

第1章 確率・確率変数の基本事項

この章では、統計的推測理論を理解する上で必要な確率論の基礎事項を簡潔に述べる。したがって、証明はしない場合がある。また、測度論の内容には立ち入らない。数学的な厳密性を犠牲にして、直観的な理解を目指す記述を心掛けた。節 1.1 では、確率に関わる基本的な概念を導入する。節 1.2 では、抽象的な確率空間と数量の世界を結ぶ確率変数を導入し、確率変数・確率分布・累積分布関数の基本的な性質を説明する。節 1.3 では、累積分布関数の逆関数のようなものである分位点関数を導入する。節 1.4 では、1 変数確率変数の確率モデルを説明する。節 1.5 では、2 次元確率変数の同時分布、周辺分布、条件付き分布を説明する。節 1.6 では、多変数確率変数の確率モデルを導入する。節 1.7 では、正規分布から誘導される重要な分布であるカンマ分布、 χ^2 分布、 t 分布、 F 分布を導入する。

1.1 基礎的な確率規則

確率論はランダムな現象を扱う数学理論である。確率論で扱う行為を試行という。試行のあり得る結果すべてを集めた集合を標本空間といい、 Ω と記すことにする。 Ω の部分集合¹を事象という。事象には標本空間 Ω と空事象 \emptyset (何も起こらないという事象) も含める。事象をすべて集めた集合族を \mathcal{A} と記す。 \mathcal{A} は以下で述べる σ 加法性 (完全加法性) をみたすことにする。

定義 1.1. Ω を空でない集合とし、 \mathcal{A} を Ω の部分集合族とする。 \mathcal{A} が次の 3 条件をみたすとき、 σ 加法族と呼ばれる。

- (1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
- (3) $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

¹ Ω が可算集合ならば、 σ 加法族をすべての部分集合としてよいが、 Ω が連続濃度のときには、すべての部分集合とすると不都合が生じることになる。これについては [2, p.21] を参照のこと。

ただし $A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$ である. Ω と \mathcal{A} の組 (Ω, \mathcal{A}) を可測空間と呼ぶ

補題 1.2. (Ω, \mathcal{A}) を可測空間とする. このとき以下が成立する.

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Proof. (1) $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$.

(2) $A_n^c \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots)$ と De Morgan の法則から

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

最後は定義 1.1(3) を用いた. □

注意 1.3. \mathcal{C} を Ω の部分集合族とする. 集合族 \mathcal{C} は σ 加法性をみたしてなくともよい. このとき, 集合族 $\sigma[\mathcal{C}]$ を

$$\sigma[\mathcal{C}] := \bigcap \{ \mathcal{A}; \mathcal{A} \supset \mathcal{C}, \mathcal{A} \text{ は } \sigma \text{ 加法族} \}$$

で定める. すると $\sigma[\mathcal{C}]$ は σ 加法族となることを確かめることができる. さらに \mathcal{G} を \mathcal{A} を含む σ 加法族としたとき

$$\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \mathcal{G}$$

となることが直にわかる. すなわち $\sigma[\mathcal{C}]$ は \mathcal{C} を含む最小 (包含関係の意味) の σ 加法族となる. □

問 1.1. 集合族 \mathcal{C} に対して

$$\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap \{ \mathcal{A}; \mathcal{A} \supset \mathcal{C}, \mathcal{A} \text{ は } \sigma \text{ 加法族} \}$$

と定める. このとき, 以下を証明せよ.

(1) $\sigma[\mathcal{C}]$ は σ 加法族になることを示せ.

(2) \mathcal{G} を \mathcal{C} を含む任意の σ 加法族としたとき

$$\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{G}$$

を示せ.

定義 1.4. $\Omega = \mathbb{R}$ とし

$$\mathcal{O} = \{ O \subset \mathbb{R}; O \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合} \}$$

とする. $\sigma[\mathcal{O}]$ を \mathbb{R} の **Borel 集合族** と呼び, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と記す. また

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, x) \subset \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}\}$$

とする. このとき \mathcal{C} は \mathcal{O} の真部分集合であるが, $\sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{O}]$ となる².

注意 1.5. Ω が高々可算集合のときは, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ と取る. ただし 2^Ω は Ω のすべての部分集合からなる集合族で **冪集合** という. □

定義 1.6. (Ω, \mathcal{A}) を可測空間とする. \mathcal{A} 上の関数

$$\Pr : \mathcal{A} \ni A \mapsto \Pr(A) \in [0, 1]$$

が次の 2 条件をみたすとき, (Ω, \mathcal{A}) 上の**確率測度**³ と呼ばれる.

