

# 第G章 大数の強法則と中心極限定理の証明

## G.1 大数の強法則の証明

### G.1.1 Borel-Cantelli の補題

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  を確率空間とする.  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  を  $\Omega$  の部分集合列とする. このとき

$$\begin{aligned}\limsup A_n &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \\ \liminf A_n &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,\end{aligned}$$

と定める. これを

$$\limsup A_n := \{\omega \in \Omega; \omega \in A_n, \text{ i.o.}\} = \{A_n, \text{ i.o.}\}$$

とも書くことにする. また

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n$$

となることに注意する. . . なぜならば  $\omega \in \liminf A_n$  ならば, ある  $n_0 \in \mathbb{N}$  が存在して  $\omega \in \bigcap_{m=n_0}^{\infty} A_m$  となるので,  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$  である. よって  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$  がわかる.

また

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$$

となる. さらに  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$  のとき, Fatou の補題より

$$\begin{aligned}\Pr\left(\liminf A_n\right) &= \int \mathbb{1}_{\liminf A_n}(x) \, d\Pr(x) \\ &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) \, d\Pr(x) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{A_n}(x) \, d\Pr(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n)\end{aligned}$$

となる.

補題 G.1. (Borel-Cantelli の第 1 補題)  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) < \infty \Rightarrow \Pr(A_n, \text{i.o.}) = 0.$$

*Proof.*  $N(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$  ( $\omega \in \Omega$ ) と定める. 単調収束定理から

$$E[N] = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) d\Pr(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}(\omega) d\Pr(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) < \infty$$

となる. よって  $\Pr(N < \infty) = 1$  がわかる. したがって  $\Pr(A_n, \text{i.o.}) = 0$  がわかる.  $\square$

定理 G.2.  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $X$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  上の確率変数列とする. このとき次の 2 つの条件は同値である.

- (1)  $X_n \xrightarrow{P} X$ .
- (2)  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  の任意の部分列  $\{X_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$  に対して, さらなる部分列  $\{X_{n(k(\ell))}\}_{\ell=1}^\infty$  が存在して  $X_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$  ( $\ell \rightarrow \infty$ ) となる. すなわち

$$\Pr\left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} X_{n(k(\ell))} = X\right) = 1.$$

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) の証明:  $\{\epsilon(\ell)\}_{\ell=1}^\infty$  は正の実数列で  $\epsilon(\ell) \downarrow 0$  ( $\ell \rightarrow \infty$ ) とする.  $X_n \xrightarrow{P} X$  から, 各  $\ell \geq 2$  に対して  $n(k(\ell)) > n(k(\ell-1))$  が存在して

$$\Pr\left(|X_{n(k(\ell))} - X| > \epsilon(\ell)\right) \leq \frac{1}{2^\ell}$$

とできる. これより

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \Pr\left(|X_{n(k(\ell))} - X| > \epsilon(\ell)\right) < \infty$$

となるので, Borel-Cantelli の第 1 の補題から

$$\Pr\left(|X_{n(k(\ell))} - X| > \epsilon(\ell), \text{i.o.}\right) = 0.$$

すなわち

$$\Pr\left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} X_{n(k(\ell))} = X\right) = 1$$

がわかる (詳細な議論は注意 G.3 を参照のこと).

(2)  $\Rightarrow$  (1) の証明:  $\forall \delta > 0$  に対して

$$y_n := \Pr(|X_n - X| > \delta)$$

とおく. すると任意の  $\{y_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$  に対して部分列  $\{y_{n(k(\ell))}\}_{\ell=1}^\infty$  が存在して

$$y_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$$

となる<sup>1</sup>. このことと命題 B.5 から  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  がわかる. □

注意 G.3. 事象  $\{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$  は以下のように書きかえることができる.  $\forall \epsilon > 0$  に対して, ある整数  $n := n(\epsilon, \omega) \geq 1$  が存在して,  $\forall m \geq 1 (m \in \mathbb{N})$  に対して

$$|X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < \epsilon \tag{G.1}$$

を意味する. さらに (G.1) が成立することは,  $\forall \epsilon > 0$  に対して, ある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して,  $\forall m \geq 1 (m \in \mathbb{N})$  に対して

$$\omega \in \{\omega \in \Omega; |X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} \tag{G.2}$$

と同値である. これは  $\forall \epsilon > 0$  に対して

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty \{\omega \in \Omega; |X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} \tag{G.3}$$

を意味する. さらに  $\forall \epsilon > 0$  に対して

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty \left\{ \omega \in \Omega; |X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}$$

と同値である. 以上から

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \\ &= \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty \left\{ \omega \in \Omega; |X_{n+m}(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

を得る. □

---

<sup>1</sup>なぜならば  $X_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\text{a.s.}} X (\ell \rightarrow \infty)$  なので.

### G.1.2 大数の強法則の証明

定理 G.4.  $X_1, X_2, \dots$  は対独立な確率変数列で各  $X_n (n \in \mathbb{N})$  は同じ分布に従い,  $E[|X_n|] < \infty$  とする.  $E[X_n] =: \mu$  と  $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$  とおく. このとき

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立する.

大数の強法則を証明するための補題を 2 つ述べる.

