立教大学 講義 (2024/09/21)

本日の講義内容

- 講義のガイダンス

- 第1章 確率・確率変数の基本事項
  - 1.1 確率とその基本性質
  - 1.2 確率変数
  - 1.4 主な1次元分布
  - 1.5 2次元分布
  - 1.6 多次元分布とi.i.d.標本

講義のガイダンス

- 日程： 9/21, 10/5, 10/19, 10/26, 12/7, 12/21, 1/18

- 講義ホームページ：

  https://mcm-www.jwu.ac.jp/~konno/stat_rikkyo.html

講義で学ぶこと

統計学……データ解析のための方法を研究する学問（竹村(2020, p. 1)）

- 記述統計学……調査や実験によって得られたデータを整理して解釈を助ける統計的手法についての学問
- 数理統計学……統計的推測の論理を数学的に整理したもの

統計的推測

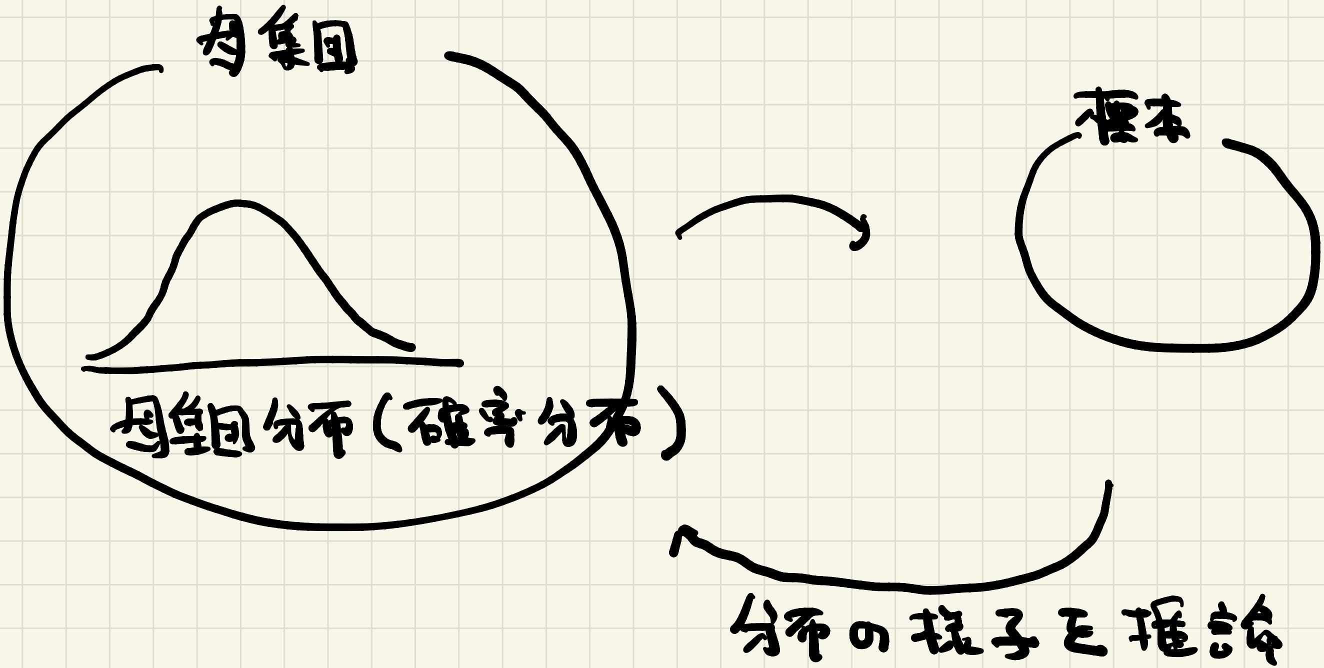
例：新薬の効果

・臨床試験では、治験参加者（モニター）の有効性を調べる（個人差など）

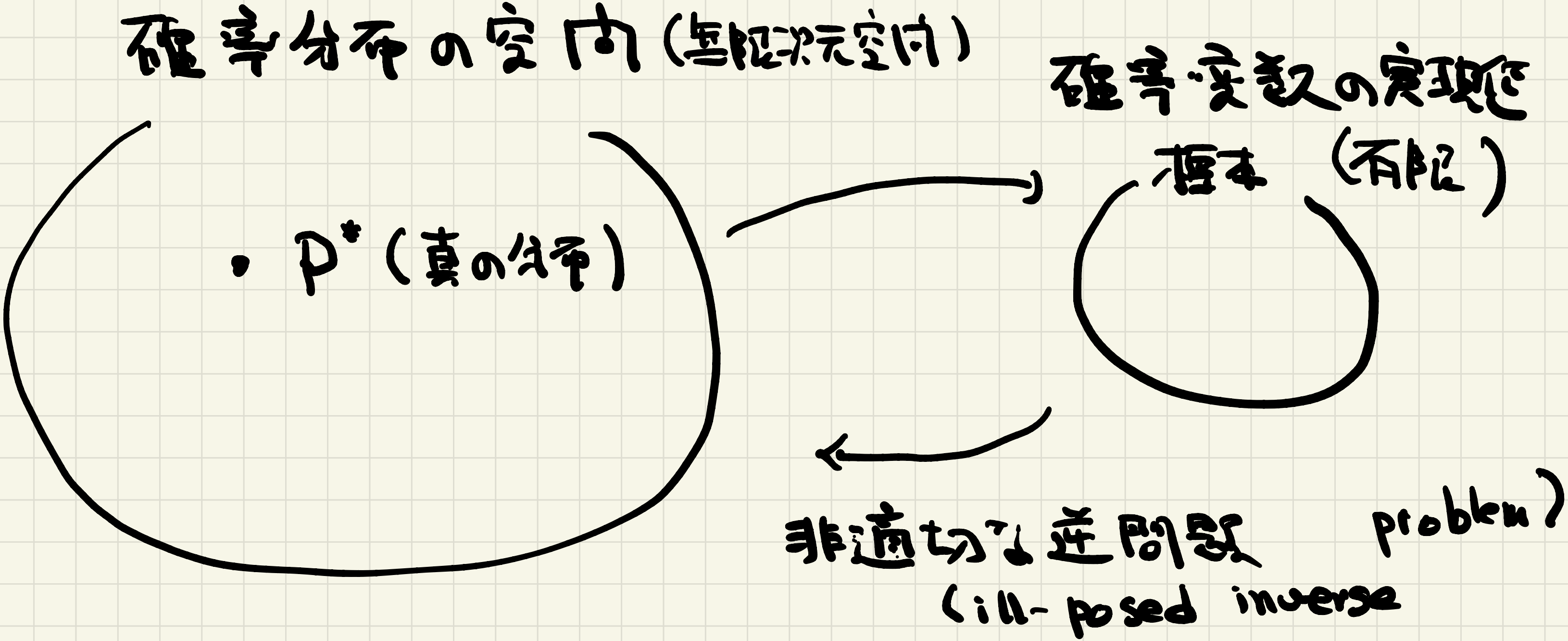
・人への効果を知りたい！

一部を調べて全体の様子を推論する。

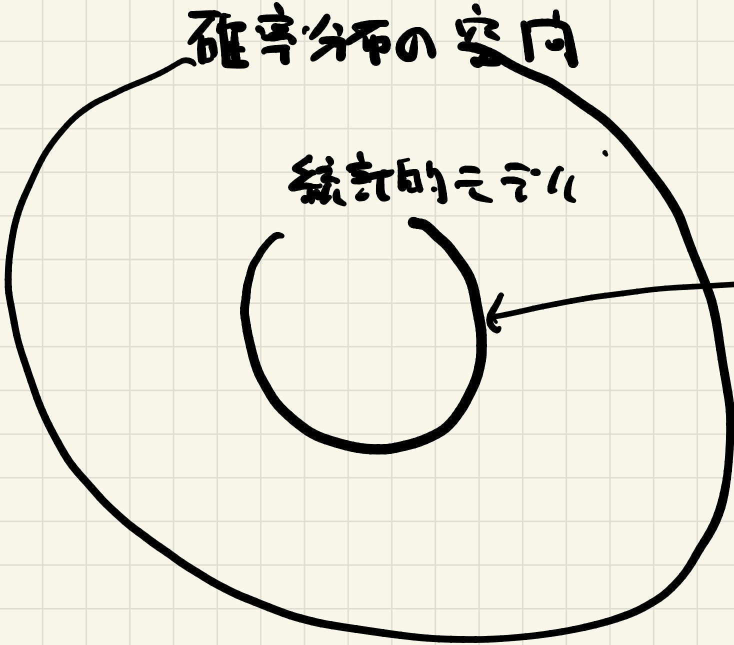
統計的推測の考え方



分布の様子を推測


確率分布の空間（無限次元空間）
・P^*（真の分布）
確率変数の実現値
標本（有限）
非適切な逆問題
(ill-posed inverse problem)

統計的モデル



名札を付ける＝母数

母数の範囲
＝母数空間

P^*(真の分布)を探す ⇔ P^*に対応する母数(真の母数)
をさがす

母数空間

- 有限次元母数空間を持つ統計的モデル
