第F章　特性関数と分布の弱収束

F.1　特性関数の定義と性質

定義 F.1. (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の分布 P に対して

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx}\, d\mathsf{P}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, d\mathsf{P}(x) + \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, \mathrm{d}\mathsf{P}(x) \\ &\qquad\qquad (-\infty < t < \infty)\end{aligned}$$

を P の**特性関数** (characteristic function) という.
(2) また $X \sim \mathsf{P}$ のとき, X の特性関数 φ_X を

$$\varphi_X(t) = \mathsf{E}\big[e^{\sqrt{-1}tX}\big] \qquad (-\infty < t < \infty)$$

と書く.

注意 F.2. (1) 「確率変数の特性関数」と「分布の特性関数」は実質的に同じであるので, 主として確率変数の特性関数の場合のみを書く.
(2) また $\left|e^{\sqrt{-1}tx}\right| \leq 1$ なので, 特性関数は常に存在する.
(3) この積分の計算の仕方は, X の p.m..f. または p.d.f. を $\mathsf{p}(x)$ と書く. すると離散型の場合は

$$\varphi_X(t) = \sum_x e^{\sqrt{-1}tx}\mathsf{p}(x) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

となり, 連続の場合は

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx} p(x)\, \mathrm{d}x \qquad (-\infty < t < \infty)$$

となる.

定理 F.3. 確率変数 X の特性関数 φ_X は次の性質をみたす.
(1) $\left|\varphi_X(t)\right| \leq 1$, $\varphi_X(0) = 1$.
(2) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
(3) $\varphi_X(t)$ は t について連続.

Proof. (1), (2) は定義と複素数の性質からわかる. (3) のみ証明を書いておく. $\epsilon \neq 0$ に対して

$$\left|e^{\sqrt{-1}(t+\epsilon)x} - e^{\sqrt{-1}tx}\right| = \left|e^{\sqrt{-1}tx}\right| \cdot \left|e^{\sqrt{-1}\epsilon x} - 1\right| \leq 2$$

となるので, Lebeague の優収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\bigl\{\varphi_X(t+\epsilon) - \varphi_X(t)\bigr\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx}\bigl\{e^{\sqrt{-1}\epsilon} - 1\bigr\}\,\mathrm{dP}(x)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx}\lim_{\epsilon\to 0}\bigl\{e^{\sqrt{-1}\epsilon} - 1\bigr\}\,\mathrm{dP}(x)\Bigr\} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので, $\varphi_X(t)$ の t における連続性は示せた. □

定理 F.4. $a\,(\neq 0)$, b は定数とし, 確率変数 X と $aX+b$ の特性関数をそれぞれ $\varphi_X(t)$, $\varphi_{aX+b}(t)$ とおくと次の関係が成り立つ.

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{\sqrt{-1}tb}\varphi_X(at).$$

Proof. 特性関数の定義からわかる. □

注意 F.5. (1) $X \sim \mathsf{Bino}(n,\,p)\,(n\in\mathbb{N},\,0\leq p\leq 1)$ のとき

$$\varphi_X(t) = \bigl(e\,\sqrt{-1}tp + (1-p)\bigr)^n \qquad (-\infty < t < \infty).$$

(2) $X \sim \mathsf{Po}(\lambda)\,(\lambda > 0)$ のとき

$$\varphi_X(t) = \exp\bigl\{\lambda(e^{\sqrt{-1}t} - 1)\bigr\} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

(3) $X \sim \mathsf{Exp}(n,\,p)\,(n\in\mathbb{N},\,0\leq p\leq 1)$ のとき

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \sqrt{-1}t} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

(4) $X \sim \mathsf{N}(\mu,\,\sigma^2)\,(\mu\in\mathbb{R},\,0<\sigma<\infty)$ のとき

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{\sqrt{-1}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

□

定理 F.6. 確率空間 $(\Omega,\,\mathcal{A},\,\mathsf{Pr})$ 上の確率変数 X の特性関数を φ_X とする. $\mathsf{Pr}(X=a) = \mathsf{Pr}(X=b) = 0$ なる $a,\,b\,(a<b)$ について次が成りたつ.

