立教大学講義用スライド (2024/12/14)

本日の講義内容

- 8.1 仮説検定の考え方
- 8.2 Neyman-Pearsonの定理
- 8.3 検定統計量の導出方法
- 8.6 区間推定の考え方
- 8.7 信頼区間の構成法

8.1 仮説検定の考え方

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \sim P_{\underline{\theta}^*}^{\otimes n} \quad (\theta^* \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$$

真の母数　母数空間

$\mathbb{X}^n \subset \mathbb{R}^n$: $\underline{X}$ の値域

$\Theta_0 \subsetneq \Theta$ は空でない部分集合.

仮説

$$H_0: \underline{\theta}^* \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \underline{\theta}^* \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$$

を考える.

H_0を帰無仮説(きむ)といい，H_1を対立仮説という.

Θ_0がΘの1つの元からなるとき，H_0を単純帰無仮説といい，そうでないときを複合帰無仮説という

非確率化検定方式

$\mathbb{X}^n$を2つの排反で空でない部分集合WとW^cに分割する．すなわち

$$\mathbb{X}^n = W \cup W^c, \quad W \cap W^c = \phi, \quad W \neq \phi, \quad W^c \neq \phi.$$

$\underline{X} = \underline{x}$ を観測したとき

$\underline{x} \in W \Rightarrow$ 帰無仮説 H_0 を棄却

$\underline{x} \in W^c \Rightarrow$ 帰無仮説 H_0 を棄却しない..

W を棄却域, W^c を受容域 という

	H_0を棄却	H_0を受容
$\theta^* \in H_0$が真	第1種の誤り	正しい判断
$\theta^* \in H_1$が真	正しい判断	第2種の誤り

トレードオフ

「よい」検定方式の定式化

関数 $\phi: \mathcal{X}^n \to [0,1]$ を考える. $\underline{X} = \underline{x}$ を観測したとき

確率 $\phi(\underline{x})$ で H_0 を棄却する方式を考える.

ϕ を検定関数という

非確率化検定

$$\phi(\underline{x}) \begin{cases} 1 & (x \in W) \\ 0 & (x \notin W) \end{cases}$$

とおくと棄却域 W を持つ非確率化検定を定める.

そうでない検定を確率化検定という.

$\phi(\boldsymbol{X})$を検定統計量という.

すると第1種の誤りの確率は

$$E_\theta[\phi(\boldsymbol{X})] \quad (\theta \in \Theta_0)$$

第2種の誤りの確率は

$$1 - E_\theta[\phi(\boldsymbol{X})] \quad (\theta \in \Theta_1)$$

となる. ただし

$$E_\theta[\phi(\boldsymbol{X})] = \int_{\mathcal{X}^n} \phi(\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{x}|\theta)\, d\boldsymbol{x}$$

「よい」検定として、まず第1種の誤りの確率のΘ_0上の上限をα $(0<\alpha<1)$とする検定を考える。

$$\sup_{\underline{\theta}\in\Theta_0} E_{\underline{\theta}}[\phi(\underline{X})] \leq \alpha . \qquad (8.1)$$

(8.1)をみたす検定または検定関数をを**有意水準αの検定**という。

つぎに、有意水準αの検定ϕの中で第2種の誤りの確率

$$1 - E_{\underline{\theta}}[\phi(\underline{X})] \qquad (\underline{\theta} \in \Theta_1)$$

を Θ_1 上で最小にするもの（存在すれば）を見つけること

を目指す．すなわち

$$E_{\underline{\theta}}[\phi(\underline{X})] \qquad (\underline{\theta} \in \Theta_1)$$

を最大にするものである．この確率を $\underline{\theta} \in \Theta_1$ の

関数とみて

$$\beta(\underline{\theta}) := E_{\underline{\theta}}[\phi(\underline{X})] \qquad (\underline{\theta} \in \Theta_1)$$

と表記する．これを**検出力関数**または**検出力**

という．

定義8.1 有意水準α $(0<\alpha<1)$ の検定中で検出力を任意の $\theta \in \Theta_1$ に対して最大にするものを有意水準αの**一様最強力検定**という. 特に, 帰無仮説と対立仮説がともに単純であるとき, 単に有意水準αの**最強力検定**という.

(m.p. 検定とかく)

8.2 Neyman-Pearson の定理

m.p. 検定を求める.

真の母数を「$\underline{\theta}$」とべかずに「θ」とかく.

$p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta})$: $\underline{X}$ の p.d.f.