補題 G.5.  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}}$  とし,

$$T_n := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \tag{G.4}$$

とする. このとき

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$$

が成立する.

*Proof.*  $Y_n$  の定義から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n| > n) \leq \int_0^{\infty} \Pr(|X_1| > t) dt = E[|X_1|] < \infty$$

となる. よって Borel-Cantelli の第 1 の補題から

$$\Pr\left(X_n \neq Y_n, \text{ i.o.}\right) = 0$$

がわかる. すると  $\omega \in \Omega$  に対して有限個の  $n$  に対して  $X_n \neq Y_n$  なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(\omega) - T_n(\omega)| = 0$$

となる. よって定理の主張は証明された. □

補題 G.6. 定理 G.4 と補題 G.5 の仮定のもと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} \leq 4E[|X_1|] < \infty$$

が成立する.

*Proof.* Fubini の定理を用いると

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_n] &\leq E[Y_n^2] = \int_0^\infty 2t \Pr(|Y_n| > t) dt = \int_0^n 2t \Pr(|Y_n| > t) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{1}\{t < n\} 2t \Pr(|Y_n| > t) dt \end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{E[Y_n^2]}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \int_0^\infty \mathbb{1}\{t < n\} 2t \Pr(|Y_n| > t) dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{1}\{t < n\}}{n^2} \right\} 2t \Pr(|Y_n| > t) dt \end{aligned}$$

となる. 最後の等号は, 各項が非負なので, Fubini の定理を用いることで和と積分の記号の交換が保証されることがわかる. よって後は  $\forall t \geq 0$  に対して

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \leq 4 \tag{G.5}$$

を示せばよい.  $m \geq 2 (m \in \mathbb{N})$  に対して

$$\sum_{n \geq m} \frac{1}{n^2} \leq \int_{m-1}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{m-1}$$

となる.  $t \geq 1$  のとき, (G.5) の和は  $n = [t] + 1 \geq 2$  で始まるので

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2t}{[t]} \leq 4 \tag{G.6}$$

となる<sup>2</sup>.  $0 \leq t \leq 1$  の場合

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \leq 2 \left( 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} \right) \leq 4 \tag{G.7}$$

となる. よって (G.6), (G.7) から (G.5) がわかる. □

定理 G.4 の証明:  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$X_n^+ := \max\{X_n, 0\}, \quad X_n^- := \max\{-X_n, 0\}$$

---

<sup>2</sup>なぜならば

$$\frac{t}{[t]} \leq 2 \quad (t \geq 1)$$

であることからわかる.

とおくと  $X_n^+$  と  $X_n^-$  は定理 G.4 の仮定をみたし,  $X_n = X_n^+ - X_n^-$  である. したがって一般性を失うことなく  $X_n \geq 0 (n \in \mathbb{N})$  と仮定してよい.

$\alpha > 1$  をとり

$$k(n) = [\alpha^n]$$

と定める.  $\forall \epsilon > 0$  を取る. Chebyshev の不等式から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(|T_{k(n)} - E[T_{k(n)}]| > \epsilon k(n)\right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}[T_{k(n)}]}{\{k(n)\}^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{k(n)\}^2} \sum_{m=1}^{k(n)} \text{Var}[Y_m] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \text{V}[Y_m] \sum_{n: k(n) \geq m} \frac{1}{\{k(n)\}^2} \end{aligned} \tag{G.8}$$

を得る. 最後の等号は, すべての項が非負なので Fubini の定理を用いて和の順番を交換した.  $n \geq 1$  に対して

$$k(n) = [\alpha^n] \quad \text{かつ} \quad [\alpha^n] \geq \frac{\alpha^n}{2}$$

なので

$$\sum_{n: \alpha^n \geq m} \frac{1}{[\alpha^n]^2} \leq 4 \sum_{n: \alpha^n \geq m} \frac{1}{\alpha^{2n}} \leq \frac{4}{(1 - \alpha^{-2})m^2} \tag{G.9}$$

となる. (G.8) と (G.9) を合わせると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(|T_{k(n)} - E[T_{k(n)}]| > \epsilon k(n)\right) &\leq \frac{4}{(1 - \alpha^{-2})\epsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E[Y_m^2]}{m^2} \\ &< \infty \quad (\because \text{補題 G.6}) \end{aligned}$$

となる.  $\epsilon$  は任意だったので

$$\frac{T_{k(n)} - E[T_{k(n)}]}{k(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

を得る. 有界収束定理から

$$E[Y_k] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X_1]$$

である. よって

$$\frac{E[T_{k(n)}]}{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X_1]$$

を得る. これより

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X_1] \quad (n \rightarrow \infty)$$

がわかる.  $Y_n \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N})$  なので,  $k(n) \leq m < k(n+1) (m \in \mathbb{N})$  に対して

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n+1)} \leq \frac{T_m}{m} \leq \frac{T_{k(n+1)}}{k(n)}$$

である.  $k(n) = [\alpha^n]$  だったので,

$$\frac{k(n+1)}{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

である. よって

$$\frac{1}{\alpha} E[X_1] \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{m} \leq \alpha E[X_1]$$

となる.  $\alpha > 1$  は任意だったので

$$\frac{T_m}{m} \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X_1]$$

がわかる. □

## G.2 中心極限定理の証明: Lindeberg の証明

まず  $E[X_1^3] < \infty$  を仮定して証明をする.