  ⇒ 母数モデル
- 無限次元母数空間を持つ統計的モデル
  ⇒ ノンパラメトリックモデル
  （言葉は変！）

すべての議論を確率論を用いて議論

講義の構成

- 統計的推測論に必要な確率論の準備
- 統計的推論の論理を数学的に整理

注意

確率論 … 順問題
数理統計学 … 逆問題

隣接分野

Data Science, Machine Learning

Pattern Recognition, Signal Processing

Data Mining

Biostatistics, Econometrics, Pychometrics

1.1 確率

試行: 確率論で扱う行為（実験、観測など）

標本空間: 試行のあり得る結果すべての集合（Ω（オメガ）と記す）

例: サイコロを一回投げる. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

事象: Ω の部分集合

事象には Ω と ϕ（空事象）も含める.

事象をすべて集めたものを $\mathcal{A}$ と記す.

定義1.1 Ωを空でない集合とし、$\mathcal{A} \subset \Omega$の部分集合族とする。$\mathcal{A}$が次の3条件をみたすとき、σ加法族という

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(3) $A_n \in \mathcal{A} \ (n=1,2,\dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

ただし、$A^c = \{\omega \in \Omega ; \omega \notin A\} = \Omega \setminus A$.

$(\Omega, \mathcal{A})$を可測空間という

補題 1.2 $(\Omega, \mathcal{A})$を可測空間とする.

このとき, 以下が成立

(1) $\phi \in \mathcal{A}$,

(2) $A_n \in \mathcal{A}\ (n=1,2\ldots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

∵) De Morgenの法則から;

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

$$\left(A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A} \right)$$

注意1.3 $\mathcal{C}$をΩの集合族とする. ただし σ加法族でなくともよい.

$$\sigma[\mathcal{C}] := \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \supset \mathcal{C},\ \mathcal{A}\text{は}\sigma\text{加法族} \}$$

で定める. Ωのべき集合 2^{Ω} はσ加法族なので $\sigma[\mathcal{C}]$は存在する. $\sigma[\mathcal{C}]$は$\mathcal{C}$を含む最小のσ加法族となる.

定義 1.4 $\Omega = \mathbb{R}$ とする.

$$\mathcal{O} = \{ O \subset \mathbb{R} \,;\, O \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合} \}$$

とする. $\mathcal{O}$ は σ 加法性をみたさない!