注 p.m.f. のときは 積分 ⇒ 和 の記号

定理 8.2 $\Theta = \{\underline{\theta}_0, \underline{\theta}_1\}$ とする.

$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \sim p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta})$

検定問題

$$H_0 : \underline{\theta} = \underline{\theta}_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \underline{\theta} = \underline{\theta}_1$$

における有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ の m.p. 検定 ϕ_0

は以下で与えられる

$$\phi_0(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \left(p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1) > c\, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_0) \right) \\ \gamma & \left(p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1) = c\, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_0) \right) \\ 0 & \left(p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1) < c\, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_0) \right) \end{cases} \tag{8.2}$$

である。ただし、γ, c $(0 \leq \gamma \leq 1,\ c > 0)$ は

$$E_{\underline{\theta}_0}\left[\phi(\underline{X}) \right] = \alpha$$

から定まる定数である。

注

$$\frac{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0)}{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_1)} \begin{array}{l} < \frac{1}{c} \\ = \frac{1}{c} \\ > \frac{1}{c} \end{array}$$

証明

$$B_1 := \{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n ;\ p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1) > c\, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_0) \} \Rightarrow \phi_0 = 1$$

$$B_2 := \{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n ;\ \quad " \quad = \quad " \quad \} \Rightarrow \phi_0 = \gamma$$

$$B_3 := \{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n ;\ \quad " \quad < \quad " \quad \} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

とおき，ϕを有意水準αの任意の検定とする.

すなわち

$$E_{\underline{\theta}_0}[\phi(\underline{x})] \leq \alpha$$

をみたす.

$$E_{\underline{\theta}_0}[\phi_0(\underline{x})] = \alpha$$

$$\Downarrow \quad +(8.2)$$

$$E_{\theta_1}[\phi_0(\underline{x})] \geq E_{\theta_1}[\phi(\underline{x})]$$

$$E_{\theta_1}[\phi_0(\underline{x})] - E_{\theta_1}[\phi(\underline{x})]$$

$$= \int_{\mathcal{X}^n} \phi_0(\underline{x})\, p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1)\, d\underline{x} - \int_{\mathcal{X}^n} \phi(\underline{x})\, p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \theta_1)\, d\underline{x}$$

$$= \int_{B_1} \underbrace{\phi_0(\underline{x})}_{=1}\, p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1)\, d\underline{x} + \int_{B_1} \underbrace{\phi_0(\underline{x})}_{=r}\, p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \theta_1)\, d\underline{x}$$

$$+ \int_{B_3} \underbrace{\phi_0(\underline{x})}_{=0}\, p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1)\, d\underline{x}$$

$$- \int_{B_1} \phi(\underline{x})\, p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_1)\, d\underline{x} - \int_{B_1} \quad d\underline{x} - \int_{B_2} \quad d\underline{x}$$

$$= \int_{B_1} \{1 - \phi(\underline{x})\} \underbrace{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_1)}_{> c p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0)} d\underline{x} + \int_{B_2} \{r - \phi(\underline{x})\} \underbrace{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_1)}_{= c p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0)} d\underline{x}$$

$$+ \int_{B_3} \{- \phi(\underline{x})\} \underbrace{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_1)}_{< c p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0)} d\underline{x}$$

$$\geq \int_{B_1} \{1 - \phi(\underline{x})\} c \, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0) d\underline{x} + \int_{B_2} \{r - \phi(\underline{x})\} p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0) d\underline{x}$$

$$+ \int_{B_3} \{0 - \phi(\underline{x})\} c \, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0) d\underline{x}$$

$$= c \int_{\mathcal{X}^n} \{\phi_0(\underline{x}) - \phi(\underline{x})\} p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0) d\underline{x}$$

$$= c \left\{ \underbrace{E_{\underline{\theta}_0}[\phi(\underline{X})]}_{\geq \alpha} - \underbrace{E_{\underline{\theta}_0}[\phi_0(\underline{X})]}_{\leq \alpha} \right\} \geq 0.$$

$\blacksquare$

例18.3　$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ i.i.d. $N(\theta, \sigma^2)$ で

σ^2は既知とする. 検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

（$\theta_1 > \theta_0$）
と仮定してよい

に対する m.p. 検定を求めよう.

