率空間とし, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ も σ 加法族とする．X は $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数で $\mathsf{E}\bigl[|X|\bigr] < \infty$ とする．

定義 C.88. $\mathcal{F}$ を与えたときの X の**条件付き期待値**を次の条件をみたす任意の確率変数 Y とする．

(i) Y は $\mathcal{F}$ 可測.

(ii) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega).$$

まず条件付き期待値の存在と一意性を確認する．

補題 C.89. Y を定義 C.88 の条件 (i)(ii) をみたすとき Y は可積である．

Proof. $A := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) > 0\}$ とおくと, A, $A^c \in \mathcal{F}$ となる．(ii) を用いると

$$\int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \le \int_A |X(\omega)|\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega),$$
$$\int_{A^c} \bigl(-Y(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_{A^c} \bigl(-X(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \le \int_{A^c} |X(\omega)|\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega).$$

よって

$$\begin{aligned}\int |Y(\omega)|\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) &= \int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) + \int_{A^c} \bigl(-Y(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\ &\le \int_A |X(\omega)|\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) + \int_{A^c} |X(\omega)|\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\ &= \int |X(\omega)|\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\end{aligned}$$

からわかる． □

補題 C.90. Y は一意.

Proof. Y' も定義 C.88 の条件 (i)(ii) をみたすとする．すると (ii) より

$$\int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A Y'(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad (\forall A \in \mathcal{A}).$$

$\epsilon > 0$ を取り, $A := \{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \epsilon\}$ とする．$A \in \mathcal{F}$ であることから (ii) から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) - \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\ &= \int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) - \int_A Y'(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\ &= \int_A \big\{Y(\omega) - Y'(\omega)\big\}\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\ &\geq \epsilon \int_A \mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \epsilon \mathsf{Pr}(A) \end{aligned}$$

となり, $\mathsf{Pr}(A) = 0$ がわかる.

$$\Big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) - Y'(\omega) > 0\Big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \frac{1}{n}\Big\}$$

と表現できることとすべての $\epsilon > 0$ に対して $\mathsf{Pr}(A) = 0$ なので

$$\begin{aligned} \mathsf{Pr}\bigg(\Big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) - Y'(\omega) > 0\Big\}\bigg) &= \mathsf{Pr}\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \frac{1}{n}\Big\}\bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{Pr}\bigg(\Big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \frac{1}{n}\Big\}\bigg) \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる．よって

$$\mathsf{Pr}\big(\omega \in \Omega;\, Y(\omega) \leq Y'(\omega)\big) = 1$$

となる．次に $A := \{\omega \in \Omega;\, Y'(\omega) - Y(\omega) \geq \epsilon\}$ として, 同じ議論を行えば

$$\mathsf{Pr}\big(\omega \in \Omega;\, Y(\omega) \geq Y'(\omega)\big) = 1.$$

よって

$$\mathsf{Pr}\big(\omega \in \Omega;\, Y(\omega) = Y'(\omega)\big) = 1$$

となる. □

定義 C.91. 定義 C.88 で定めた Y を

$$Y(\omega) = \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)$$

と記すことにする.

補題 C.92. $\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)$ は存在する.

Proof. $\mu = \mathsf{Pr}$ と書くことにする. まず $X \geq 0$ とする. $\mathcal{F}$ 上の測度 ν を

$$\nu(A) = \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \qquad (A \in \mathcal{F})$$

と定める. 単調収束定理を用いると ν は $\mathcal{F}$ 上の測度となる. さらに $\nu \ll \mu$ である. よって Radon-Nikodym の定理より, $\mathcal{F}$ 可測関数 $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ が存在し

$$\begin{aligned}\int_A \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) &= \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \nu(A)\\ &= \int_A \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \qquad (A \in \mathcal{F})\end{aligned} \tag{C.52}$$

となる. $A = \Omega$ とすると $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \geq 0$ は可積となる. Radon-Nikodym の一意性から

$$\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(\omega)$$

となる.