- (1) $\Pr(\Omega) = 1$ である.
- (2) 互いに排反⁴ な事象列 $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots)$ に対して

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \Pr(A_n)$$

をみたす.

これらの 3 つの組 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ を**確率空間** という.

補題 1.7. $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ を確率空間とする. このとき以下が成立する.

- (1) $\Pr(\emptyset) = 0$ である.
- (2) $A \in \mathcal{A}$ に対して, $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$ となる.
- (3) $N \in \mathbb{N}$ とする. $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{A}$ が互いに排反ならば

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \Pr(A_n)$$

となる.

- (4) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(A)$ となる. よって, $A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$ が成立する.

² $\sigma[\mathcal{C}] \subset \sigma[\mathcal{O}]$ は明らかであるが, 逆の包含関係も示すことができる. この逆の証明は, 定理 1.16 と Euclid 位相の事実を用いて証明ができる.

³簡単に Ω 上の確率測度ともいう.

⁴ $m \neq n$ ならば, $A_m \cap A_n = \emptyset$ が成立していること.

(5) $A_n \in \mathcal{A}$ が $A_n \subset A_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ をみたすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となる.

(6) $A_n \in \mathcal{A}$ が $A_n \supset A_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ をみたすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) = \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となる.

(7) (Boole の定理/ユニオン・バウンド) $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots)$ に対して

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n)$$

となる.

Proof. (1) $F_1 := \Omega, F_n := \emptyset (n \geq 2)$ とおくと $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な事象列となる. 定義 1.6(2) を用いると

$$\Pr(\Omega) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(F_n) = \Pr(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} \Pr(\emptyset)$$

を得る. よって

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

がわかる.

(2) $F_1 := A, F_2 := A^c, F_n = \emptyset (n \geq 3)$ とおく. すると $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \Omega$ かつ $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な事象列となるので, 定義 1.6(1), (2) を用いると

$$\begin{aligned} 1 = \Pr(\Omega) &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(F_n) = \Pr(A) + \Pr(A^c) + \sum_{n=3}^{\infty} \Pr(\emptyset) \\ &= \Pr(A) + \Pr(A^c) \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

がわかる. よって, (2) は示せた.

(3) $F_i := A_i (i = 1, 2, \dots, N)$ と $F_i = \emptyset (i \geq N + 1)$ とおくと $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な事象列で $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{i=1}^N A_i$ となる. 定義 1.6(2) を用いると

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(F_i) = \sum_{i=1}^N \Pr(A_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \Pr(\emptyset) \\ &= \sum_{i=1}^N \Pr(A_i) \end{aligned}$$

を得る. よって, (3) は示された.

(4) $B \setminus A = B \cap A^c$ かつ $B = (B \cap A^c) \cup A$ である. このことに注意して, $F_1 := B \cap A^c, F_2 = A, F_n = \emptyset (n \geq 3)$ とおくと $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ は互いに排反な事象列で $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = B$ となる. 定義 1.6(2) を用いると

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \Pr(F_n) = \Pr(B \cap A^c) + \Pr(A) + \sum_{n=3}^\infty \Pr(\emptyset) \\ &= \Pr(B \cap A^c) + \Pr(A) \end{aligned}$$

がわかる. よって, (4) は示せた.

(5) $F_1 := A_1, F_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, F_{n+1} := A_{n+1} \setminus A_n$ とおく. $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ は互いに排反であり

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n F_i \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^\infty F_i = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$$

となる. よって

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr\left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \Pr(F_i) \quad (\because \text{定義 1.6(2)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Pr(F_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) \quad (\because (3)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) \end{aligned}$$

を得る. よって, (5) は示せた.

(6) $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ とおく. すると $\{A_1 \setminus A_n\}_{n=1}^\infty$ は $\emptyset = (A_1 \setminus A_1) \subset (A_1 \setminus A_2) \subset (A_1 \setminus A_3) \subset \dots$ となる. このことに注意して分配法則を用いると

$$\bigcup_{n=1}^\infty (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^\infty (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)^c = A_1 \cap A^c = A_1 \setminus A \tag{1.1}$$

となる. 次に (4) と (6) を用いると

$$\begin{aligned} \Pr(A_1) - \Pr(A) &= \Pr(A_1 \setminus A) \quad (A_1 \supset A \text{ なので, (4) を用いた}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_1 \setminus A_n) \quad (\because (1.1) \text{ から (5) を用いた}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Pr(A_1) - \Pr(A_n)\right) \quad (\because (4)) \\ &= \Pr(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_n) \end{aligned}$$

がわかる.