$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ の同時 p.d.f. は

$$p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_j - \theta)^2\right] \qquad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

$N(\theta, \sigma^2)$ の p.d.f.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (x_j-\theta)^2\right]$$

である.

$$\log\left[\frac{p^*(\underline{x}|\theta_1)}{p^*(\underline{x}|\theta_0)}\right] = \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^n (x_j-\theta_1)^2 - \sum_{j=1}^n (x_j-\theta_0)^2\right]$$

$$= \frac{(\theta_1-\theta_0)^2}{2}\left(\bar{x} - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)$$

と書き直せる. ただし

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j .$$

ここで

$$p^{*}(\underline{x}\mid\theta_0) > c\, p^{*}(\underline{x}\mid\theta_1) \iff \log\left[\frac{p^{*}(\underline{x}\mid\theta_1)}{p^{*}(\underline{x}\mid\theta_0)}\right] > \log c$$

$$\iff \frac{(\theta_1-\theta_0)^2}{2}\left(\bar{x}_n - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) > \log c$$

$$\iff \bar{x}_n > \underbrace{\frac{2}{(\theta_1-\theta_0)^2}\log c + \frac{\theta_0+\theta_1}{2}}_{= c'}$$

いま

$$\phi_0(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & (\bar{x}_n > c') \\ 0 & (\bar{x}_n \leq c') \end{cases}$$

p.d.f. のときは $d=0$ としてよい.

次に，c'を求めるために

$$\alpha = E_{\theta_0}[\phi_0(\underline{X})] = Pr_{\underline{\theta}_0}[\bar{X}_n > c']$$

を解く．ただし，$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$に対し

$$Pr_\theta[\underline{X} \in B] = E_\theta[\mathbb{I}_B(\underline{X})] = \int_B p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta)\, d\underline{x}$$

と定めた．よって

$$\alpha = Pr_{\theta_0}\left\{ \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \theta_0)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}\,(c' - \theta_0)}{\sigma} \right\}$$

θ_0 のもとで, $\bar{X}_n \sim N(\theta_0, \frac{\sigma^2}{n})$ なので.

$$\frac{\bar{X}_n - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

注 σ は σ^2 の正の平方根とした.

いま

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}\, dx$$

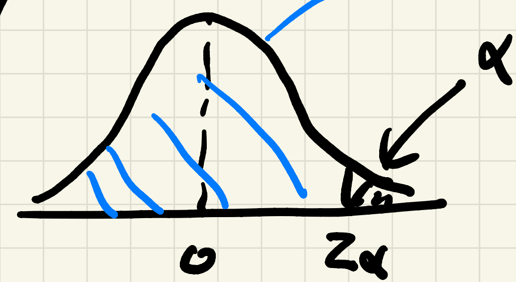
$N(0,1)$ の p.d.f.

と書いたとき

$$\alpha = \Pr_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma} \right)$$

$$= 1 - \Pr_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma} \right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma} \right)$$



z_α : N(0.1) の上側 α 点

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma} \right) = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\frac{\sqrt{n}(C' - \theta_0)}{\sigma} = z_\alpha \iff C' = \theta_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\sigma$$

よって、m.p. 検定は

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \left(\bar{x}_n > \theta_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\sigma\right) \\ 0 & \left(\bar{x}_n \leq \theta_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\sigma\right) \end{cases}.$$

ϕ_0 の検出力を求める。

$$\beta_{\phi_0}(\theta_1) = E_{\theta_1}[\phi_0(\underline{X})]$$

$$= \Pr_{\theta_1}\left\{ \bar{X}_n > \theta_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\sigma \right\}$$

$$= \Pr_{\theta_1}\left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\theta_1)}{\sigma} > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\theta_1-\theta_0)}{\sigma} \right\}$$

$$= 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\theta_1-\theta_0)}{\sigma} \right)$$

假定到 $\theta_1 - \theta_0 > 0$ 才會了

$$\theta_1 \uparrow \quad z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\theta_1-\theta_0)}{\sqrt{n}} \downarrow \quad \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\theta_1-\alpha)}{\sigma}\right) \downarrow$$

$$1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\theta_1-\theta_0)}{\sigma}\right) \uparrow$$

例18.4 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Ber(\theta)$ $(0<\theta<1)$ とする.

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0)$$

を検定.

