講義用スライド

2024/10/19

本日の講義内容

- 記号の復習
- 確率と期待値の不等式
- 確率変数列と分布列の収束

記号の復習

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$：確率空間

- $\mathcal{A}$ は σ 加法族
- $\Pr : \mathcal{A} \to [0, 1]$ は確率測度

X は $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall r \in \mathbb{R}$ に対して, $X^{-1}((r, \infty)) \in \mathcal{A}$

注 $X^{-1}((r, \infty)) = \{\omega \in \Omega \,;\, X(\omega) > r\}$

・ X の分布

$$P^X(B) = P_r(\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B) \quad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

・ X の分布関数

$$F^X(x) = P^X((-\infty, x]) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

・ F^X が階段関数 $\Longrightarrow$ X は離散型

$$p^X(x) = F^X(x) - F^X(x-) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

・ F^X が連続関数 $\Longrightarrow$ X は連続型

$$F^X(x) = \int_{-\infty}^{x} p^X(\tau)\, d\tau$$

X の期待値　$E[|X|]<\infty$ のとき

$$E[X]=\begin{cases}\displaystyle\sum_x x\,p^X(x) & (\text{離散型})\\ \displaystyle\int x\,p^X(x)\,dx & (\text{連続型})\end{cases}$$

X の分散　$E[X^2]<\infty$ のとき

$$\begin{aligned}Var[X]&=E\left[(X-E[X])^2\right]\\&=E[X^2]-\{E[X]\}^2\end{aligned}$$

X の m.g.f.

$$m^X(t)=E[e^{tX}]$$

3.1 確率に対する不等式

定理 3.1 $\Pr(X \geq 0) = 1 \Leftrightarrow X$ は非負値確率変数とし、$E[X] < \infty$ とする。このとき、$\forall t > 0$ に対して

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t} \qquad \Leftarrow \min\left\{\frac{E[X]}{t}, 1\right\}$$

証明 X は連続型で p.d.f. p^X を持つ場合。

$$E[X] = \int_0^\infty x\, p^X(x)\, dx$$

6

$$= \underbrace{\int_0^t x\, p^X(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_t^\infty x\, p^X(x)\, dx$$

$$\geq \int_t^\infty x\, p^X(x)\, dx$$

$$\geq t \int_t^\infty p^X(x)\, dx$$

$$= t \Pr(X \geq t)$$

$\square$

系 3.2 $\lambda > 0$ とし, $E[e^{\lambda X}] < \infty$ とする.

このとき, $t > 0$ に対して

$$\Pr(X \geq t) \leq e^{-\lambda t} E[e^{\lambda X}].$$

証明 $\Pr(e^{\lambda X} \geq 0) = 1$ となる. よって

$$P(\boxed{X} \geq \boxed{t}) \leq \frac{E[X]}{t}$$

$$\Pr(X \geq t) = \Pr(\boxed{e^{\lambda X}} \geq \boxed{e^{\lambda t}})$$

$$\leq e^{-\lambda t} E[e^{\lambda X}].$$

□

系 3.3 $\mu := E[X]$, $\sigma^2 = Var[X] < \infty$ とする。

このとき、$\forall t > 0$ に対して

$$Pr(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

証明

$$Pr(|X - \mu| \geq t) = Pr((X - \mu)^2 \geq t^2)$$

$$\leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{t^2} = \frac{Var[X]}{t^2}. \quad \blacksquare$$

3.2 期待値に対する不等式

定理3.10 $E[X^2]<\infty$ かつ $E[Y^2]<\infty$ とする

このとき

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}.$$

証明 $E[X^2]=E[Y^2]=0$ のときは自明なので

$E[X^2]\neq 0$と仮定. いま

$$g(t)=E[\{tX-Y\}^2] \qquad (t\in\mathbb{R})$$

とおく. 期待値の性質より

$$0 \leq g(t) = E[t^2 X^2 - 2tXY + Y^2]$$

$$= E[X^2]\left\{t - \frac{E[XY]}{E[X^2]}\right\}^2 + \frac{E[X^2]E[Y^2] - \{E[XY]\}^2}{E[X^2]}$$

よって

$$g\left(\frac{E[XY]}{E[X^2]}\right) = \frac{E[X^2]E[Y^2] - \{E[XY]\}^2}{E[X^2]} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow E[X^2]E[Y^2] \geq \{E[XY]\}^2.$$

よって. $|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}$

上の式で $x \to |x|$; $y \to |y|$ とすればよい. □

定義 3.11 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は凸

$\Leftrightarrow$ ${}^\forall x, y \in \mathbb{R}$ と $0 \le {}^\forall t \le 1$ に対して

$$g(tx+(1-t)y) \le t\,g(x)+(1-t)\,g(y).$$

注 $a<b$ とし, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ は凸とすると

g は (a,b) で連続であることが証明できる.