$$\mathsf{Pr}\bigl(a < X \leq b\bigr) = \mathsf{P}((a,\,b]) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-\sqrt{-1}at} - e^{-\sqrt{-1}tb}}{\sqrt{-1}t}\varphi_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proof. □

系 F.7. 分布はその特性関数から一意的に定まる．

Proof. 定理 *F*.6 からわかる． □

定理 F.8. (1) $\mathsf{E}\big[|X|\big] < \infty$ のとき $\varphi_X(t)$ は連続微分可能であり

$$\dot{\varphi}_X(0) = \frac{\mathrm{d}\varphi_X}{\mathrm{d}t}(t)\bigg|_{t=0} = \sqrt{-1}\mathsf{E}\big[X\big]$$

となる．
(2) $\mathsf{E}\big[|X^2|\big] < \infty$ のとき $\varphi_X(t)$ は 2 回連続微分可能であり

$$\ddot{\varphi}_X(0) = \frac{\mathrm{d}^2\varphi_X}{\mathrm{d}t^2}(t)\bigg|_{t=0} = -\mathsf{E}\big[X^2\big]$$

となる．
(3) したがって

$$\mathsf{E}\big[X\big] = -\sqrt{-1}\varphi_X(0),\ \mathbb{V}\big[X\big] = -\ddot{\varphi}_X(0) + \big\{\dot{\varphi}_X(0)\big\}^2$$

となる．

Proof. □

F.2 分布の収束と Glivenko の定理

定義 F.9. $n \in \mathbb{N}$ とする．$\{\mathsf{P}_n\}$, P を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の分布列とし，F_n, F を P_n, P の分布関数とする．P_n が P に**弱収束**するとは

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) = \mathsf{F}(x)$$

が極限 F のすべての連続点 x において成り立つことをいう．また確率変数 X_n の分布が確率変数 X の分布に弱収束するとき，X_n は X に**法則収束**するという．これらのことを $\mathsf{P}_n \rightsquigarrow \mathsf{P}$, $X_n \rightsquigarrow X$ 等と記すことにする．

注意 F.10. 弱収束の必要十分条件は

$$\mathsf{F}(x-0) \le \liminf_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \le \mathsf{F}(x+0), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

である．証明は笠原 (2010, *p*.135) を参照のこと． □

定理 F.11. $n \in \mathbb{N}$ とする．P_n, P は可測空間 $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ 上の分布列とするとき, 以下の 4 条件は同値である．
(1) $\mathsf{P}_n \rightsquigarrow \mathsf{P}$ である．
(2) $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$ なる任意の $a < b$ に対して

$$\mathsf{P}_n\big((a, b]\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{P}\big((a, b]\big)$$

となる．
(3) コンパクト台をもつ任意の連続関数 $h(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x) \tag{F.1}$$

となる．
(4) 任意の有界連続関数 $h(x)$ に対して (F.1) が成り立つ．

Proof. 証明は笠原 (2010, *pp*.136 − 140) を参照のこと． □

定理 F.12. $n \in \mathbb{N}$ とする．X_n, X は確率空間 $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr}\big)$ 上で定義された確率変数列とする．このとき次の 4 条件は同値である．
(1) $X_n \rightsquigarrow X$ となる．
(2) $\mathsf{P}(\{a\}) = \mathsf{P}(\{b\}) = 0$ なる任意の $a < b$ に対して

$$\mathsf{Pr}\big(a < X_n \leq b\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Pr}\big(a < X \leq b\big)$$

となる．
(3) コンパクト台をもつ任意の連続関数 $h(x)$ に対して

$$\mathsf{E}\big[h(X_n)\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\big[h(X)\big] \tag{F.2}$$

となる．
(4) 任意の有界連続関数 $h(x)$ に対して (F.2) が成り立つ．

Proof. 節 E.F.3.1 で行う． □

定理 F.13. (Glivenko の定理) $n \in \mathbb{N}$ とする．測度空間 $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ 上の分布 P_n, P の特性関数を φ_n, φ とする．このとき次は同値である．
(1) $\mathsf{P}_n \rightsquigarrow \mathsf{P}\,(n \to \infty)$ である．
(2) $\varphi_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t)\,(-\infty < t < \infty)$ である．