一般の場合については

$$\begin{aligned}&X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega),\\ &X^+(\omega) = \max\{X(\omega),\,0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega),\,0\}\end{aligned}$$

とする. $Y_1(\omega) = \mathsf{E}\big[X^+|\,\mathcal{F}\big](\omega)$ と $Y_2(\omega) = \mathsf{E}\big[X^{-1}|\,\mathcal{F}\big](\omega)$ とおくと $Y_1 - Y_2$ は $\mathcal{F}$ 可測である. さらに $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) &= \int_A X^+(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) - \int_A X^-(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\\ &= \int_A Y_1(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) - \int_A Y_2(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because \text{(C.52)}\big)\\ &= \int_A \left\{Y_1(\omega) - \int_A Y_2(\omega)\right\}\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\\ &= \int_A \big(Y_1 - Y_2\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\end{aligned}$$

となる. よって $\big(Y_1 - Y_2\big)(\omega) = \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)$ がわかる. □

注意 C.93. 以下の記法を導入する．
(1) $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathsf{Pr}\big(A|\,\mathcal{F}\big)(\omega) := \mathsf{E}\big[\mathbb{1}_A|\,\mathcal{F}\big](\omega)$$

と定める．
(2) $A,\, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathsf{Pr}\big(A|\,B\big) := \frac{\mathsf{Pr}\big(A \cap B\big)}{\mathsf{Pr}\big(B\big)}$$

と定める．
(3) X と Y を $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数としたとき

$$\mathsf{E}\big[X|\,Y\big](\omega) := \mathsf{E}\big[X|\,\sigma(Y)\big](\omega)$$

とする．ただし $\sigma(Y)$ は Y によって生成された σ 加法族である．すなわち

$$\sigma(Y) := \sigma\Big[\big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) \le r\, (\forall r \in \mathbb{R})\big\}\Big]$$

である．
(4) X と Y を $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathsf{Pr})$ 上の連続型確率変数とする．さらに $(X,\, Y)$ は同時 p.d.f. $\mathsf{p}(x,\, y)$ を持つとする．議論を簡単にするために $\forall y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int \mathsf{p}(x,\, y)\,\mathrm{d}x > 0$$

とする．
　いま関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $\mathsf{E}\big[|g(X)|\big] < \infty$ なるものと考える．このとき

$$\mathsf{E}\big[g(X)|\,Y\big](\omega) = h(Y(\omega)), \qquad h(y) = \frac{\int g(x)\mathsf{p}(x,\, y)\,\mathrm{d}x}{\int \mathsf{p}(x,\, y)\,\mathrm{d}x}$$

となる．これを示すために $A \in \sigma(Y)$ を取る．このときある $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が存在して

$$A := \big\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) \in B\big\}$$

と書ける．したがって Fubini の定理から

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[h(Y)\mathbb{1}_A\big] &= \mathsf{E}\big[h(Y)\mathbb{1}_B(Y)\big] \qquad \big(\because Y \in B \Leftrightarrow \omega \in A\big)\\
&= \int_B \int h(y)p(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_B \int \left\{\frac{\int g(x)p(x,\,y)\,\mathrm{d}x}{\int p(x,\,y)\,\mathrm{d}x}\right\} p(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \big(\because h \text{ の定義を代入}\big)\\
&= \int_B \left\{\int \frac{\int g(x)p(x,\,y)\,\mathrm{d}x}{\int p(x,\,y)\,\mathrm{d}x} p(x,\,y)\,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}y \qquad \big(\because \text{Fubini の定理}\big)\\
&= \int_B \frac{\int g(x)p(x,\,y)\,\mathrm{d}x}{\int p(x,\,y)\,\mathrm{d}x} \left\{\int p(x,\,y)\,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}y\\
&= \int_B \int g(x)p(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \mathsf{E}\big[g(X)\mathbb{1}_A\big] \qquad \big(\because Y \in B \Leftrightarrow \omega \in A\big)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\int_A h\big(Y(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A g\big(X(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)$$