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと  $E[Y_1] = 0, E[Y_1^2] = 1, E[|Y_1|^3] < \infty$  となることに注意する.  
 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$  とし

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Y_j, \quad S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j \sim N(0, 1)$$

とおく.

$\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\Pr(S_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pr(S \leq x) \tag{G.10}$$

を示せばよい. ここで

$$g(y) = \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(y) \quad (y \in \mathbb{R})$$

とおくと (G.10) を

$$E[g(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g(S)] \quad (\text{G.11})$$

と書きかえることができる. さらに  $\forall \delta > 0$  に対して関数  $g_{\delta, x} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  を以下のような性質をもつ関数とする.

- $g_{\delta, x}(y) = 1 (y \leq x)$ .
- $g_{\delta, x}(y) = 0 (y \leq x + \delta)$ .
- $g_{\delta, x}$  は有界な 3 次の導関数をもつ. 3 次の導関数の絶対値の上界を  $C$  と書くことにする.

さらに  $g_{\delta, x-\delta}(y) = g_{\delta, x}(y + \delta)$  と定める. すると

$$g_{\delta, x-\delta}(y) \leq g(y) \leq h_{\delta, x}(y), \quad (y \in \mathbb{R})$$

となる. このことから  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} \Pr(S_n \leq x) &= E[g_{\delta, x}(S_n)] \\ &= E[g_{\delta, x}(S_n)] - E[g_{\delta, x}(S)] + E[g_{\delta, x}(S)] \\ &\leq \Pr(Z \leq x + \delta) + |E[g_{\delta, x}(S_n)] - E[g_{\delta, x}(S)]| \end{aligned}$$

を得る. 同様に

$$\Pr(S_n \leq x) \geq \Pr(S \leq x - \delta) - |E[g_{\delta, x-\delta}(S_n)] - E[g_{\delta, x-\delta}(S)]|$$

を得る. これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned} \Pr(S \leq x + \delta) + |E[g_{\delta, x}(S_n)] - E[g_{\delta, x}(S)]| \\ \geq \Pr(S_n \leq x) \\ \geq \Pr(S \leq x - \delta) - |E[g_{\delta, x-\delta}(S_n)] - E[g_{\delta, x-\delta}(S)]| \end{aligned}$$

となる.  $\delta$  を 0 に近づけると  $\Pr(S \leq x \pm \delta)$  は  $\Pr(S \leq x)$  に近づく. したがって

$$E[g_{\delta, x}(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g_{\delta, x}(S)] \quad \text{と} \quad E[g_{\delta, x-\delta}(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g_{\delta, x-\delta}(S)] \quad (\text{G.12})$$

を示せばよい. よって  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  を有界な 3 次の導関数をもつ関数として (G.12) を示す.

$1 \leq m \leq n+1$  に対して

$$T_m = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_m + \cdots + Z_n)$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} |E[h(S_n)] - E[h(S)]| &= \left| \sum_{m=1}^{n+1} \{E[h(T_m)] - E[h(T_{m+1})]\} \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{n+1} n+1 |E[h(T_m) - h(T_{m+1})]| \end{aligned} \quad (G.13)$$

と書きかえる. 次に  $m = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_{m+1} + \cdots + Z_n)$$

とおくと

$$T_m = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_m, \quad T_{m+1} = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_m$$

となる. Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned} h(T_m) - h(U_m) &= (T_m - U_m) \dot{h}(U_m) + \frac{1}{2}(T_m - U_m)^2 \ddot{h}(U_m) \\ &\quad + \frac{1}{6}(T_m - U_m)^3 \overset{\bullet\bullet\bullet}{h}(U_m^*), \end{aligned} \quad (G.14)$$

$$\begin{aligned} h(T_{m+1}) - h(U_m) &= (T_{m+1} - U_m) \dot{h}(U_m) + \frac{1}{2}(T_{m+1} - U_m)^2 \frac{1}{2} \dot{h}(U_m) + \ddot{h}(U_m) \\ &\quad + \frac{1}{6}(T_{m+1} - U_m)^3 \overset{\bullet\bullet\bullet}{h}(U_m^{**}), \end{aligned} \quad (G.15)$$

を得る. ただし  $\dot{h}, \ddot{h}, \overset{\bullet\bullet\bullet}{h}$  は  $h$  の 1 次, 2 次, 3 次の導関数で,  $U_m^*, U_m^{**}$  は  $T_m$  と  $U_m$  の間と  $T_{m+1}$  と  $U_m$  の間の数である.  $U_m$  は  $Y_m$  と  $Z_m$  の両方とも独立であるので

$$\begin{aligned} E[\dot{h}(U_m)Z_m] &= E[\dot{h}(U_m)Y_m] = 0, \\ E[\ddot{h}(U_m)Z_m^2] &= E[\ddot{h}(U_m)] = E[\ddot{h}(U_m)Y_m^2], \\ |E[\overset{\bullet\bullet\bullet}{h}(U_m^*)]| &\leq C, \quad |E[\overset{\bullet\bullet\bullet}{h}(U_m^{**})]| \leq C \end{aligned}$$

となる. 上の期待値と (G.14) と (G.15) を合わせると

$$\begin{aligned} |E[h(T_m) - h(T_{m+1})]| &= |E[h(T_m) - h(U_m) - (h(T_{m+1}) - h(U_m))]| \\ &\leq \left| \frac{C}{6n^{3/2}} E[|Z_m|^3 + |Y_m|^3] \right| \end{aligned}$$

を得る. この式を (G.12) に代入すると

$$\left| E[h(S_n)] - E[h(S)] \right| \leq \frac{C}{6\sqrt{n}} E[|Z_1|^3 + |Y_1|^3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

を得る. よって  $Y_1$  が有界な 3 次の積率をもつとき

$$S_n \rightsquigarrow S \sim N(0, 1)$$

が示せた.