Proof. 節 E.F.3.1 で行う． □

定理 F.14. 確率変数 X_n が X に法則収束するための必要十分条件は

$$\mathsf{E}\big[e^{\sqrt{-1}tX_n}\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\big[e^{\sqrt{-1}tX}\big] \qquad (-\infty < t < \infty)$$

である．

Proof. 定理 F.13 の言いかえである. □

F.3 定理の証明

F.3.1 定理 F.11 の証明

(1) $\Longrightarrow$ (2): $\mathsf{P}_n\big((a,\, b]\big) = \mathsf{F}_n(b) - \mathsf{F}_n(a)$ からわかる.
(2) $\Longrightarrow$ (3): 十分おおきな $M > 0$ をとり, 区間 $[-M,\, M]$ の分割 $-M = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = M$ を考える. ただし $N \in \mathbb{N}$ で, すべての点 $a_k\,(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N)$ は $\mathsf{P}\big(\{a_k\}\big) = 0$ となるように取る. P の不連続点は高々可算個しかないのでこのような取り方ができることに注意せよ. このとき

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{(a_{k-1},\, a_k]}(x)$$

の形の階段関数を考える. ここで $c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_N$ は実数である. この階段関数に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathsf{P}_n\big((a_{k-1},\, a_k]\big),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathsf{P}\big((a_{k-1},\, a_k]\big)$$

と書けるから, 上の式の右辺をみると (2) を仮定すると (3) が階段関数 $h(x)$ に成立することがわかる. 次に h がコンパクト台をもつ連続関数の場合を考える. $\forall\epsilon > 0$ に対して階段関数 $h_\epsilon(x)$ が存在して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|h(x) - h_\epsilon(x)\big| < \epsilon$$

とできることが知られている. このことに注意して

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right| \\
&\quad\le \left|\int_{-\infty}^{\infty} \{h(x) - h_\epsilon(x)\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} h_\epsilon(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h_\epsilon(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right| \\
&\qquad + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \{h(x) - h_\epsilon(x)\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right| \\
&\quad\le 2\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|h(x) - h_\epsilon(x)\big| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} h_\epsilon(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h_\epsilon(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right|
\end{aligned}$$

より, コンパクト台をもつ $h(x)$ に対して (F.1) が成立することがわかる.

(3) $\Longrightarrow$ (4): $N>1$ とし

$$g_N(x)=\begin{cases}1 & (|x|\le N)\\ 0 & (|x|\ge N+1)\end{cases}$$

なる連続関数を考える．(3) を仮定すると $h_N(x)=h(x)g_N(x)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h_N(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_N(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\bigl\{1-g_N(x)\bigr\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)\end{aligned}\tag{F.3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_N(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\bigl\{1-g_N(x)\bigr\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\end{aligned}\tag{F.4}$$

と書けることに注意する．(F.3) と (F.4) の右辺の 2 項目を評価すると

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\bigl\{1-g_N(x)\bigr\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)\\&\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bigl\{1-g_N(x)\bigr\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)\\&\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|\left\{1-\liminf_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_N(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_n(x)\right\}\\&=\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|\left\{1-\int_{-\infty}^{\infty}g_N(x)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right\}\\&=\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|\bigl\{1-\mathsf{P}\bigl([-N,\,N]\bigr)\bigr\}\\&=\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|\mathsf{P}\bigl([-N,\,N]^c\bigr)\end{aligned}\tag{F.5}$$

を得る．同様にすると

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\bigl\{1-g_N(x)\bigr\}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\le\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathsf{P}\bigl([-N,\,N]^c\bigr)\tag{F.6}$$

を得る. (F.3) – (F.6) を合わせると

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{dP}_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{dP}(x)\right|\\
&\quad\le \limsup_{n\to\infty}\left|\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{dP}_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{dP}(x)\right)\right.\\
&\qquad\left.+\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\{1-g_N(x)\}\,\mathrm{dP}_n(x)+\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\{1-g_N(x)\}\,\mathrm{dP}(x)\right|\\
&\quad\le \limsup_{n\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{dP}_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{dP}(x)\right|+2\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|\mathsf{P}\big([-N,\,N]^c\big)\\
&\quad\longrightarrow 0\,(N\to\infty)
\end{aligned}
$$