$\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ の同時 p.m.f. は

$$p^{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x} \mid \theta) = \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{1-x_j} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_j)$$

$$= \theta^{\sum_{j=1}^n x_j}(1-\theta)^{n-\sum_{j=1}^n x_j}$$

$x_j = 0$ または 1 に対して

$$\log\left[\frac{p^{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x} \mid \theta_1)}{p^{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x} \mid \theta_0)}\right] = \log\left[\frac{\theta_1^{\sum x_j}(1-\theta_1)^{n-\sum x_j}}{\theta_0^{\sum x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum x_i}}\right]$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \right\} \log \theta_1 + \left(n - \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \log (1 - \theta_1)$$

$$- \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \right\} \log \theta_0 - \left(n - \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \log (1 - \theta_0)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \log \frac{\theta_1}{1-\theta_1} - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \log \frac{\theta_0}{1-\theta_0}$$

$$+ n \log (1 - \theta_1) - n \log (1 - \theta_0)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \log \left\{ \frac{\theta_1 (1 - \theta_0)}{(1 - \theta_1) \theta_0} \right\} + n \log \left(\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_0} \right)$$

$\theta_1 > \theta_0$ として、$\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0} > 1$ である。

よって $\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0} < 1$ より $\log\left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) < 0$

$$p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_1) > c\, p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0)$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_1)}{p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \theta_0)} > \log c = c'$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \log\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0}\right) + n \log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) > c'$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j > \frac{c'}{\log\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0}\right)} \underbrace{- n \log\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}_{\geq 0}$$

$= c''$

$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j > c''$

よって

$$\phi_0(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \left(\sum_{j=1}^{n} x_j > c''\right) \\ r & \left(\sum_{j=1}^{n} x_j = c''\right) \\ 0 & \left(\sum_{j=1}^{n} x_j < c''\right) \end{cases}$$

最後に，γ と c'' を求める．

$$\alpha = E_{\theta_0}[\phi_0(\underline{x})]$$

$$= Pr_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j > c''\right\} + \gamma Pr_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j = c''\right)$$

$\theta = \theta_0$ のとき，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j \sim Bino(n, \theta_0)$

c'' を整数にとるとして

$$\alpha = \sum_{j=c''+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j} (1-\theta_0)^{n-j} + \gamma \binom{n}{c''} \theta_0^{c''} (1-\theta_0)^{n-c''}$$

とする．まず，c'' を

$$\sum_{j=c''+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j} (1-\theta_0)^{n-j} \leq \alpha \leq \sum_{j=c''}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j} (1-\theta_0)^{n-j}$$

をみたす整数としてさだめる．これを c_0 とおくと

$$\gamma = \left[\alpha - \sum_{j=c_0+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j} (1-\theta_0)^{n-j} \right] \Big/ \binom{n}{c_0} \theta_0^{c_0} (1-\theta_0)^{n-c_0}$$

とすればよい． □

8.3 検定統計量の導出方法

$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \sim P_{\underline{\theta}}^{\otimes n}$ $(\underline{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$

とする.

検定関数 $\phi: \mathcal{X}^n \to [0,1]$ によって定まる検定方式は、以下のように定まる場合がある。

$\phi: \mathcal{X}^n \to \{0,1\}$ を非確率化検定とし;

ある統計量 $S: \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ と定数 c が

存在して

$$S(\underline{x}) \leq C \iff \phi(\underline{x}) = 1$$

$$S(\underline{x}) > C \iff \phi(\underline{x}) = 0.$$

このような $S(\underline{X})$ を検定統計量という.

定義 8.5 検定問題

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$$

$$H_0 : \underline{\theta} \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \underline{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$$

を検定するための尤度比検定統計量 (L.R.)

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{\sup_{\underline{\theta} \in \Theta_0} p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta})}{\sup_{\underline{\theta} \in \Theta} p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \underline{\theta})}$$

$\underline{\theta} \in \Theta_1$ のとき大きくなる

で与えられる．このとき，ある定数 C が存在して

H_0 の棄却域が

・ $W = \{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n ; \lambda(\underline{x}) \leq C \}$

で与えられる検定を**尤度比検定**という

すると

$$\phi(\underline{x}) = \mathbb{I}_{\omega}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & (\underline{x} \in \omega) \\ 0 & (\underline{x} \in \omega) \end{cases}$$

となる.

注意 8.6　$\hat{\underline{\theta}}(\underline{x})$ を母数空間 Θ での $\underline{\theta}$ の最尤推定量 $\hat{\underline{\theta}}_0(\underline{x})$ を Θ_0 での $\underline{\theta}$ の最尤推定量とする. すると

$$\hat{\underline{\theta}}(\underline{x}) \in \arg\max_{\underline{\theta} \in \Theta} p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta})$$

$$\hat{\underline{\theta}}_0(\underline{x}) \in \arg\max_{\underline{\theta} \in \Theta_0} p^{\underline{X}}(\underline{x} \mid \underline{\theta})$$

である。このとき

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \hat{\underline{\theta}}_0(\underline{x}))}{p^{\underline{x}}(\underline{x} \mid \hat{\underline{\theta}}(\underline{x}))}$$

と表現できる。

定理8.7 $\underline{X} \sim P_{\underline{\theta}^*}^{\otimes n}$ $(\underline{\theta}^* \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とする.