最後に  $E[Y_1^3] < \infty$  の仮定を除くための議論を行う. そのために任意の  $\epsilon > 0$  とし,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\dot{h}(y)| \leq C'$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\ddot{h}(y)| \leq C$  をみたす定数  $C$  をとる.  $m = 1, 2, \dots, n$  に対して,  $|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}$  のとき

$$\begin{aligned} & \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq C \left| \frac{\ddot{h}(U_m^*)Y_m^3}{6n^{3/2}} \right| \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \frac{C\epsilon}{6n} Y_m^2 \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} \end{aligned}$$

となる. 一方  $|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}$  のとき

$$\begin{aligned} & \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \left\{ \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} \right| + \left| \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \right\} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \left\{ \left| \frac{\ddot{h}(U_m^{***})Y_m^2}{2n} \right| + \left| \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \right\} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \frac{C'Y_m^2}{n} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \end{aligned}$$

となる. ただし  $U_m^{***}$  は  $T_m$  と  $U_m$  の間にあるものである. これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned} & \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \\ & \leq \frac{C\epsilon}{6n} Y_m^2 \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} + \frac{C'Y_m^2}{n} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \end{aligned}$$

をなる. この式と (G.15) を合わせると

$$\begin{aligned} |E[h(S_n)] - E[h(S)]| &\leq \frac{C}{\sqrt{n}}E[Z_1^3] + \frac{C}{6}\epsilon E[Y_1^2 \mathbf{1}\{|Y_1| \leq \epsilon\sqrt{n}\}] \\ &\quad + C'E[Y_1^2 \{Y_1 > \epsilon\sqrt{n}\}] \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}}E[Z_1^3] + \frac{C\epsilon}{6} + \frac{C'}{6}E[Y_1^2 \{Y_1 > \epsilon\sqrt{n}\}] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{C'}{6}\epsilon \end{aligned}$$

を得る. 上の式で  $\epsilon \rightarrow 0$  とすれば

$$E[h(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[h(S)]$$

が証明できた. □

### G.3 中心極限定理の証明: 特性関数を利用

補題 G.7.  $n \in \mathbb{N}$  とする.  $0$  を含む開区間  $I \subset \mathbb{R}$  で関数  $h$  が  $n$  回連続微分可能であるとき

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} h^{(n)}(t) dt \quad (\text{G.16})$$

が成り立つ. ただし  $h^{(n)}h(x) = \frac{d^n}{dx^n}h(x)$  ( $n \geq 1$ ),  $h^{(0)}(x) = h(x)$  である.

*Proof.* 帰納法で証明する. 微積分の基本定理から

$$h(x) - h(0) = \int_0^x h^{(1)}(t) dt$$

となるので,  $n = 1$  のときは成立する.  $n = k$  のとき (G.16) は成立すると仮定する. すると部分積分の公式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} h^{(k)}(t) dt &= \frac{-1}{k!} \int_0^x \left( \frac{d}{dt}(x-t)^k \right) h^{(k)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{k!} (x-t)^k h^{(k)}(t) \Big|_{t=0}^{t=x} \\ &\quad + \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k h^{(k+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{k!} x^k h^{(k)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k h^{(k+1)}(t) dt \end{aligned}$$

となり,  $n = k + 1$  のときも (G.16) は成立することがわかる. よって補題は証明された. □

補題 G.8.  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して次の不等式が成り立つ.

- (1)  $|e^{\sqrt{-1}x} - 1| \leq |x|.$
- (2)  $|e^{\sqrt{-1}x} - 1 - \sqrt{-1}x| \leq \frac{1}{2}x^2.$
- (3)  $\left|e^{\sqrt{-1}x} - 1 - \sqrt{-1}x - \frac{1}{2}x^2\right| \leq \frac{1}{6}|x|^3.$

*Proof.*  $h(x) = e^{\sqrt{-1}x}$  として補題 G.16 を適用する. あとは  $|e^{\sqrt{-1}x}| \leq 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) に注意すればよい.  $\square$

補題 G.9. 確率変数  $Y$  は  $E[Y] = 0, E[Y^2] = 1$  をみたすとする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( E \left[ e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} \right] - 1 \right) = -\frac{t^2}{2} \quad (-\infty < t < \infty)$$

が成り立つ.