となるので, (4) を示せた.
(4) $\Longrightarrow$ (1): $a<b$ に対して

$$
h_{a,b}=\begin{cases}1 & (x\le a)\\ \dfrac{b-x}{b-a} & (a<x\le b)\\ 0 & (x\ge b)\end{cases}
$$

とおくと

$$
\mathbb{1}_{(-\infty,\,a]}(x)\le h_{a,b}(x)\le \mathbb{1}_{(-\infty,\,b]}(x)
$$

となる. 辺々を P_n と P で積分すると

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{(-\infty,\,a]}(x)\,\mathrm{dP}(x)\le\int_{-\infty}^{\infty}h_{a,b}(x)\,\mathrm{dP}(x)\le=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{(-\infty,\,b]}(x)\,\mathrm{dP}(x)\\
&=\mathsf{F}(b)
\end{aligned}\tag{F.7}
$$

を得る. よって

$$
\limsup_{n\to\infty}\mathsf{F}_n(a)\le\lim_{n\to\infty}h_{a,b}(x)\,\mathrm{dP}_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h_{a,b}(x)\,\mathrm{dP}(x)
$$

となる. 上式と (F.7) と合わせると

$$
\limsup_{n\to\infty}\mathsf{F}_n(a)\le\mathsf{F}(b)
$$

が任意の $a<b$ に成り立つことがわかる. b を右から a に近づけると

$$
\limsup_{n\to\infty}\mathsf{F}_n(a)\le\mathsf{F}(a+0)
$$

を得る. 同様に

$$
\liminf_{n\to\infty}\mathsf{F}_n(b)\ge\lim_{n\to\infty}h_{a,b}(x)\,\mathrm{dP}_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h_{a,b}(x)\,\mathrm{dP}(x)\ge\mathsf{F}(a)
$$

となるので

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(b) \geq \mathsf{F}(b-0)$$

を得る. $a<b$ は任意だったので, a と b を x とすると

$$\mathsf{F}(x-0) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \leq \mathsf{F}(x+0) \tag{F.8}$$

を得る. F の連続点 x では $\mathsf{F}(x-0) = \mathsf{F}(x+0)$ となるので (F.8) の式は等号で成立することがわかる. よって (1) が示せた.

F.3.2 Glivenko の定理の証明の準備

定義 F.15. $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ 上の分布族 $\{\mathsf{P}_\lambda;\, \lambda \in \Lambda\}$ が**タイト** (tight) であるとは, $\forall > 0$ に対して次をみたすような $M>0$ が存在することである.

$$\mathsf{P}_\lambda\big([-M,\, M]^c\big) < \epsilon \qquad (\forall \lambda \in \Lambda). \tag{F.9}$$

注意 F.16. (F.9) は

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{P}_\lambda\big([-M,\, M]^c\big) = 0 \tag{F.10}$$

と書き直すことができる. 特に $\{\mathsf{P}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が列 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のとき

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n\big([-M,\, M]^c\big) = 0 \tag{F.11}$$

と同値となる. 実際 (F.10 から (F.11) は明らかなので, 逆を示す. $\forall\epsilon>0$ と各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\mathsf{P}_n\big([-M_n,\, M_n]^c\big) < \epsilon$$

となる $M_n > 0$ が存在する. タイトであるとは M_n が n に依存せずに取れることである. したがって $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であることを示せばよい. (F.10) よりある $M_0 > 0$ が存在して

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n\big([-M_0,\, M_0]^c\big) < \frac{\epsilon}{2}$$

とできる. さらに数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \sup_n a_n$ が成立することに注意するとある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sup_{n\geq n_0} \mathsf{P}_n\big([-M_0,\, M_0]\big)$$

となる. よって $n \geq n_0$ に対しては M_n を M_0 と取ると

$$\sup_n M_m = \max\{M_1,\, M_2,\, \ldots,\, M_{n_0},\, M_0\}$$

となり, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界となることがわかる. □

定理 F.17. ($\overset{\text{ヘリー}}{\text{Helly}}$ の定理) 分布列 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はタイトし, P_n の分布関数を F_n とする. するとある部分列 $\{\mathsf{F}_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と分布 F が存在して

$$\mathsf{F}_{n(k)} \rightsquigarrow \mathsf{F}\,(k\to\infty)$$

となる.