$\sigma[\mathcal{O}]$ を $\mathbb{R}$ の **Borel 集合族** といい, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と記す. また,

$$\mathcal{C} = \{ (-\infty, x) \subset \mathbb{R} \,;\, x \in \mathbb{R} \}$$

とする. $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{O}$ であるが

$$\sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{O}] \text{ となることが示せる.}$$

定義1.6 $(\Omega, \mathcal{A})$を可測集合とする. $\mathcal{A}$上の関数

$$Pr : \mathcal{A} \ni A \longmapsto Pr(A) \in [0, 1]$$

が次の2条件をみたすとき, Prは$(\Omega, \mathcal{A})$上の**確率測度**とよばれる

(1) $Pr(\Omega) = 1$

(2) $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \dots)$ で $A_n \cap A_m = \phi$ $(n \neq m)$

に対して, $Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(A_n)$.

$(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$を確率空間という.

補題1.7 $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$を確率空間とする.

このとき, 以下の(1)〜(7)が成立.

(1) $P_r(\phi) = 0$,

(2) $A \in \mathcal{A}$に対し, $P_r(A^c) = 1 - P_r(A)$,

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{N} (\subset \mathcal{A})$が互いに排反ならば,

$$P_r\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P_r(A_n).$$

(4) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$

$$\Longrightarrow \Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(A).$$

よって. $A \subset B \Rightarrow \Pr(B) \geq \Pr(A)$

ただし、 $B \setminus A = B \cap A^c$

(5) $A_n \in \mathcal{A}$ が $A_n \subset A_{n+1}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ を

みたすならば

$$\lim_{n \to \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(6) $A_n \supset A_{n+1}$ をみたすとき

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

(7) (Union Bound)

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n)$$

証明は pp. 16 – 18 を参照.

注意　$A, B \in \mathcal{A}$ に対し

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$$

注意　(6) と (7) において

$$Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) と Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

は収束する。しかし、(7) の右辺 $\sum_{n=1}^{\infty} Pr(A_n)$ は $+\infty$

または収束。

定義 1.9 $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ を確率空間とし, $A, B \in \mathcal{A}$.

(1)

A と B は (確率的に) **独立**

$$\Leftrightarrow \quad Pr(A \cap B) = Pr(A)\,Pr(B).$$

(2) $Pr(B) > 0$ のとき, B を与えたときの A の

条件付確率 $Pr(A \mid B)$ を

$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

で定める.

注意 1.10 (1) $A, B \in \mathcal{A}$, $Pr(B) > 0$ とする

$$A と B は独立 \iff Pr(A \mid B) = Pr(A).$$

(2) $Pr(B) > 0$ のとき　乗法の公式

$$Pr(A \cap B) = Pr(B)\,Pr(A \mid B)$$

(3) $Pr(\cdot \mid B) : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ は定義 1.6 (1)−(3) をみたす。よって、$Pr(\cdot \mid B)$ は $(\Omega, \mathcal{A})$ 上の確率測度である。

補題 1.11 (全確率の法則) $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\ldots,N)$ は次をみたすとき, $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ を Ω の分割という

- $m, n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し

$$m \neq n \Rightarrow A_m \cap A_n = \phi$$

- $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \Omega$

このとき, $^\forall B \in \mathcal{A}$ に対して

$$P_r(B) = P_r\left(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{N} P_r(A_n \cap B).$$

定理1.2 (Bayesの定理)

(1) $B \in \mathcal{A}$ とし, $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ は Ω の分割とし. $\Pr(B) > 0$, $\Pr(A_n) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ とする. このとき

$$\Pr(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)\Pr(B \mid A_j)}{\sum_{n=1}^{N} \Pr(A_n)\Pr(B \mid A_n)}$$

$(j = 1, 2, \ldots, N)$

(2) $A, B \in \mathcal{A}$, $\Pr(A) > 0$, $\Pr(B) > 0$ とする.