Θ の次元を d, Θ_0 の次元を r $(r < d)$ とする

説明

検定問題

$$H_0 : \underline{\theta}^* \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \underline{\theta}^* \in \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0$$

に対する尤度比検定統計量を $\lambda(\underline{X})$ とする.

このとき, H_0 のもとで

$$-2 \log \lambda(\underline{X}) \rightsquigarrow \chi^2_{d-r} .$$

注意8.8

$$W = \{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n ;\ -2\log \lambda(\underline{x}) > \underline{\chi^2_{d-r,\alpha}} \}$$

自由度$d-r$の
χ^2分布の上側α点

としたとき.

$\underline{x} \in W \Rightarrow H_0$を棄却.

8.5 区間推定の考え方

$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T \sim P_\theta^{\otimes n}$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R})$

とする.

$0 < \alpha < 1$ を固定.

母数 θ に依存しない区間 $[L(\underline{X}), U(\underline{X})] \subset \Theta$

が $^\forall \theta \in \Theta$ に対して

$$\Pr_\theta\left(L(\underline{X}) \leq \theta \leq U(\underline{X}) \right\} \geq 1 - \alpha$$

をみたすとき，区間 $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$ を信頼係数

$(1-\alpha)$ の θ の信頼区間という.

$L(\underline{X})$ と $U(\underline{X})$ を信頼限界という.

α は 0.05, 0.01, 0.1 などを用いる.

例 8.9　$X_1, X_2, \dots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\theta, \sigma^2)$

とする．ただし，$\theta \in \mathbb{R}$ で $\sigma^2 \ (0 < \sigma < \infty)$ は既知とする．

$\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j$ は

$$\bar{X}_n \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

よって

$$S_\theta(\underline{X}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

となる．よって

$$1-\alpha = \Pr_\theta\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le S_\theta(\underline{X}) \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \Pr_\theta\left(\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \theta \le \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

したがって

$$[L(\underline{X}), U(\underline{X})] = \left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

は信頼係数 $1-\alpha$ の θ の信頼区間.

8.6 信頼区間の構成法

8.6.1 検定方式の反転

$\Theta \subset \mathbb{R}$ とし、$\theta_0 \in \Theta$ を取る。

検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

を考える。有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ の検定の受容域（棄却域の補集合）を $A(\theta_0)$ とおく。

$$Pr_{\theta_0}(\underline{X} \in A(\theta_0)) \geq 1-\alpha.$$

が成立している。そこで、$\underline{X} \in A(\theta_0)$を$\theta_0$に関して解くことによって

$$C(\underline{X}) = \{\theta \in \Theta ; \underline{x} \in A(\theta)\}$$

が形式的に得られる。しかし一般に $C(\underline{X})$ が連結とはかぎらない。

$C(\underline{X})$が連結区間のとき?

$$\Pr_\theta\{\theta \in A(\theta)\} \geq 1-\alpha$$

となるので、$C(\underline{x})$は信頼係数$(1-\alpha)$の信頼区間になる。

例18.16 $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Ber}(\theta)$ $(0<\theta<1)$

とする。$\theta_0 \in (0,1)$を取る。検定問題

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \theta \neq \theta_0$$

を考える。

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \theta_0^{x_j} (1-\theta_0)^{1-x_j}}{\prod_{j=1}^{n} \overline{X}_n^{x_j} (1-\overline{X}_n)^{1-x_j}} \leftarrow \sup_{\theta \in (0,1)} \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j} (1-\theta)^{1-x_j}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta_0}{\overline{X}}\right)^{x_j} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\overline{X}_n}\right)^{1-x_j}$$