*Proof.* 補題 G.8(3) から

$$\left| e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2 Y^2}{2n} \right| \leq \frac{t^3}{6n^{3/2}} |Y|^3 \quad (G.17)$$

である. つぎに  $\epsilon > 0$  をとる.  $|Y| \leq \epsilon t \sqrt{n}$  のとき, (G.17) の右辺の  $|Y|^3$  は

$$|Y|^3 = |Y|^2 |Y| \leq \epsilon t \sqrt{n} Y^2$$

と評価できるので

$$\begin{aligned} & \left| e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2 Y^2}{2n} \right| \mathbb{1}\{|Y| \leq \epsilon t \sqrt{n}\} \\ & \leq \epsilon \frac{t^4}{6n} |Y|^4 \mathbb{1}\{|Y| \leq \epsilon t \sqrt{n}\} \end{aligned} \quad (G.18)$$

を得る. 一方  $|Y| > \epsilon t \sqrt{n}$  のとき補題 G.8(2) から

$$\begin{aligned} & \left| e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2 Y^2}{2n} \right| \mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t \sqrt{n}\} \\ & \leq \left\{ \left| e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}} \right| + \left| \frac{t^2 Y^2}{2n} \right| \right\} \mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t \sqrt{n}\} \\ & \leq \frac{t^2 Y^2}{n} \mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t \sqrt{n}\} \end{aligned} \quad (G.19)$$

を得る. (G.18) と (G.19) を合わせると

$$\left| e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 - \sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}} + \frac{t^2 Y^2}{2n} \right| \leq \epsilon \frac{t^2}{6n} Y^4 + \frac{t^2 Y^2}{n} \mathbb{1}\{|Y| > \epsilon t \sqrt{n}\}$$

となる.  $E[Y] = 0, E[Y^2] = 1$  を用いると

$$n \left| E \left[ e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right] \right| \leq \epsilon \frac{t^2}{4} + t^2 E[Y^2 \mathbf{1}\{|Y| > \epsilon t \sqrt{n}\}]$$

となる. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left| E \left[ e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right] \right| \leq \epsilon \frac{t^2}{4} \searrow 0 (\epsilon \rightarrow 0)$$

を得る. □

補題 G.10. 確率変数  $Y$  は  $E[Y] = 0, E[Y^2] = 1$  をみたすとする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( E \left[ e^{\sqrt{-1}t \frac{Y}{\sqrt{n}}} \right] \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t^2}{2n} \right)^n = e^{-t^2/2}, \quad (-\infty < t < \infty)$$

が成り立つ.

*Proof.* 笠原 (2010, pp.162-163) を借用. □

中心極限定理の証明:  $j = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}$$

とし

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{X_1 - \mu}{\sigma} + \frac{X_2 - \mu}{\sigma} + \dots + \frac{X_n - \mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$$

とおく. すると補題 G.9 から  $t \in \mathbb{R}$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[e^{\sqrt{-1}t S_n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( E \left[ e^{\sqrt{-1}t \frac{Y_1}{\sqrt{n}}} \right] \right)^n = e^{-t^2/2}$$

を得る. 定理 F.13 から

$$S_n \rightsquigarrow N(0, 1)$$

がわかる. □

## G.4 中心極限定理の証明: Stein の方法による証明

定義 G.11.  $Z \sim N(0, 1)$  と関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $E[|h(Z)|] < \infty$  をみたすとする.

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{E[h(Z)\mathbb{1}_{(-\infty, x]}(Z)] - E[h(Z)]\Pr(Z \leq x)}{\phi(x)} \\ &= e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x \{h(y) - E[h(Z)]\} e^{-y^2/2} dy \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

で定義される関数  $f_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $h$  に付随する Stein 関数 (Stein function) とよぶ. ただし  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  ( $-\infty < x < \infty$ ) である.

補題 G.12.  $Z \sim N(0, 1)$  とし, 関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $E[h(Z)] < \infty$  をみたすとする. さらに関数  $f_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $h$  に付随する Stein 関数とする. 関数  $h$  が連続ならば,  $f_h$  は連続微分可能で  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\dot{f}_h(x) - x f_h(x) = h(x) - E[h(Z)] \quad (\text{G.21})$$

をみたす. ただし  $\dot{f}_h(x) = \frac{d}{dx} f_h(x)$  である.

*Proof.* Libniz の公式と微積分学の基本定理より,  $f_h$  は微分可能である. 実際

$$\begin{aligned} \dot{f}_h(x) &= \frac{d}{dx} \left( e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x \{h(y) - E[h(Z)]\} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= x e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x \{h(y) - E[h(Z)]\} e^{-y^2/2} dy + \{h(x) - E[h(Z)]\} \end{aligned}$$

となることから (G.21) をみたすことがわかる. よって  $f_h$  は連続微分可能となることもわかる.  $\square$

$X$  を任意の確率変数とし, 関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $E[h(Z)] < \infty$  をみたすとする. すると補題 G.12 より

$$\dot{f}_h(X) - X f_h(X) = h(X) - E[h(Z)]$$

となる. 両辺の期待値を  $X$  に関してとると

$$E[\dot{f}_h(X) - X f_h(X)] = E[h(X)] - E[h(Z)]$$

となる. 上の式の絶対値を評価するためには

$$|E[\dot{f}_h(X) - X f_h(X)]|$$

を評価すればよいことがわかる.

補題 G.13.  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ ,  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) とする. このとき以下が成り立つ.