$$\Pr(A \mid B) \cdot \Pr(B) = \Pr(B \mid A)\Pr(A).$$

例11.13　病気Dに対する簡易検査結果を

+ と − とする.

$$\Pr(+\mid D) = 0.9;\ \Pr(-\mid D^c) = 0.9$$

$$\Pr(B) = 0.01$$

すると

$$\Pr(D\mid +) = \frac{\Pr(D)\Pr(+\mid D)}{\Pr(D)\Pr(+\mid D) + \Pr(D^c)\Pr(+\mid D^c)}$$

$$= \frac{0.01\times 0.9}{0.01\times 0.9 + (1-0.01)\times(1-0.9)} \approx 0.83.$$

1.2 確率変数

$(\Omega, \mathcal{A})$ と $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を可測空間.

定義 1.14 写像 $X : \Omega \to \mathcal{X}$ は $(\Omega, \mathcal{A})$ から $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ への可測写像であるとは, ${}^\forall B \in \mathcal{B}$ に対して

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

をみたすときをいう.

注意 1.15 (1) $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ とし, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ のとき, X は確率ベクトルとよばれる

(2) $d = 1$ のとき, X は確率変数とよばれる

定理 1.16 $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $(\Omega, \mathcal{A})$ を可測空間とし、
$X : \Omega \to \mathcal{X}$ を写像とし、$\mathcal{C}$ を $\mathcal{X}$ の集合族
(σ 加法族でなくてもよい) とする。
$\forall C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in C\} \in \mathcal{A}$$

であり

$$\mathcal{B} = \sigma[\mathcal{C}]$$

のとき、X は可測。

証明　$B\in\mathcal{B}$ に対して，$\{\omega\in\Omega ; X(\omega)\in B\}$ を $\{X\in B\}$ と書くことにする．$B, B_n\in\mathcal{B}$ $(n=1,2,\dots)$ に対して

$$\{X\in\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\in B_n\}$$

$$\{X\in B^c\}=\{X\in B\}^c$$

となる．したがって，

$$\mathcal{D}:=\{B\in\mathcal{B} ; \{X\in B\}\in\mathcal{A}\}\subset\mathcal{B}$$

は σ加法族となる．さらに，定めより，

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$$

となる. $\mathcal{B} = \sigma[\mathcal{C}]$ なので, 最小性より,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \text{ かつ } \mathcal{D} \text{ は } \sigma \text{ 加法族} \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$$

となる. よって, X は確率変数である. $\Box$

注意 1.17 (1) $(X, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ とする

定理 1.16 における集合族 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} = \{ (-\infty, r] ; r \in \mathbb{R} \}$$

と取る. $\mathcal{C}$ は σ加法族ではない. さらに

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{C}]$$

であることが知られている.

$\because$) Dynkin の定理を使い証明する. → 信じること!

(2) $d \geq 2$ とし，$(X, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ とする

$$\mathcal{E} = \{ (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) ; \ -\infty < a_j < b_j < \infty \ (j = 1, \ldots, d) \}$$

とすると

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma[\mathcal{E}]$$

となることが知られている.

重要な事実 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ とする. $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((-\infty, r]) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{A}$$

ならば, X は確率変数である.

定理1.18 $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ を可測空間とする。 $X : \Omega \to \mathcal{X}$, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は可測写像のとき

$$f(X)(\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathcal{Y}$$

も可測.

証明は p.21 を参照.

