

目次

はじめに

ix

第 I 部 宴の支度編: 確率・確率変数・確率分布・標本分布	1
第 0 章 準備	3
0.1 集合論の言葉使い	3
0.1.1 数の集合	3
0.1.2 集合の記号	3
0.2 写像	5
0.2.1 写像の定義と性質	5
0.2.2 像と逆像	6
0.2.3 合成写像	7
0.3 可算集合・非可算集合・濃度	8
0.4 距離と位相	8
0.4.1 距離空間	8
0.4.2 位相空間	10
0.5 $\mathbb{R}$ の拡張	11
0.6 章末注釈と参考文献	12
第 1 章 確率・確率変数の基本事項	13
1.1 基礎的な確率規則	13
1.2 確率変数	20
1.3 分位点関数	27
1.4 主な 1 次元分布	31
1.4.1 離散型確率変数	31
1.4.2 連続型確率変数	33
1.5 2 次元の分布	34
1.5.1 同時確率関数と確率密度関数	34
1.5.2 周辺分布	35
1.5.3 独立な分布と条件付き分布	36
1.6 多次元分布と i.i.d. 標本	39

1.6.1	重要な多次元分布モデル	40
1.7	正規分布に関連した分布	46
1.7.1	ガンマ分布	46
1.7.2	χ^2 分布	48
1.7.3	F 分布	49
1.7.4	t 分布	51
1.8	章末注釈と参考文献	52
1.9	演習問題	52
第 2 章	期待値の基礎事項	57
2.1	期待値	57
2.2	確率ベクトルの期待値	61
2.3	分散と共分散	62
2.4	条件付き期待値	68
2.5	積率母関数	72
2.6	章末注釈と参考文献	74
2.7	演習問題	75
第 3 章	確率と期待値の不等式	81
3.1	確率に対する不等式	81
3.2	期待値に対する不等式	87
3.3	章末注釈と参考文献	89
3.4	演習問題	89
第 4 章	確率変数列と分布列の収束	91
4.1	確率変数列の収束のタイプ	92
4.2	大数の法則	99
4.3	中心極限定理	103
4.4	デルタ法	105
4.5	定理 4.13, 補題 4.14, 定理 4.7, 4.9, 4.11, 4.23 の証明 . . .	107
4.5.1	定理 4.13 の証明	107
4.5.2	補題 4.14 の証明	110
4.5.3	定理 4.7 の証明	111
4.5.4	定理 4.9 の証明	113
4.5.5	定理 4.11 の証明	115
4.5.6	定理 4.23 の証明	116
4.6	章末注釈と参考文献	117
4.7	演習問題	118

第 II 部	宴編: 統計的推測	121
第 5 章	統計的推測論の枠組み	123
5.1	統計的実験と母数モデル	123
5.2	統計的決定問題	128
5.3	章末注釈と参考文献	132
5.4	演習問題	133
第 6 章	母数モデル	135
6.1	正則母数モデルと Fisher 情報量	135
6.2	指数型分布族	140
6.2.1	1 変数の場合	140
6.3	十分統計量	147
6.4	統計量の最小十分性と完備性	150
6.5	章末注釈と参考文献	153
6.6	演習問題	153
第 7 章	推定	155
7.1	モーメント法	155
7.2	最尤法	157
7.3	不偏推定と情報不等式	161
7.4	章末注釈と参考文献	170
7.5	演習問題	170
第 8 章	検定と信頼区間	175
8.1	仮説検定の考え方	175
8.2	Neyman-Pearson の定理	177
8.3	検定統計量の導出方法	182
8.3.1	単調尤度比	184
8.3.2	t 検定の最適性	184
8.4	様々な検定	184
8.5	様々な検定	184
8.5.1	スコア検定と Wald 検定	184
8.5.2	多重比較と FDR	184
8.6	区間推定の考え方	184
8.7	信頼区間の構成法	185
8.7.1	検定方式の反転	185
8.7.2	枢軸量 (pivotal quantity)	186
8.8	章末注釈と参考文献	187
8.9	演習問題	187