Proof. Bass (2011, pp.369–370) を参照. □

補題 F.18. φ を $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ 上の分布 P の特性関数とする. このとき $\forall M>0$ に対して $\epsilon = 2/M$ とおくと

$$\mathsf{P}\big([-M,\, M]^c\big) \le \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\{1-\varphi(t)\}\,\mathrm{d}t$$

が成り立つ.

Proof. 特性関数 φ の定義から

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right\}\mathrm{d}t$$

と書ける. Fubini の定理を適用すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}tx}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\right\}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{\sqrt{-1}tx}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&= \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{\sqrt{-1}tx}}{\sqrt{-1}x}\right]_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&= \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{-1}\epsilon x}-e^{-\sqrt{-1}\epsilon x}}{\sqrt{-1}x}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&= \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\epsilon x+\sqrt{-1}\sin\epsilon x-\big(\cos\epsilon x-\sqrt{-1}\sin\epsilon x\big)}{\sqrt{-1}x}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\epsilon x}{\epsilon x}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)
\end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-\varphi(t)\}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\epsilon x}{\epsilon x}\right)\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&\ge \int_{|\epsilon x|>2}\left(1-\frac{\sin\epsilon x}{\epsilon x}\right)\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&> \int_{|\epsilon x|>2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\mathsf{P}(x)\\
&= \frac{1}{2}\mathsf{P}\left(\left[-\frac{2}{\epsilon},\, \frac{2}{\epsilon}\right]^c\right)
\end{aligned}$$

を得る．最後の不等式は $|y| > 2$ のとき

$$\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq \left|\frac{1}{y}\right| < \frac{1}{2}$$

であることよりわかる． □

補題 F.19. 分布列 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が分布 P に弱収束するための必要十分条件は次の条件 (1) と (2) がともに成立することである．
(1) $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は相対コンパクトである．
(2) 任意の部分列 $\{\mathsf{P}_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限分布は P に限る．

Proof. P_n が P に弱収束していれば, (1) と (2) は成り立つのは明らかなので, 逆を示す．そのために P_n が P に弱収束していても (1) が成り立っていたら, (2) が不成立であることを示せばよい．F_n と F を P_n と P の分布関数とする．P_n が P に弱収束していないとき

$$\left|\mathsf{F}_{n(k)}(x_0) - \mathsf{F}(x_0)\right| > \epsilon \tag{F.12}$$

となる $\epsilon > 0$ と F の連続点 x_0 および部分列 $1 \leq n(1) < n(2) < \cdots$ があることである．このとき (1) が成り立っているので, さらなる部分列 $\{\mathsf{F}_{n(k(\ell))}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ と分布関数 P^* をうまく選ぶと

$$\mathsf{P}_{n(k(\ell))} \rightsquigarrow \mathsf{P}^* \, (\ell \to \infty)$$

となる．この P^* は P と異なる．なぜならば, もし $\mathsf{P} = \mathsf{P}^*$ ならば $\mathsf{F}_{n(k(\ell))}(x_0) \xrightarrow{\ell\to\infty} \mathsf{F}(x_0)$ となるので, (F.12) と矛盾するので, $\mathsf{P} \neq \mathsf{P}^*$ であることがわかる．よって (2) は成立しない．これで補題の題意は示せた．
□

F.3.3 Glivenko の定理の証明

補題 F.19(1)(2) を示せばよい．そのために $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がタイトであることを示す．すると Helly の定理から (1) が成立することがわかる．また (2) は明らかである．
<u>$\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **がタイトであることの証明**</u>: 補題 F.18 から

$$\mathsf{P}_n\big([-M,\, M]^c\big) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\{1 - \varphi(t)_n\}\,\mathrm{d}t, \qquad \left(\epsilon = \frac{2}{M}\right)$$

である．仮定 $\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(t)$ と Fatou の補題から

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n\big([-M,\, M]^c\big) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\{1 - \varphi(t)\}\,\mathrm{d}t$$

が成り立つ. $M \to \infty$ のとき $\epsilon \to 0$ と定理 F.3(1) に注意すると

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}_n\big([-M,\ M]^c\big) \leq \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\{1-\varphi(t)\}\,\mathrm{d}t\right\} = 2 - 2\varphi(0) = 0$$

となり, $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はタイトである. □

F.4 章末注釈と参考文献