定理1.19 $n \in \mathbb{N}$とし、$X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ は確率変数とし、$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は可測とする。
このとき、$f(X_1, \ldots, X_n)$ も確率変数

証明 定理1.18から $(X_1, \ldots, X_n)$ は確率ベクトルであることを示せばよい。

$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{\omega \in \Omega ; (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in A_1 \times \cdots \times A_n\}$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} \{ \omega \in \Omega ; X_j(\omega) \in A_j \} \in \mathcal{A}$$

である. さらに, 集合族

$$\mathcal{C} = \{ A_1 \times \cdots \times A_n ; A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ (j=1,\ldots,n) \}$$

とおくと

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma[\mathcal{C}]$$

となる. よって, 定理1.16より $(X_1, \ldots, X_n)$ は

確率ベクトル. ■

定理1.20 $X_1, \dots, X_n$ が確率変数ならば
$X_1 + \cdots + X_n$ も確率変数

証明 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$$

とおいたとき、f は可測であることを示せばよい。

$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$B := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \cdots + x_n < r\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合となるので

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

となる. 集合族 $\mathcal{E} = \{(-\infty, r] : r \in \mathbb{R}\}$ は

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}]$$

となるので, 定理 1.16 より, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は可測.

$(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は可測,

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ も可測

なので, 定理 1.18 より, $f(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ も可測.

∎

注意 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続ならば

$f(X_1, \dots, X_n)$ は確率変数である。

定理1.22 $X_1, X_2, \dots$ は確率変数列とする。

$$\inf_n X_n, \quad \sup_n X_n, \quad \limsup_n X_n, \quad \liminf_n X_n$$

も確率変数

証明 $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega ; \inf_n X_n(\omega) < r\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega ; X_n(\omega) < r\} \in \mathcal{A}$$

である. $\mathcal{E} = \{(-\infty, r) ; r \in \mathbb{R}\}$ としたとき

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}]$$

となるので, $\inf_n X_n$ は確率変数 $\square$

注意1.23

$$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega ;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{は存在}\}$$

$$= \{\omega \in \Omega_n ;\ \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)\}$$

は可測集合。一般には

$$\limsup_{n\to+\infty} X_n(\omega) \geq \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

$$\inf_n \left(\sup_{m\geq n} X_m(\omega)\right) \qquad \sup_n \left(\inf_{m\geq n} X_m(\omega)\right)$$

$\Pr(\Omega_0) = 1$ のとき，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ はほとんど確実に収束するという．$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に値を取る確率変数を X_∞ とかいておき

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \qquad \text{a.s.}$$

とします．

定義 1.24 (1) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して

$$F^X(x) := \Pr(X \leq x) = \Pr(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x\}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を X の累積分布関数 (c.d.f.) という

また,

$$P^X(B) = P_r(X \in B) = P_r(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\})$$

$$(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

を X の分布という。定義より

$$P^X((-\infty, x]) = F^X(x)$$

となる。

(2) X, Y を $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$ 上の確率変数とし、その c.d.f. を F^X, F^Y とかく。このとき

$F^X(x) = F^Y(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ X と Y の分布が同じ

という。

(3) 確率変数 X が c.d.f. F を持つことを

$X \sim F$ と記す。

注意1.26 (1) P^X は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度!

(2) c.d.f. F に対して

$$F(x) = P((-\infty, x]) \quad (x \in \mathbb{R})$$

をみたす $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P は一意的に存在する. すなわち

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

$$F(x) = Q((-\infty, x])$$

すなわち

$$P(B) = Q(B) \qquad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

である.

(3) XとYの分布が同じすなわち

$$P^X(B) = P^Y(B) \qquad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が成立

$$F^X(x) = P_r(X \leq x); \quad P^X(B) = P_r(X \in B)$$
$$F^Y(x) = P_r(Y \leq x); \quad P^Y(B) = P_r(Y \in B)$$

としたとき

$$F^X(x) = F^Y(x) \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow P^X(B) = P^Y(B) \quad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

となる.

重要な事実

Xの分布 P^X を調べる $=$ F^X を調べる.

定理1.27 $X \sim F$ とする. このとき, 以下が成立

(1) $x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{y\to x+0} F(y) = F(x)$. すなわち, 右連続.