第 9 章	Bayes 的推測	191
9.1	Bayes 的推測の考え方	191
9.2	Bayes 的推測手法	192
9.3	事前分布の選択について	196
9.4	章末注釈と参考文献	196
9.5	演習問題	196
第 10 章	大標本理論	197
10.1	ランダム関数の確率収束	197
10.2	最尤推定量の一致性	205
10.3	最尤推定量の漸近正規性	210
10.4	尤度比検定統計量の漸近分布	213
10.5	EM アルゴリズム: 不完全データに基づく最尤推定値の計算	217
10.6	章末注釈と参考文献	223
10.7	演習問題	223
第 11 章	モデル選択	225
11.1	モデル選択の目標	225
11.2	罰則法: AIC	225
11.3	Bayes モデル選択	225
11.4	交差検証法	225
11.5	章末注釈と参考文献	225
11.6	演習問題	225
第 III 部	宴の始末編: 付録	227
第 A 章	集合と位相の復習	229
A.1	集合の復習	229
A.2	ベクトル空間と線型写像の復習	229
A.3	多変数関数の微分と逆写像定理	233
A.4	連続関数の性質	245
A.5	章末注釈と参考文献	246
第 B 章	数列と級数の収束と関数の性質	247
B.1	数列と級数	247
B.2	Starling の公式	249
B.3	下半連続関数	249
B.4	章末注釈と参考文献	250

第 C 章 測度論	251
C.1 測度の導入	251
C.2 半環と環	259
C.3 Lebeague-Stieltjes 測度	265
C.4 Dynkin システムと Lebeague 測度の一意性	268
C.5 積分の定義	276
C.6 Fubini の定理	285
C.7 絶対連続性と Radon-Nikodym の定理	290
C.7.1 定理 C.70 の証明の主張 (2 – 2) の Bradley (1989) による別証明	298
C.8 Jacobi 変換定理	307
C.9 条件付き期待値: 再訪問	317
C.10 条件付き期待値の性質	321
C.11 Radon-Nikodym の定理と十分統計量	324
C.12 積分と導関数	331
C.13 章末注釈と参考文献	331
第 D 章 凸解析と最適化アルゴリズム	333
D.1 凸関数とその性質	333
D.2 凸集合とその性質	341
D.3 共役凸関数と Young の不等式	351
D.4 非線形最適化と KKT 条件	360
D.5 Lagrange 乗数についてのさらなる議論	363
D.6 変分不等式	368
D.7 凸性と Lagrange 乗数	370
D.8 凸双対性	374
D.8.1 双対問題	374
D.8.2 Slater 条件 (再訪問)	376
D.9 凸双対性 (その 2)	379
D.9.1 Fenchel 双対性	379
D.10 半正定値計画法	383
D.11 最適化アルゴリズム	386
D.11.1 多変数関数の微分	387
D.12 勾配降下法	390
D.12.1 降下方向	390
D.12.2 最急降下方向	391
D.12.3 ステップ幅の選択方法	392
D.13 降下法アルゴリズムの収束	394
D.14 章末注釈と参考文献	395

第 E 章	特異値分解	397
E.1	特異値分解	397
E.2	Moore-Penrose の一般化逆行列	404
E.3	章末注釈と参考文献	406
第 F 章	特性関数と分布の弱収束	407
F.1	特性関数の定義と性質	407
F.2	分布の収束と Glivenko の定理	409
F.3	定理の証明	411
F.3.1	定理 F.11 の証明	411
F.3.2	Glivenko の定理の証明の準備	414
F.3.3	Glivenko の定理の証明	416
F.4	章末注釈と参考文献	417
第 G 章	大数の強法則と中心極限定理の証明	419
G.1	大数の強法則の証明	419
G.1.1	Borel-Cantelli の補題	419
G.1.2	大数の強法則の証明	422
G.2	中心極限定理の証明: Lindeberg の証明	425
G.3	中心極限定理の証明: 特性関数を利用	429
G.4	中心極限定理の証明: Stein の方法による証明	431
G.5	Fisher 情報量による証明	441
G.6	Berry-Esseen 定理	441
G.7	章末注釈と参考文献	441
第 H 章	条件付き期待値, 条件付き確率, Martingale	443
H.1	条件付き期待値	443
H.1.1	条件付き期待値の性質	443
H.1.2	正則条件付き確率	443
H.2	Martingale と概収束	443
H.2.1	再訪問: Radon-Nikodym の微分	443
H.3	Doob の不等式と L^p 収束	443
H.4	2 乗可積分 Martingale	443
H.5	一様可積分性と L^1 収束	443
H.6	reversed Martingale	443
H.7	章末注釈と参考文献	443