注 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, ある $r_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$g(x) \geq r_0(x - x_0) + g(x_0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

となることは g が凸であることと同値.

例 $g(x) = |x|$. $x_0 = 0$ のとき

$$g(x) \geq r_0 x \quad (-1 \leq r_0 \leq r_0)$$

$x_0 > 0$ のとき, $r_0 = 1$; $x_0 < 0$ のとき, $r_0 < -1$.

定理 3.12 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸で，$E[|X|] < \infty$ かつ $E[|g(X)|] < \infty$ とする．このとき

$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

証明 ${}^\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して，ある $r_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$g(x) \geq r\{x - x_0\} + g(x_0) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

となる．$x_0 = E[X]$ と $x = X$ とおくと

$$g(X) \geq r\{X - E[X]\} + g(E[X])$$

両辺の期待値を取ると

$$E[g(X)] \geq E\left[r\{X - E[X]\} + \underbrace{g(E[X])}_{\text{定数}} \right]$$

$$= r \underbrace{E\left[X - E[X]\right]}_{=0} + g(E[X])$$

$$= g(E[X]).$$

4章 確率変数列と分布の収束

復習 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束

$\iff {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

${}^\forall n > N_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$

これを $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ とかくことにする.

すると, $\lim a_n = a$; $\lim b_n = b$ のとき

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \quad \lim b_n$$

$$\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で, $\lim a_n = a$ とすると

$$\lim g(a_n) = g(a).$$

確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数列で, $X_1, X_2, \ldots$ は独立で

$$X_n \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

とする. すると, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\Pr(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{\varepsilon^2} \quad \text{by Chebyschev}$$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

よって

$$\Pr(|X_n| < \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

となる。

$$\Pr(X_n = 0) = 0$$

である。

確率変数列の収束のタイプ

(1) 確率収束　(2) 概収束　(3) 分布収束

$X_1, X_2, \dots$ は $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$ 上の i.i.d. 確率変数とする

(a) 大数の法則　$E[|X_1|] < \infty$ とする．n が大きいとき

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ は $\underset{\substack{\shortparallel \\ \mu}}{E[X_1]}$ のまわりに集中する．

(b) 中心極限定理　$E[X_1^2] < \infty$ とする

n が大きいとき，

$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]}}$ の分布は $N(0,1)$ に近い.

4.1 確率変数の収束のタイプ

定義 4.1 X, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$ 上の確率変数とする.

(1) $\{X_n\}$ は X に**確率収束**

$\Longleftrightarrow$ $^\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_r(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

$X_n \xrightarrow{P} X$ と記す

(2) $\{X_n\}$ は X に 概収束

$$\Longleftrightarrow \quad \Pr\{\omega \in \Omega ; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$$

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ と記す.

(3) $\{X_n\}$ は X に 分布収束

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n \leq x) = \Pr(X \leq x)$$

ただし, x は $x \mapsto \Pr(X \leq x)$ の連続点

$X_n \rightsquigarrow X$ と記す. また, $X \sim N(0,1)$ のとき,

$X_n \rightsquigarrow N(0,1)$ と記すこともある.

定義 4.3 $E[X_n^2]<\infty$ $(n=1,2,\ldots)$ かつ $E[X^2]<\infty$ とする.

$\{X_n\}$ は平均2乗の意味で X に収束

$\iff$ $\lim_{n\to\infty} E[(X_n-X)^2]=0$. $\quad X_n \xrightarrow{q.m.} X$

注意

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \rightsquigarrow X$$

例 4.5 $X_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ とする

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \iff p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$$

反例は注意 4.8 を参照

定理 4.9

$X_n \rightsquigarrow X$

$\Longleftrightarrow$ 任意の有界連続関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[g(X_n)] = E[g(X)].$$

証明は 節 4.5.4 (pp. 113–115) を参照のこと.