なので

$$\mathsf{E}\big[g(X)|\,\mathcal{F}\big](\omega) = h\big(Y(\omega)\big)$$

がわかる． □

C.10 条件付き期待値の性質

定理 C.94. X, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, Y を確率空間 $(\Omega,\,\mathcal{A},\,\mathsf{Pr})$ 上の確率変数列とする．
(1) $\mathsf{E}\big[|X|\big] < \infty$ かつ $\mathsf{E}\big[|Y|\big] < \infty$ とする．このとき $a,\,b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathsf{E}\big[aX + bY|\,\mathcal{F}\big](\omega) = a\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega) + b\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)$$

と成り立つ.
(2) さらに $X \leq Y$ のとき

$$\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega) \leq \mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)$$

が成り立つ.
(3) $X_n \geq 0\,(n = 1,\,2,\,\ldots)$ かつ $X_n \uparrow X\ (n \to \infty)$ で $\mathsf{E}\big[X\big] < \infty$ のとき

$$\mathsf{E}\big[X_n|\,\mathcal{F}\big](\omega) \uparrow \mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega) \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

Proof. (1) あきらかに $a\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big]+b\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big]$ は $\mathcal{F}$ 可測である. $\forall A\in\mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_A\big\{a\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)+b\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\big\}\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\\
&\qquad=a\int_A\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)+b\int_A\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\\
&\qquad=a\int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)+b\int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\\
&\quad=\int_A\big(aX+bY\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)
\end{aligned}$$

を得る.

(2) 条件付き期待値の定義より $\forall A\in\mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A\mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)&=\int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\le\int_A Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)\\
&=\int_A\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)
\end{aligned}$$

を得る. $\forall\epsilon>0$ に対して

$$A:=\big\{\omega\in\Omega;\ \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)-\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\ge\epsilon\big\}$$

とおくと $\mathsf{Pr}(A)=0$ となる. ϵ は任意だったので

$$\begin{aligned}
&\Big\{\omega\in\Omega;\ \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)>\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\Big\}\\
&\qquad=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big\{\omega\in\Omega;\ \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)-\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\ge\frac{1}{n}\Big\}
\end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\Bigg(\Big\{\omega\in\Omega;\ \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)>\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\Big\}\Bigg)\\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\mathsf{Pr}\Bigg(\Big\{\omega\in\Omega;\ \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)-\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\ge\frac{1}{n}\Big\}\Bigg)=0
\end{aligned}$$

となるから

$$\mathsf{Pr}\Big(\omega\in\Omega;\ \mathsf{E}\big[X|\,\mathcal{F}\big](\omega)\le\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\Big)=1$$

となる.

(3) $Y_n:=X-X_n\,(n\in\mathbb{N})$ とおくと $\mathsf{E}\big[Y_n|\,\mathcal{F}\big]\downarrow 0\,(n\to\infty)$ を示せばよい. $Y_n\downarrow 0\,(n\to\infty)$ なので (2) の結果から

$$Z_n(\omega):=\mathsf{E}\big[Y_n|\,\mathcal{F}\big](\omega)$$

はほとんど確実に単調減少列なので

$$Z_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[Y_n \big|\, \mathcal{F}\big](\omega)$$

はほとんど確実に存在する．$A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A Z_n(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A Y_n(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)$$

である．$n \to \infty$ のとき $Y_n(\omega) \downarrow 0\,(n \to \infty)$ なので, 単調収束定理から

$$\int_A Z_\infty(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = 0 \qquad (\forall A \in \mathcal{F})$$

となる．よって $Z_\infty \equiv 0$ となる． □

定理 C.95. $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}$ とする．このとい

(1) $\mathsf{E}\big[\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big] \big|\, \mathcal{F}_2\big](\omega) = \mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big](\omega)$.

(2) $\mathsf{E}\big[\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_2\big] \big|\, \mathcal{F}_1\big](\omega) = \mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big](\omega)$.