となる. これより, 定理8.7から

$$A(\theta_0) = \{ \underline{x} \in \{0,1\}^n ;$$

$$-2\log\lambda(\underline{x}) = 2n\bar{x}\log\left(\frac{\bar{x}_n}{\theta_0}\right) + 2n(1-\bar{x}_n)\log\left(\frac{1-\bar{x}_n}{1-\theta_0}\right)$$

$$\leq \chi^2_{1,\alpha} \}$$

となる. よって

$$C(\underline{X}) := \left\{ \theta : \bar{X}_n \log\left(\frac{\bar{X}_n}{\theta}\right) + (1-\bar{X}_n)\log\left(\frac{1-\bar{X}_n}{1-\theta}\right) \leq \frac{\chi^2_{1,\alpha}}{2n} \right\}$$

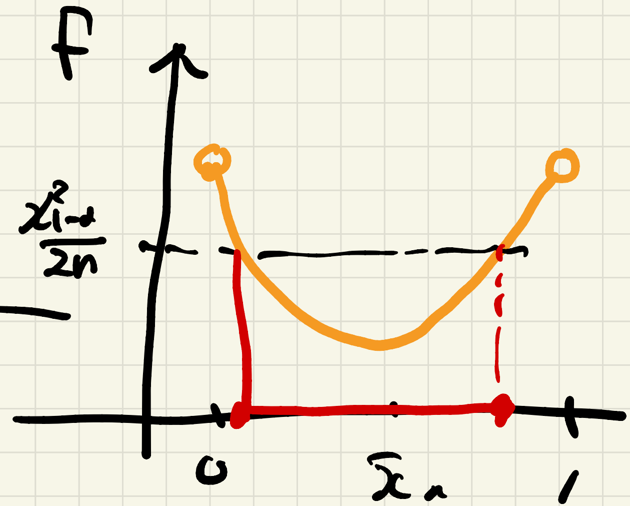
$$f(\theta) = \bar{x}_n \log \bar{x}_n - \bar{x}_n \log\theta + (1-\bar{x}_n)\log(1-\bar{x}_n)$$
$$- (1-\bar{x}_n)\log(1-\theta)$$

とおく.

$$\dot{f}(\theta) = -\frac{\bar{x}_n}{\theta} + \frac{1-\bar{x}_n}{1-\theta} = \frac{-\bar{x}_n(1-\theta)+\theta(1-\bar{x}_n)}{\theta(1-\theta)}$$

$$= \frac{-\bar{x}_n + \theta\bar{x}_n + \theta - \theta\bar{x}_n}{\theta(1-\theta)} = \frac{-\bar{x}_n + \theta}{\theta(1-\theta)}$$

θ		$\bar{x}_n$	
$\dot{f}(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	$\searrow$		$\nearrow$



8.6.2 枢軸量 (pivotal quantity)

$Q(\underline{X}, \theta)$ の分布が θ に依存しないとき,

$Q(\underline{X}, \theta)$ を枢軸量(ピボット)という

このとき

$$\Pr_\theta\left(a \leq Q(\underline{X}, \theta) \leq b\right) = 1 - \alpha$$

をみたす a, b を定めて.

$$a \leq Q(\underline{X}, \theta) \leq b$$

を θに関して解くことにより，信頼係数 $(1-\alpha)$

の θ の信頼区間

$$C(\underline{X}) = \{\theta \in \Theta : a \leq Q(\underline{X}, \theta) \leq b\}$$

が得られる

例18.11 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\theta)\ (\theta > 0)$

とする.

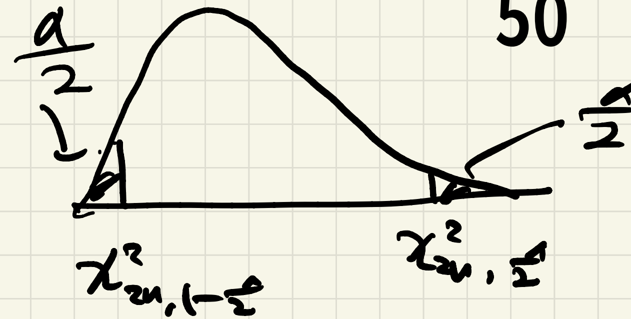
$$p(x|\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

ここで

$$Q(\underline{X}, \theta) = 2\theta \sum_{j=1}^{n} X_j$$

とおくと

$$Q(\underline{X}, \theta) \sim \chi^2_{2n}$$



となるので.

$$\Pr_\theta\left(\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}} \leq Q(\underline{X}, \theta) \leq \chi^2_{2n,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

となるので

$$[L(\underline{X}), U(\underline{X})] = \left[\frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^{n} x_j}, \frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^{n} x_j}\right]$$

は信頼係数$(1-\alpha)$のθの信頼区間

$\boxed{\text{cc}}$