定理 4.11 $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$, X, Y は確率変数列とし、

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続、c は定数とする。

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

(4) 上と同じ仮定のもと、$X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$.

(5) $X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow X_n Y_n \rightsquigarrow cX$

(6) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

(7) $X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$.

証明は節 4.5.5 を参照.

<u>(1)の証明</u> $^\forall \varepsilon > 0$を取る. すると

三角不等式

$$|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \leq |X_n-X| + |Y_n-Y|$$

に注意する. $^\forall \varepsilon > 0$を取る.

$$|X_n-X| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ かつ } |Y_n-Y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |(X_n+Y_n)-(X+Y)| \leq \varepsilon$$

となる. これの対偶を取ると

$$|(X_n+Y_n)-(X+Y)| > \varepsilon \Rightarrow |X_n-X| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ または } |Y_n-Y| > \frac{\varepsilon}{2}$$

である．よって

$$\Pr(|(X_n+Y_n)-(X+Y)|>\varepsilon) \leq \Pr\left(\{|X_n-X|>\tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n-Y|>\tfrac{\varepsilon}{2}\}\right)$$

$$\leq \Pr\left(|X_n-X|>\tfrac{\varepsilon}{2}\right)+\Pr\left(|Y_n-Y|>\tfrac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(2)〜(7)は節4.5.5 (pp. 115–116)を参照のこと． □

4.2 大数の法則

定理 4.13（大数の弱法則）. $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とする. $E[|X_1|] < \infty$ のとき,

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \xrightarrow{P} \mu .$$

ただし, $\mu = E[X_1]$.

証明　$E[X_i^2] < \infty$ を仮定した証明を与える。

$Var[X_1] = \sigma^2 < \infty$ とおく。$E[\bar{X}_n] = \mu$ に注意して、Chebyshev の不等式を用いると

$$P_r(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\sigma}{n\varepsilon^2} \qquad \because) \text{ 定理 } 2.13 (2)$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

$E[|X_1|] < \infty$ のみを仮定しての証明の方針

$\forall \delta > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Y_j = \begin{cases} X_j & (|X_j| \leq \delta n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 0 & (|X_j| \leq \delta n) \\ X_j & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおくと

$$X_j = Y_j + Z_j$$

① $\mathrm{Var}[Y_j] \leq \delta n E[|X_1|]$ $(j=1,\dots,n)$

を示す.

よって,

$$\frac{1}{n}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) \xrightarrow{p} E[Y_1]$$

がわかる.

② $E[Y_1] \xrightarrow{n\to\infty} \mu$ を示す.

①と②から

③ $$\Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j - \mu\right| \geq 2\varepsilon\right) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} E[|X_1|]$$

を示す.

④ $$\Pr\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j \neq 0\right) \leq \delta$$ を示す.

⑤ ③と④から;

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right| \geq 4\varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} E[|X_1|] + \delta.$$

$\delta = \varepsilon^3$とおき直せば.

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right| \geq 4\varepsilon\right) \leq \varepsilon E[|X_1|] + \varepsilon^3.$$

詳しい証明は pp. 107 ~ 110 を参照

!

定理 4.15 (大数の強法則) $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数とする. $E[|X_1|] < \infty$ のとき

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

証明 $E[|X_1|^4] < \infty$ を仮定して証明する.

$E[|X_1|] < \infty$ のもとでの証明は 補遺 G を参照のこと.

弱い条件のもとの証明のために, 次の補題を準備する.

補題 4.14 $X_1, X_2, \ldots$ は非負値確率変数で

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$$

をみたすとする. このとき

$$\Pr\left(\omega \in \Omega ; \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty\right) = 1$$

が成り立つ.

証明 背理法で示すために

$$\Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty\right) < 1$$

と仮定する. 簡単のために

$$F := \left\{\omega \in \Omega ; \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\omega) < \infty\right\},$$

$$N := \left\{\omega \in \Omega ; \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\omega) = \infty\right\}$$

とおく. 記号の定義より

$\Omega = F \cup N$ かつ $F \cap N = \emptyset$ である

1になって

$$1 = \Pr(\Omega) = \Pr(F \cup N)$$

$$= \Pr(F) + P(N). \quad \because) \ F \cap N = \emptyset$$

この式から、

$$\Pr(F) < 1 \Rightarrow \Pr(N) > 0 \qquad (a)$$

がわかる。

$$\omega \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) = \infty$$

$$\omega \in N^c \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty$$

なので、$^\forall r \geq 0$ に対して

$$r\,\mathbb{I}_N(\omega) \leq \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \quad (^\forall \omega \in \Omega) \qquad (4.17)$$