Proof. (1) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ なので, $\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big]$ は $\mathcal{F}_2$ 可測でもある．よって $A \in \mathcal{F}_2$ に対して

$$\int_A \mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) = \int_A \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big] \Big|\, \mathcal{F}_2\Big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)$$

がわかる．
(2) $\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big]$ は $\mathcal{F}_1$ 可測である．$A \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A \mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) &= \int_A X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because A \in \mathcal{F}_1\big) \\
&= \int_A \mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_2\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because A \in \mathcal{F}_2\big) \\
&= \int_A \Big\{\mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_2\big] \Big|\, \mathcal{F}_1\Big](\omega)\Big\}\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because A \in \mathcal{F}_1\big)
\end{aligned}$$

より

$$\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_1\big](\omega) = \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[X \big|\, \mathcal{F}_2\big] \Big|\, \mathcal{F}_1\Big](\omega)$$

がわかる．

定理 C.96. X は $\mathcal{F}$ 可測とし, $\mathsf{E}\big[|X|\big] < \infty$ かつ $\mathsf{E}\big[|XY|\big] < \infty$ とする．このとき

$$\mathsf{E}\big[XY \big|\, \mathcal{F}\big](\omega) = X(\omega)\mathsf{E}\big[Y \big|\, \mathcal{F}\big](\omega) \tag{C.53}$$

が成立する．

Proof. $X(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)\,(\forall B \in \mathcal{F})$ のとき (C.53) が成り立つことを示す. $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{1}_B(\omega)\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) &= \int_{A\cap B} \mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\
&= \int_{A\cap B} Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\
&= \int_A \mathbb{1}_B(\omega)Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega)
\end{aligned}$$

となる. よって $X(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)$ のとき (C.53) は 成立する.

次に $X, Y \geq 0$ とし, X_n は階段関数とし, $X_n \uparrow X\,(n \to \infty)$ とする. 単調収束定理から

$$\begin{aligned}
\int_A X(\omega)\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) &= \lim_{n\to\infty}\int_A X_n(\omega)\mathsf{E}\big[Y|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_A \mathsf{E}\big[X_nY|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because (1) \text{ の結果}\big) \\
&= \int_A \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[X_nY|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because \text{単調収束定理}\big) \\
&= \int_A \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[XY|\,\mathcal{F}\big](\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{Pr}(\omega) \qquad \big(\because \text{定理 C.94(3)}\big)
\end{aligned}$$

がわかり, $X, Y \geq 0$ のとき (C.53) は成立する.

最後に一般の X, Y に対して

$$X^+ = \max\{X, 0\}, \quad X^{-1} = \max\{-X, 0\}, \quad Y^+ = \max\{Y, 0\}, \quad Y^{-1} = \max\{-Y, 0\}$$

として, 上の結果を用いればよい. □

C.11 Radon-Nikodym の定理と十分統計量

Radon-Nikodym の定理から導かれることを用いて Fisher-Neyman の因子分解定理の測度論的な証明を与える.

補題 C.97. μ を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の σ 有限測度とし, $\mathcal{N}$ を $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の測度の集合で, $\forall \nu \in \mathcal{N}$ に対して, $\nu \ll \mu$ をみたしているとする. このとき非負の数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$ なるものと $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ が存在して $\forall \nu \in \mathcal{N}$ に対して $\nu \ll \sum_{n=1}^{\infty} c_n\nu_n$ となる.

Proof. $\mathcal{N}$ が可算集合ならば定理の主張は自明であるので, $\mathcal{N}$ は非可算とする.

μ は有限測度の場合は

$$\lambda = \mu$$

とおく．μ が有限測度でない場合には $\mathbb{X}$ の可算個の部分集合 $\{\mathbb{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ をうまくとると

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n; \qquad 0 < \mu(\mathbb{X}_n) = d_n < \infty$$

とできる．$\forall B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\lambda(B) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B \cap \mathbb{X}_n)}{2^n d_n}$$

とおく．いずれの場合でも λ は有限測度で $\nu \ll \lambda\,(\forall \nu \in \mathcal{N})$ となる[6]．ここで

$$\mathcal{Q} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n;\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1\ c_n \in \mathbb{R},\ \text{かつ}\ \{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N} \right\}$$