証明 (1) $\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \le x\} \subset \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \le y\}$

なので, 補題1.7(4)より

$$F(x) = P_r(\omega \in \Omega ; X(\omega) \le x)$$

$\leq Pr(\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq y) = F(y)$

(3) $A_n = (-\infty, x + \frac{1}{n}]$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく.

すると, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ なので

$$\lim_{n\to\infty} F(x+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} Pr(A_n)$$

$$= Pr(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \quad \because 補題1.7 (c)$$

$$= Pr((-\infty, x])$$

$$= F(x).$$

$\square$

定理1.28　$X \sim F$とする. このとき (1)~(3)は

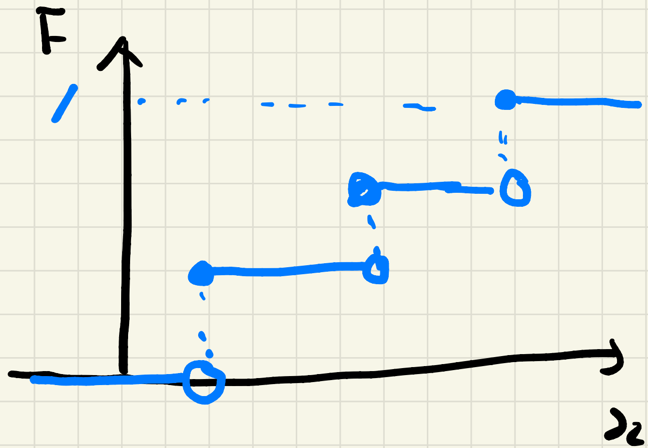
同値

(1) Fは$\mathbb{R}$上で連続

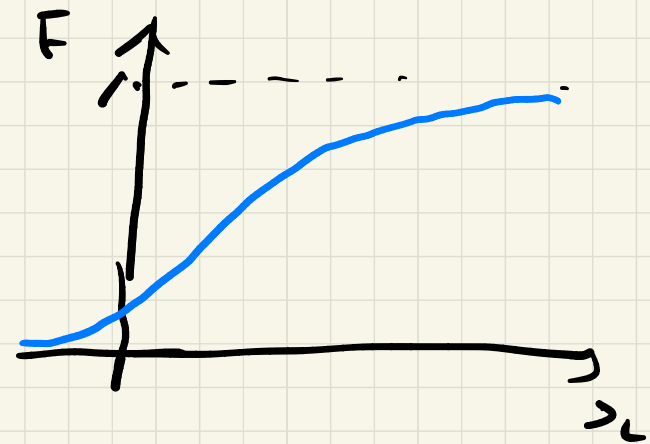
(2) $F(x) = F(x-)$ (左連続)

(3) $\Pr(X = x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

例　Fの例



離散型確率変数



連続型確率変数

$$p(x) := \Pr(X = x) = F(x) - F(x-)$$

$$p(x) = \Pr(X = x) = F(x) - F(x-) = 0$$

p: 確率関数という

(p.m.f.)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

をみたす p が存在すること

p を確率密度関数という

(p.d.f.)

注意1.31　$X \sim P$ とする

(1) X が離散型のとき

$$S := \{x \in \mathbb{R};\ p(x) > 0\}$$

可算集合であることが示せる

とおく　$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(B) = P_r(X \in B) = \sum_{x \in B \cap S} p(x),$$

(2) 連続型のとき

$$P(B) = P_r(X \in B) = \int_B p(x)\,dx$$

例 1.32 (1) $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$$P_r(\{0\}) = P_r(\{1\}) = \frac{1}{2}$$

とし

$$X : \Omega \ni \omega \longmapsto X(\omega) = \omega \in \mathbb{R}$$

と定義する。 X の c.d.f. と p.m.f. は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0, 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1]$

$$:= \{ B \cap [0, 1] \,;\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

とし

$$P_r((a, b]) \quad (0 \leq a < b \leq$$