$\because)$

	$r\,\mathbb{I}_N(\omega)$	$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$
$\omega \in N$	r	∞
$\omega \in N^c$	0	0以上

(4.17)の両辺の期待値を取ると

$$r \times P_r(N) = r\,E[\mathbb{I}_N] = E[r\,\mathbb{I}_N]$$

$$\leq E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$$

$\Pr(X_n \geq 0) = 1$

(a)を思い出すと $\Pr(N) > 0$ であって、

r は任意であったので、$r \to \infty$ とすると

$$r \Pr(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$$

$$\downarrow r \to \infty$$

$$\infty$$

となり、矛盾。よって、補題は証明された。 □

$E[|X_1|^4] < \infty$ のもとでの定理4.5の証明

$E[|X_1|^4] =: K < \infty$,

$T_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$; $\bar{X}_n = \frac{T_n}{n}$

とおく.

まず, $E[X_1] = \mu = 0$ と仮定して証明する.

数列の収束から

$\{\omega \in \Omega ; \sum_{n=1}^{\infty} \{\bar{X}_n(\omega)\}^4 < \infty \}$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega \,;\, \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n(\omega) = 0 \right\}.$$

が成り立つ. このことから

$$\Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n^4 < \infty \right) = 1 \qquad (4.4)$$

がわかると

$$1 = \Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n^4 < \infty \right) \leq \Pr\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0 \right).$$

$\mu = 0$ のとき

$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} 0$ がわかる.

(4.4) の証明

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^4$$

$$= \sum_{\substack{l_1 + \cdots + l_n = 4 \\ l_j \geq 0 \, (j=1,\ldots,n)}} \frac{4!}{l_1! \, l_2! \times \cdots \times l_n!}$$

$$\times E[X_1^{l_1}] \times E[X_2^{l_2}] \times \cdots \times E[X_n^{l_n}]$$

と表現できる。 $0! = 1$ に注意せよ。

$E[X_1] = \mu = 0$ と $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$ から

$$E[T_n^4] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^4] + 6 \sum_{1 \le k < l \le n} E[X_k^2] E[X_l^2]$$

を得る. $E[X_k^4] = E[|X_k|^4] = K \ (k = 1, \ldots, n)$

と Cauchy-Schwarz の不等式から;

$$E[X_k^2] = E[X_k^2 \cdot 1] \le \sqrt{E[X_k^4]} \underbrace{\sqrt{E[1^2]}}_{=1}$$

$$= \sqrt{E[X_k^4]} = \sqrt{K}$$

よって

$$\sum_{1 \le k < l \le n} \to \frac{n(n-1)}{2} \text{ 項ある.}$$

$$E[T_n^4] \leq nK + 3n(n-1)K$$

$$\leq 3Kn^2$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\bar{X}_n^4] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} E[T_n^4]$$

$$\leq 3K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

したがって、補題4.1を使って

$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n < \infty\right) = 1. \overset{(a)}{\Longrightarrow} \Pr\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = 0\right) = 1$$

最後に、$\mu \neq 0$ の場合を示す。

$Y_k = X_k - \mu \ (k = 1, 2, \dots, n)$ とおくと

$$E[Y_k^4] \leq E[\{|X_k| + |\mu|\}^4]$$

$$\leq 8E[|X_k|^4 + |\mu|^4]$$

$\because (a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) \quad (a, b \geq 0)$

$$\leq 8(K^4 + \mu^4).$$

よって、前半部分の証明から

$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)=0\right)=1.$$

あとは, $\forall\omega\in\Omega$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\cdots+Y_n(\omega)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(X_1(\omega)+X_2(\omega)+\cdots+X_n(\omega)\right)=\mu,$$

4.3 中心極限定理

定理 4.18 $X_1, X_2, \dots$ を i.i.d 確率変数列とし、

$E[X_1] = \mu$, $Var[X_1] = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$ とする。

このとき

$$Z_n := \frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow Z$$

ただし、$Z \sim N(0, 1)$

注意. $Z_n \rightsquigarrow Z \sim N(0,1)$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Pr(Z_n \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, d\tau$$

$$({}^\forall x \in \mathbb{R})$$

例 4.19　$X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし，$E[X_1]=\mu$, $Var[X_1]=\sigma^2$ $(0<\sigma<\infty)$ とする。