とする．明らかに

$$\beta \in \mathcal{Q} \Rightarrow \beta \ll \lambda$$

である．

つぎに

$$\mathcal{D} := \left\{ C \in \mathcal{A};\ \exists \mathsf{Q} \in \mathcal{Q}\ \text{s.t.}\ \lambda\left(\left\{ x \in C;\ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0 \right\}\right) = 0\ \text{かつ}\ \mathsf{Q}(C) > 0 \right\}$$

とする．まず $\mathcal{D} \neq \varnothing$ を確認する．そのために $\nu \in \mathcal{N}$ で $\nu \neq 0$ なるものを取り

$$C := \left\{ x \in \mathbb{X};\ \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) > 0 \right\}$$

とする．$\mathsf{Q} = \nu$ としたとき

$$\left\{ x \in C;\ \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0 \right\} = \varnothing$$

となり

$$Q(C) = \nu(C) = \mu(\mathbb{X}) > 0$$

[6] $\lambda(A) = 0$ なる $A \in \mathcal{A}$ をとる．すると $\mu(A \cap \mathbb{X}_n) = 0\,(\forall n \in \mathbb{N})$ となる．したがって

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap \mathbb{X}_n) = 0$$

となる．$\nu \ll \mu$ から $\nu(A) = 0$ となる．よって $\lambda \ll \mu$ がわかる．

となる．よって $C \in \mathcal{D}$ となる．λ は有限測度なので

$$\sup_{C \in \mathcal{D}} \lambda(C) =: c < \infty$$

となる．よって $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ かつ $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ をうまくとると

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = c$$

とできる．ここで

$$C_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

とおき, $\mathsf{Q}_n \in \mathcal{Q}\,(n \in \mathbb{N})$ で

$$\mathsf{Q}_n(C_n) > 0 \text{ かつ } \lambda\left(\left\{x \in C_n;\ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_n}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\}\right) = 0$$

なるもの[7]を取る．さらに

$$\mathsf{Q}_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{Q}_n}{2^n} \in \mathcal{Q} \qquad \left(\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\right)$$

とおく．すると

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_0}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_n}{\mathrm{d}\lambda}$$

かつ

$$\left\{x \in C_0;\ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_0}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in C_n;\ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_n}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\}$$

となる．このことより

$$\lambda\left(\left\{x \in C_0;\ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_0}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left\{x \in C_n;\ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_n}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\}\right)$$

となるで, $C_0 \in \mathcal{D}$ がわかる．さらに

$$\lambda(C_0) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = c$$

がわかる．

[7] $C_n \in \mathcal{D}$ なのでこのような $\mathsf{Q}_n \in \mathcal{Q}$ が取れる．

あとは $\mathsf{Q}_0 \in \mathcal{Q}$ なので $\forall\nu \in \mathcal{N}$ に対して $\nu \ll Q_0$ を示せばよい．そのために $A \in \mathcal{A}$ で $\mathsf{Q}_0(A) = 0$ なるものと $\forall\nu \in \mathcal{N}$ を取る．$x \in C_0$ に対して

$$\mathsf{Q}_0(A \cap C_0) \leq \mathsf{Q}_0(A) = 0 \text{ かつ } \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_0}{\mathrm{d}\lambda}(x) > 0\,(\forall x \in C_0)$$

となる[8]ので

$$\lambda(A \cap C_0) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A \cap C_0) = 0 \qquad (\because \nu \ll \lambda)$$

となる．ここで

$$C := \left\{x \in \mathbb{X};\, \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) > 0\right\}$$

とおく．すると

$$x \in C^c \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0$$

なので

$$\nu(A \cap C_0^c \cap C^c) \leq \int_{C^c} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$$

となる．さらに $D := A \cap C_0^c \cap C$ とおくと $D \cap C_0 = \varnothing$ となる．$\lambda(D) > 0$ のとき

$$\lambda(C_0 \cap D) > \lambda(D)$$

であり

$$Q_0\left(\left\{x \in D;\, \frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\}\right) = 0$$