(1)  $x > 0$  に対して

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \leq \frac{1}{x}.$$

(2)  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$-\frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \leq x \leq \frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))}{\phi(x)}.$$

*Proof.* (1) の証明:

$$1 - \Phi(x) = \int_x^\infty \phi(t) dt = \int_x^\infty \left\{ -\frac{\dot{\phi}(t)}{t} \right\} dt \leq -\frac{1}{x} \int_x^\infty \dot{\phi}(t) dt = \frac{\phi(x)}{x}$$

より

$$\frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \leq \frac{1}{x}$$

がわかる.

(2) の証明:  $\forall x > 0$  に対して

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \Leftrightarrow \frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))}{\phi(x)} \geq x$$

となる. 上の式は明らかに  $x \leq 0$  のときも成立する. さらに  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$  と  $\phi(x) = \phi(-x)$  に注意すると

$$\frac{(1+x^2)(1-\Phi(-x))}{\phi(x)} \geq -x \Leftrightarrow \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \geq -x \Leftrightarrow \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \leq x.$$

□

補題 G.14.  $X$  を確率変数とする.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は非減少関数で  $E[|f(X)g(X)|] < \infty$  とする. このとき

$$E[f(X)g(X)] \geq E[f(X)] E[g(X)]$$

が成り立つ.

*Proof.*  $X_1$  と  $X_2$  は  $X$  と同じ分布をもつ独立な確率変数 ( $X$  とも独立) とする.  $f(X_1) - f(X_2)$  と  $g(X_1) - g(X_2)$  は同符号であるので

$$\{f(X_1) - f(X_2)\}\{g(X_1) - g(X_2)\} \geq 0$$

となる.  $X_1, X_2$  に関して期待値をとると

$$E[\{f(X_1) - f(X_2)\}\{g(X_1) - g(X_2)\}] \geq 0$$

なので

$$E[f(X_1)g(X_1)] + E[f(X_2)g(X_2)] = E[f(X_1)g(X_2)] + E[f(X_2)g(X_1)]$$

を得る.  $X_1$  と  $X_2$  は独立に  $X$  と同じ分布に従うので

$$E[f(X_1)g(X_2)] = E[f(X_2)g(X_1)] = E[f(X)]E[g(X)]$$

となる. よって

$$E[f(X)g(X)] \geq E[f(X)]E[g(X)]$$

がわかる. □

補題 G.15.  $Z \sim N(0, 1)$  とする. 関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  はほとんどいたるところで連続微分可能で

$$K := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\dot{h}(x)| \tag{G.22}$$

をみたすものとする. このとき  $E[|h(Z)|] < \infty$  である. さらに  $h$  に付随する Stein 関数  $f_h$  は  $C^2$  級であり

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\ddot{f}_h(x)| \leq 2K \tag{G.23}$$

となる.

*Proof.* 平均値の定理より  $0 < \exists C < \infty$  があって

$$|h(x)| \leq C + K|x|$$

となるので

$$E[|h(Z)|] \leq C + KE[|Z|] < \infty$$

を得る.

つぎに補題 G.12 より  $f_h$  は連続可能微分になることは Lebeague の有界収束定理を (G.20) に適用するとわかる.

最後に (G.23) を3つの段階にわけて証明する.

段階 1:  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$h(x) - E[h(Z)] = \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt - \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\{1 - \Phi(t)\} dt \quad (\text{G.24})$$

が成り立つことを示す. ただし  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$ ,  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$  である. 実際, 部分積分により

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt - \int_x^{\infty} \dot{h}(t)\{1 - \Phi(t)\} dt \\ &= h(t)\Phi(t) \Big|_{-\infty}^x - \int_{-\infty}^x h(t)\phi(t) dt - h(t)\{1 - \Phi(t)\} \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} h(t)\phi(t) dt \\ &= h(x)\Phi(x) + h(x)\{1 - \Phi(x)\} - \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\phi(t) dt \\ &= h(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\phi(t) dt \\ &= h(x) - E[h(Z)] \end{aligned}$$

からわかる.

段階 2:  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$f_h(x) = -\frac{1 - \Phi(x)}{\phi(x)} \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt - \frac{\Phi(x)}{\phi(x)} \int_x^{\infty} \dot{h}(t)\{1 - \Phi(t)\} dt \quad (\text{G.25})$$

が成り立つ. 実際, 部分積分の公式から

$$\begin{aligned} f_h(x) &= e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x \{h(t) - E[h(Z)]\} e^{-t^2/2} dt \\ &= e^{x^2/2} \left[ \{h(t) - E[h(Z)]\} \int_{-\infty}^t e^{-y^2/2} dy \Big|_{-\infty}^x \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^x \dot{h}(t) \left\{ \int_{-\infty}^t e^{-y^2/2} dy \right\} dt \right] \\ &= \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \left[ \{h(x) - E[h(Z)]\} \Phi(x) - \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt \right] \quad (\text{G.26}) \end{aligned}$$

を得る. (G.24) を (G.26) に代入すると

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \sqrt{2\pi}e^{x^2/2} \left\{ \left( \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\{1-\Phi(t)\} dt \right) \Phi(x) - \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\phi(x)} \left\{ \{\Phi(x) - 1\} \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt - \Phi(x) \int_x^{\infty} \dot{h}(t)\{1-\Phi(t)\} dt \right\} \end{aligned}$$

を得る. よって (G.25) は示された.