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X}_n)^2$$

$$S_n := \sqrt{S_n^2}$$ とおく。

CLT より

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

さらに

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)}{S_n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

するとき

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2-(\overline{X}_n-\mu)^2\right\}$$

［※］

となる。設定から

$$E[(X_1-\mu)^2] = \sigma^2 < \infty$$

なので、大数の弱法則から、

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2 \xrightarrow{P} E[(X_1-\mu)^2] = \sigma^2$$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

さらに、定理4.11(6) ($g(x) = (x-\mu)^2$)

を用いると

$$(\bar{X}_n-\mu)^2 \xrightarrow{P} 0$$

よって

$$S_n^2 = \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1}\left\{\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2}_{\xrightarrow{P}\sigma^2} - \underbrace{(\bar{X}_n-\mu)^2}_{\xrightarrow{P} 0}\right\}$$

$$\xrightarrow{P} \sigma^2.$$

よって

$$\frac{S_n}{\sigma} \xrightarrow{P} 1. \iff \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{P} 1$$

中心極限定理より

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

である。よって

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{S_n} = \underbrace{\frac{\sigma}{S_n}}_{\xrightarrow{P} 1} \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}}_{\rightsquigarrow N(0,1)}$$

$\rightsquigarrow N(0,1)$ ∵) 定理 4.11(5)

□

中心極限定理の証明についてのコメント

- 積率母関数を用いて証明 $\Rightarrow$ a cheat proof

- 特性関数 $\varphi^{X_n}(t) = E[e^{\sqrt{-1}tX_n}]$ を用い

  T2 証明

  $$\varphi^{X_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi^{X}(t)$$

  $$\Longleftrightarrow \quad X_n \rightsquigarrow X$$

- Lindeberg (1922) の証明

$X_n \rightsquigarrow X$

$\iff$

$E[f(X_n)] \xrightarrow{n\to\infty} E[f(X)]$

f は有界連続関数

telescope argument

- Stein法を用いた証明

正規分布に関する部分積分がkey

詳しくは補足FとGを参照のこと.

定理 4.22 $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots$ を $\mathbb{R}^d$ 値の i.i.d. 確率ベクトルとし，

$$E[\underline{X}_1] = \underline{\mu} \ ; \quad Var[\underline{X}_1] = \Sigma > 0$$

とする．このとき，$^\forall \underline{c} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\sqrt{n}\, \underline{c}^T (\overline{\underline{X}}_n - \underline{\mu}) \rightsquigarrow N(0, \underline{c}^T \Sigma \underline{c})$$

が成立する．このことを

$$\sqrt{n}\, (\overline{\underline{X}}_n - \underline{\mu}) \rightsquigarrow N_d(\underline{0}_d, \Sigma)$$

と書くことにする．

4.4 デルタ法

$\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$: 確率変数列

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は滑らかな関数

定理 4.23 (デルタ法) $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ とし

$$\frac{\sqrt{n}\,(Y_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

を仮定する. さらに

$$\dot{g}(\mu) = \frac{dg}{dx}(x)\Big|_{x=\mu} \neq 0$$

と仮定する．このとき

$$\frac{\sqrt{n}\{g(T_n)-g(\mu)\}}{|\dot{g}(\mu)|\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

が成立する．

証明 関数 $x \mapsto g(x)$ は $x=\mu$ の近傍で連続微分可能。このことより、$^\exists \delta_1 > 0$ があって、

$$x : |x-\mu| < \delta_1 \Rightarrow g(x) - g(\mu) = (x-\mu)\int_0^1 \dot{g}(\mu + t(x-\mu))\,dt$$

と表れる。また、$x \mapsto \dot{g}(x)$ は $x=\mu$ で連続なので、$^\forall \varepsilon > 0$ に対して、$^\exists \delta_2 > 0$ があって

$$|x-\mu| < \delta_2 \Rightarrow |\dot{g}(x) - \dot{g}(\mu)| < \varepsilon$$

が成立する。

すると, $|x-\mu| < \min(\delta_1, \delta_2) =: \delta$ となる x に対して

$$\left| \int_0^1 \dot{g}(\mu + t(x-\mu))\,dt - \dot{g}(\mu) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \dot{g}(\mu + t(x-\mu))\,d\tau - \int_0^1 \dot{g}(\mu)\,d\tau \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\left| \dot{g}(\mu + \tau(x-\mu)) - \dot{g}(\mu) \right|}_{< \varepsilon} d\tau$$

$$|\mu + t(x-\mu) - \mu| = t\,|x-\mu| \leq |x-\mu| \leq \delta$$

$$< \varepsilon \int_0^1 d\tau = \varepsilon.$$

したがって

$$|Y_n - \mu| < \delta$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \dot{g}(\mu + t(Y_n - \mu))\,dt - \dot{g}(\mu) \right| < \varepsilon.$$