となる[9]となるので, $D \in \mathcal{D}$ となる．明らかに $C_0 \cup D \in \mathcal{D}$ であり

$$\lambda(C_0 \cup D) > \lambda(C_0) = c$$

---

[8] $x \in C_0$ のときある $n \in \mathbb{N}$ があって $x \in C_n$ となる．すると

$$\lambda\left(\left\{x \in C_n;\, \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_n}{\mathrm{d}\lambda}(x) = 0\right\}\right) = 0$$

なので

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}_0}{\mathrm{d}\lambda}(x) > 0$$

となる．

[9]

$$\mathsf{Q}_0 \in \mathcal{Q} \;\Rightarrow\; \mathsf{Q}_0 \ll \lambda$$

であることからわかる．

となるので, c の定義[10]と矛盾する．しがたって

$$\lambda(D) = 0 \text{ かつ } \nu(D) = 0$$

となる．このことより

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(A \cap C_0) + \nu(A \cap C_0^c)\\ &= \nu(A \cap C_0) + \nu(A \cap C_0^c \cap C^c) + \nu(A \cap C_0^c \cap C)\\ &= \nu(A \cap C_0) + \nu(A \cap C_0^c \cap C^c) + \nu(D) = 0\end{aligned}$$

がわかる．よって定理が証明された． □

定理 C.98. ν を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の σ 有限測度とし,

$$\mathcal{P} = \{\mathsf{P};\ \mathsf{P} \text{ は } (\mathbb{X}, \mathcal{A}) \text{ 上の確率分布で}, \mathsf{P} \ll \nu\}$$

を統計的モデルとする．X を母集団分布 $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ からの標本とし, $T(X)$ を統計量とする．このとき $T(X)$ は $\mathcal{P}$ に対する十分統計量であるための必要十分条件は, $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の可測関数 h (これは $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ に依存しない) と T の値域上の可測関数 g_P (これは $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ に依存する) が存在して

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}\nu}(x) = g_{\mathsf{P}}(T(x))h(x), \qquad \mathsf{P} - a.s. \tag{C.54}$$

と書けることである．

Proof. (⇒) の証明: T は $\mathcal{P}$ に対する十分統計量とする．補題 C.97 から, $\{\mathsf{P}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ と数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$) をうまく取れば

$$\mathsf{P} \ll \mathsf{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{P}_n$$

とできる． ここで $\dfrac{d\mathsf{Q}}{d\nu}$ は $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ に依存しないことに注意する． $\mathsf{E}[\cdot]$ と $\mathsf{E}[\cdot|T]$ を P に関する期待値と条件付き期待値とし, $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\cdot]$, $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\cdot]$ と $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\cdot|T]$, $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\cdot|T]$ を Q, P_n それぞれにに関する期待値と条件付き期待値とする．T は十分統計量であるので T を与えたときの X の条件付き分布は $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ に依存しないので

$$\mathsf{E}[\mathbb{1}_A(X)|T] = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\mathbb{1}_A(X)|T] \qquad (\forall A \in \mathcal{A}) \tag{C.55}$$

[10] $c = \sup_{C \in \mathcal{D}} \lambda(C)$ である．

が成立することに注意する．$\forall A \in \mathcal{A}$ と $B \in \sigma(T)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}(A \cap B) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{P}_n(A \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\mathbb{1}_{A\cap B}(X)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\big[\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\mathbb{1}_{A\cap B}(X)|\, T]\big] \qquad \big(\because \text{条件付き期待値の性質}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\big[\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\mathbb{1}_{A}(X)\mathbb{1}_{B}(X)|\, T]\big] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\big[\mathbb{1}_{B}(X)\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T]\big] \qquad \big(\because \mathbb{1}_B(X) \text{ は } \sigma(T) \text{ 可測}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\big[1_{B}(X)\mathsf{E}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T]\big] \qquad \big(\because \text{(C.55)}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_B \Big\{\mathsf{E}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T](x)\Big\}\, \mathrm{d}\mathsf{P}_n \\
&= \int_B \Big\{\mathsf{E}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T](x)\Big\} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \mathrm{d}\mathsf{P}_n \qquad \big(\because \text{有界収束定理}\big) \\
&= \int_B \Big\{\mathsf{E}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T](x)\Big\}\, \mathrm{d}\mathsf{Q}(x)
\end{aligned}$$