段階 3: (G.21) から

$$\begin{aligned} \ddot{f}_h(x) &= f_h(x) + x \dot{f}_h(x) + \dot{h}(x) \\ &= (1+x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \mathbb{E}[h(Z)]\} + \dot{h}(x) \end{aligned}$$

を得る. (G.24) – (G.25) から

$$\begin{aligned} &(1+x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \mathbb{E}[h(Z)]\} \\ &= -\frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))}{\phi(x)} \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt - \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} \int_x^{\infty} \dot{h}(t)\{1-\Phi(t)\} dt \\ &\quad + x \int_{-\infty}^x \dot{h}(t)\Phi(t) dt - x \int_x^{\infty} \dot{h}(t)\{1-\Phi(t)\} dt \end{aligned}$$

と書ける. 補題 G.13(2) から

$$\frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))}{\phi(x)} - x \geq 0, \quad \text{と} \quad \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} + x \geq 0$$

となるので

$$\begin{aligned} &\left| (1+x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \mathbb{E}[h(Z)]\} \right| \\ &\leq K \left\{ \frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))}{\phi(x)} - x \right\} \int_{-\infty}^x \Phi(t) dt \\ &\quad + K \left\{ \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} + x \right\} \int_x^{\infty} \{1-\Phi(t)\} dt \quad (\text{G.27}) \end{aligned}$$

を得る. 再度, 部分積分の公式から

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \Phi(t) dt &= x\Phi(x) - \int_{-\infty}^x t\phi(t) dt = x\Phi(x) + \int_{-\infty}^x \dot{\phi}(t) dt = x\Phi(x) + \phi(x), \\ \int_x^{\infty} \{1-\Phi(t)\} dt &= -x\{1-\Phi(x)\} + \int_x^{\infty} t\phi(t) dt = -x\{1-\Phi(x)\} - \int_x^{\infty} \dot{\phi}(t) dt \\ &= -x\{1-\Phi(x)\} + \phi(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. これらの式を (G.27) に代入して整理すると

$$\begin{aligned}
 & \left| (1+x^2)f_h(x) + x\{h(x) - E[h(Z)]\} \right| \\
 & \leq K \left\{ \frac{(1+x^2)x(1-\Phi(x))}{\phi(x)} - x \right\} \{x\Phi(x) + \phi(x)\} \\
 & \quad + K \left\{ \frac{(1+x^2)\Phi(x)}{\phi(x)} + x \right\} \{-x\{1-\Phi(x)\} + \phi(x)\} \\
 & = K \left\{ \frac{(1+x^2)(1-\Phi(x))\Phi(x)}{\phi(x)} + (1+x^2)(1-\Phi(x)) - x^2\Phi(x) - x\phi(x) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(1+x^2)x(1-\Phi(x))\Phi(x)}{\phi(x)} + (1+x^2)\Phi(x) - x^2(1-\Phi(x)) + x\phi(x) \right\} \\
 & = K
 \end{aligned}$$

を得る. この式と (G.22) から

$$\left| \ddot{f}_h(x) \right| \leq \left| \dot{h}(x) \right| + \left| (1+x^2)f_h(x) + x\{h(x) - E[h(Z)]\} \right| \leq 2K$$

を得る. □

ここで与えられた  $\delta > 0$  と  $\forall z \in \mathbb{R}$  に対して

$$h_{\delta,z}(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq z), \\ 0 & (x \geq z + \delta) \\ \frac{\delta + z - x}{\delta} & (\text{その他}) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\text{G.28})$$

と定める. すると

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \dot{h}_{\delta,z}(x) \right| = \frac{1}{\delta}$$

となる. したがって補題 G.13 から

$$\left| \sup_{x \in \mathbb{R}} \ddot{h}_{\delta,z}(x) \right| \leq \frac{2}{\delta}$$

となる. よって  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\left| \dot{h}_{\delta,z}(x) - \dot{h}_{\delta,z}(y) \right| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \left| \ddot{h}_{\delta,z}(t) \right| dt \leq \frac{2}{\delta} |x - y|$$

を得る. □

**定理 G.16.**  $Z \sim N(0, 1)$  と  $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Y_j$  とおく. ただし  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  は互いに独立で  $E[Y_j] = 0, E[Y_j^2] = 1, E[|Y_j|^3] < \infty (j = 1, 2, \dots, n)$  で

ある. このとき

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \Pr(S_n \leq x) - \Pr(Z \leq x) \right| \leq 2 \sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|Y_j|^3]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

が成り立つ.