となる。この対偶を取れば

$$\left| \int_0^1 \dot{g}(\mu + t(Y_n - \mu))\,dt - \dot{g}(\mu) \right| \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow |Y_n - \mu| \geq \delta$$

となる. 事象に直せば

$$\left\{\omega\in\Omega ;\ \left|\int_0^1 \dot{g}\bigl(\mu+t(Y_n(\omega)-\mu)\bigr)dt-\dot{g}(\mu)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$\subset\left\{\omega\in\Omega ;\ |Y_n(\omega)-\mu|\geq\delta\right\}$$

となるので

$$\Pr\left(\left|\int_0^1 \dot{g}\bigl(\mu+t(Y_n-\mu)\bigr)dt-\dot{g}(\mu)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$\leq\Pr\left(|Y_n-\mu|\geq\delta\right\}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

となる.

なぜならば

$$\frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

なので、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ と

$M > 0$ が存在して

$$\int_{-\infty}^{-M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \leq P_r\left(\frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \leq -M\right) + \varepsilon$$

$$\int_{M}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \leq P_r\left(\frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \leq M\right) + \varepsilon$$

$\delta > 2$

$$Pr\left(-M < \frac{\sqrt{n}\,(\bar{T}_n-\mu)}{\sigma} \leq M\right)$$

$$= Pr\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{T}_n-\mu)}{\sigma} \leq M\right) - Pr\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{T}_n-\mu)}{\sigma} \leq -M\right)$$

$$\geq \int_M^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - \varepsilon - \int_{-\infty}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} dz - \varepsilon$$

$$= \int_{-M}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/} dz - 2\varepsilon$$

$$= 1 - 2\varepsilon.$$

したがって

$$\Pr\left(|Y_n - \mu| \leq \frac{\sigma M}{\sqrt{n}} \right) \geq 1 - 2\varepsilon$$

よって，$Y_n \xrightarrow{p} \mu$ となる．

$$\left(Y_n - \mu = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o_p(1) \right)$$

よって

$$\Pr\left(\left|\int_0^1 \dot{g}(\mu+t(T_n-\mu))\,dt - \dot{g}(\mu)\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\leq \Pr(|T_n-\mu| \geq \delta) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となる. すなわち

$$\int_0^1 \dot{g}(\mu+t(T_n-\mu))\,dt \xrightarrow{P} \dot{g}(\mu)$$

を得る.

$|T_n-\mu| < \delta$ が起こっているとき

$$\frac{\sqrt{n}\,(g(\bar{X}_n)-g(\mu))}{\sigma} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}}_{\rightsquigarrow\, N(0,1)} \underbrace{\int_0^1 \dot{g}(\mu+t(\bar{X}_n-\mu))\,dt}_{\xrightarrow{P}\, \dot{g}(\mu)}$$

$$\rightsquigarrow \dot{g}(\mu)N(0,1)$$

$\because$) 定理4.11 (5)

なお、$\dot{g}(\mu)N(0,1)$ と $N(0, \dot{g}(\mu)^2)$ は

同じ分布であることに注意すればよい。 $\square$

例 4.24　$X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし，$E[X_1]=\mu$，$Var[X_1]=\sigma^2$ $(0<\sigma<\infty)$ とする．中心極限定理から

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

定理の $Y_n \leftrightarrow \bar{X}_n$

いま

$$W_n := e^{\bar{X}_n}$$

とおく．$g(x)=e^x$ $(x\in\mathbb{R})$ である．

$\dot{g}(x) = e^x$ である.

デルタ法により

$$\frac{\sqrt{n}\,(W_n - e^{\mu})}{e^{\mu}\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$W_n \approx N\left(e^{\mu};\ \frac{e^{2\mu}\sigma^2}{n}\right)$$

で近似できる.

□