となる．一方

$$\mathsf{Q}(A \cap B) = \int_B \mathbb{1}_A(x)\, \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) = \int_B \Big\{\mathsf{E}_Q[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T](x)\Big\}\, \mathrm{d}\mathsf{Q}(x)$$

となるので

$$\mathsf{E}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T](x) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_{A}(X)|\, T](x), \qquad \mathsf{Q} - a.s.$$

を得る．いま

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}(x) =: g_P\big(T(x)\big)$$

とおくと $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A) &= \mathsf{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathsf{E}\big[\mathsf{E}[\mathbb{1}_A(X)|\,T]\big] = \int \left\{ \mathsf{E}[\mathbb{1}_A(X)|\,T](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{P}(x) \\
&= \int \left\{ \mathsf{E}_Q[\mathbb{1}_A(X)|\,T](x)\, \frac{\mathrm{d}mathsfP}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}(x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \\
&= \int \left\{ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_A(X)|\,T](x)\, g_{\mathsf{P}}(T(x)) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \\
&= \int \left\{ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_A(X) g_{\mathsf{P}}(T(X))|\,T](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \qquad \big(\because g_{\mathsf{P}}(T(x)) \text{ は } \sigma(T) \text{ 可測}\big) \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[\mathbb{1}_A(X) g_{\mathsf{P}}(T(X))\big] \qquad \big(\because \text{条件付き期待値の定義}\big) \\
&= \int \left\{ \mathbb{1}_A(x) g_{\mathsf{P}}(T(x)) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \\
&= \int_A \left\{ g_{\mathsf{P}}(T(x)) \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\nu}(x) \right\} \mathrm{d}\nu(x)
\end{aligned}$$

となる. よって

$$h = \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\nu}$$

ととればよいことがわかる.

<u>($\Leftarrow$) の証明</u>: (C.54) が成り立つとする. T が $\mathcal{P}$ に対する十分統計量であることを示すために

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A|\,T) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_A(X)|\,T] \qquad \mathsf{P}-a.s. \\
&\Leftrightarrow \int_B \left\{ \mathsf{P}(A|\,T)(x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{P}(x) = \int_B \left\{ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_A(X)|\,T](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{P}(x) \quad \big(\forall B \in \sigma(T)\big)
\end{aligned} \tag{C.56}$$

を示せばよい. Radon-Nikodym の微分の性質と (C.54) から

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}(x) &= \frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}\nu}(x) \Big/ \frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\nu}(x) = \frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}\nu}(x) \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\mathrm{d}\mathsf{P}_n}{\mathrm{d}\nu}(x) \\
&= g_{\mathsf{P}}(T(x))h(x) \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_{\mathsf{P}_n}(T(x))h(x) \\
&= g_{\mathsf{P}}(T(x)) \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_{\mathsf{P}_n}(T(x))
\end{aligned}$$

となることに注意する. このことより $\dfrac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}(x)$ は $\sigma(T)$ 可測であることが

わかる. $\forall B \in \sigma(T)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_B \left\{ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_A(X)|\, T](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{P}(x) &= \int_B \left\{ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[\mathbb{1}_A(X)|\, T](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \\
&= \int_B \left\{ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left[\mathbb{1}_A(X) \frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}(X) \middle| T \right](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \\
&= \int_B \left\{ \mathbb{1}_A(x) \frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}(x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{Q}(x) \qquad \text{(条件付き期待値の定義)} \\
&= \int_B \mathbb{1}_A(x)\, \mathrm{d}\mathsf{P}(x) = \int_B \left\{ \mathsf{E}[\mathbb{1}_A|\, T](x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{P}(x) \\
&= \int_A \left\{ \mathsf{P}(A|\, T)(x) \right\} \mathrm{d}\mathsf{P}(x)
\end{aligned}
$$

となる. よって (C.56) が示されたので, T は $\mathcal{P}$ に対する十分統計量となることがわかる. □

C.12 積分と導関数

C.13 章末注釈と参考文献