*Proof.* 定数  $\delta > 0$  と  $\forall z \in \mathbb{R}$  に対して,  $h_{\delta, z}$  は (G.28) で与えられ,

$$f_h(x) := e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x \{h_{\delta, z}(t) - \mathbb{E}[h_{\delta, z}(Z)]\} e^{-t^2/2} dt$$

とおく. このとき  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} \Pr(S_n \leq x) - \Pr(Z \leq x) &= \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z)] + \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z)] - \Pr(Z \leq x) \\ &\leq \left| \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z)] \right| + \Pr(x \leq Z \leq x + \delta) \\ &= \left| \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z)] \right| + \int_x^{x+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \left| \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z)] \right| + \delta \quad (\text{G.29}) \end{aligned}$$

となる.  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\left| \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z)] \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{3}{\delta n^{3/2}} \mathbb{E}[|Y_j|^3] \quad (\text{G.30})$$

を示すことができれば

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|Y_j|^3]} \quad (\text{G.31})$$

として, これを (G.29) – (G.30) に代入して整理すると

$$\Pr(S_n \leq x) - \Pr(Z \leq x) \leq 2 \sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|Y_j|^3]} \quad (\text{G.32})$$

を得る. 同様に

$$\begin{aligned} \Pr(Z \leq x) - \Pr(S_n \leq x) &\leq \Pr(Z \leq x) - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z + \delta)] \\ &\quad + \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z + \delta)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n + \delta)] \\ &\leq \left| \mathbb{E}[h_{\delta, x}(S_n + \delta)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x}(Z + \delta)] \right| \\ &\quad + \int_x^{x+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \left| \mathbb{E}[h_{\delta, x-\delta}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta, x-\delta}(Z)] \right| + \delta \end{aligned}$$

となるので, (G.30) – (G.31) と合わせると

$$\Pr(Z \leq x) - \Pr(S_n \leq x) \leq 2 \sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|Y_j|^3]} \quad (\text{G.33})$$

を得る. (G.32) – (G.33) を合わせると

$$\left| \Pr(S_n \leq x) - \Pr(Z \leq x) \right| \leq 2 \sqrt{\frac{3}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|Y_j|^3]} \quad (\text{G.34})$$

を得る. よって (G.30) を示すことができれば, 定理は証明される.

(G.30) を示すために

$$S_n^{(j)} = S_n - \frac{1}{\sqrt{n}} Y_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

とおき,  $W_j$  は  $Y_j$  と同じ分布をもち, 他のすべてと独立な確率変数とする. すると

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \text{Var}[W_j] = 1$$

と

$$\mathbb{E}[Y_j f_h(S_n^{(j)})] = \mathbb{E}[Y_j] \mathbb{E}[f_h(S_n^{(j)})] = 0$$

となる. すると不等式

$$|S_n - S_n^{(j)} + t| \leq |t| + \frac{1}{\sqrt{n}} |Y_j|$$

と補題 G.13 から

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathbb{E}[h_{\delta,x}(S_n)] - \mathbb{E}[h_{\delta,x}(Z)] \right| = \left| \mathbb{E}[\dot{f}_h(S_n) - S_n f_h(S_n)] \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \left\{ \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} W_j^2 \dot{f}_h(S_n) - \frac{Y_j}{\sqrt{n}} f_h(S_n) \right] + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \frac{Y_j}{\sqrt{n}} f_h(S_n^{(j)}) \right]}_{=0} \right\} \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} W_j^2 \dot{f}_h(S_n) - \frac{Y_j}{\sqrt{n}} \{f_h(S_n) - f_h(S_n^{(j)})\} \right] \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} W_j^2 \dot{f}_h(S_n) - \frac{Y_j}{\sqrt{n}} \int_0^{Y_j/\sqrt{n}} \dot{f}_h(S_n^{(j)} + t) dt \right] \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} W_j \int_0^{W_j/\sqrt{n}} \dot{f}_h(S_n) dt - \frac{W_j}{\sqrt{n}} \int_0^{W_j/\sqrt{n}} \dot{f}_h(S_n^{(j)} + t) dt \right] \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} W_j \int_0^{W_j/\sqrt{n}} \left\{ \dot{f}_h(S_n) - \dot{f}_h(S_n^{(j)} + t) \right\} dt \right] \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} W_j \int_0^{W_j/\sqrt{n}} \left| \dot{f}_h(S_n) - \dot{f}_h(S_n^{(j)} + t) \right| dt \right] \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} |W_j| \int_0^{W_j/\sqrt{n}} \frac{2}{\delta} \left| S_n - (S_n^{(j)} + t) \right| dt \right] \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} |W_j| \int_0^{W_j/\sqrt{n}} \frac{2}{\delta} \left\{ |t| + \frac{1}{\sqrt{n}} |Y_j| \right\} dt \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{|W_j|}{\delta \sqrt{n}} \left\{ \frac{|W_j|^2}{n} + \frac{2}{n} |W_j| |Y_j| \right\} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta n^{3/2}} \left\{ \mathbb{E}[|W_j|^3] + 2\mathbb{E}[|W_j|^2] \mathbb{E}[|Y_j|] \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta n^{3/2}} \left\{ \mathbb{E}[|W_j|^3] + 2\mathbb{E}[|W_j|^2] \mathbb{E}[|W_j|] \right\} \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta n^{3/2}} \left\{ \mathbb{E}[|W_j|^3] + 2\mathbb{E}[|W_j|^3] \right\} \quad (\because \text{補題 G.14 より}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{3}{\delta n^{3/2}} \mathbb{E}[|W_j|^3] \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{3}{\delta n^{3/2}} \mathbb{E}[|Y_j|^3]
 \end{aligned}$$

を得る. よって定理は示された. □

## G.5 Fisher 情報量による証明

清水 (1976, pp.141-145) を借用.

## G.6 Berry-Esseen 定理

## G.7 章末注釈と参考文献