(7) まず

$$\Pr(A_1 \cup A_2) \leq \Pr(A_1) + \Pr(A_2) \quad (1.2)$$

を示す. そのために

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup \left(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2) \right) \quad \text{かつ} \quad A_1 \cap \left(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2) \right) = \emptyset$$

であることに注意する. (3) から

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cup A_2) &= \Pr(A_1) + \Pr\left(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)\right) \\ &= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1 \cap A_2) \\ &\quad (\because A_2 \supset A_1 \cap A_2 \text{ なので (4) を用いた}) \\ &\leq \Pr(A_1) + \Pr(A_2) \quad (\because \Pr(A_1 \cap A_2) \geq 0) \end{aligned}$$

がわかる. (1.2) の操作を繰り返せば, $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \Pr(A_n) \quad (1.3)$$

がわかる. $\{\bigcup_{n=1}^N A_n\}_{N=1}^{\infty}$ は増加列なので, (5) と (1.3) から

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \Pr(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n)$$

がわかる. □

注意 1.8. 補題 1.7(6)(7) において, $\{\Pr(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な非減少列もしくは非増加列なので, 左辺は必ず収束することに注意せよ.

定義 1.9. $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ を確率空間とし, $A, B \in \mathcal{A}$ とする.

(1) (独立性):

$$A \text{ と } B \text{ は独立} \Leftrightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B).$$

(2) (条件付き確率) $\Pr(B) > 0$ のとき, B を与えたときの A の条件付き確率 $\Pr(A|B)$ を

$$\Pr(A|B) := \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

で定める.

- (3) $m \geq 3$ とし, $A_j \in \mathcal{A} (j = 1, 2, \dots, m)$ とする. 事象 A_1, A_2, \dots, A_m は互いに独立であるとは, $2 \leq \forall k \leq m$ と $\forall 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$ に対して

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}) = \Pr(A_{j_1})\Pr(A_{j_2}) \cdots \Pr(A_{j_k})$$

が成り立つときをいう.

注意 1.10. (1) $A, B \in \mathcal{A}$ とし, $\Pr(B) > 0$ とする. A と B が独立のとき

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

が成立する.

- (2) $\Pr(B) > 0$ のとき

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B)\Pr(A|B)$$

となる. これを乗法の公式という.

- (3) $\Pr(B) > 0$ のとき, 関数 $\Pr(\cdot|B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ は定義 1.6(1) – (2) をみたく. すなわち (Ω, \mathcal{A}) 上の確率測度である.

- (4) $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ とし

$$\Pr(\{b_j\}) = \frac{1}{4} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

とする. いま

$$A_j = \{b_j, b_4\} \quad (j = 1, 2, 3)$$

とする. すると

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{b_4\}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cap A_2) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2); \Pr(A_1 \cap A_3) = \Pr(A_1)\Pr(A_3); \\ \Pr(A_2 \cap A_3) &= \Pr(A_2)\Pr(A_3) \end{aligned}$$

である. しかし

$$\frac{1}{4} = \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3) = \frac{1}{8}$$

である. □

問 1.2. 注意 1.10(1)(3) を証明せよ.

補題 1.11. (全確率の法則) $N \in \mathbb{N}$ とする. $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ は Ω の分割とする. すなわち, すべての $m \neq n (m, n \in \{1, 2, \dots, N\})$ に対し, $A_m \cap A_n = \emptyset$ で, $\bigcup_{n=1}^N A_n = \Omega$ が成立している. このとき任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\Pr(B) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^N (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^N \Pr(A_n \cap B)$$

となる.

Proof. $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \bigcup_{n=1}^N (A_n \cap B)$ と $\{A_i \cap B\}_{i=1}^n$ は互いに排反であることを注意して, 定義 1.6(2) を用いればよい. \square

定理 1.12. (Bayes の定理) (1) $N \in \mathbb{N}$ とする. $A_1, A_2, \dots, A_N, B \in \mathcal{A}$ とし, A_1, A_2, \dots, A_N は Ω の分割とする. $j = 1, 2, \dots, N$ に対して, $\Pr(B) > 0, \Pr(A_j) > 0$ のとき

$$\Pr(A_j | B) = \frac{\Pr(A_j)\Pr(B | A_j)}{\sum_{n=1}^N \Pr(A_n)\Pr(B | A_n)}$$

が成立する.

(2) $A, B \in \mathcal{A}$ とし, $\Pr(A) > 0, \Pr(B) > 0$ と仮定する. このとき

$$\Pr(A | B)\Pr(B) = \Pr(B | A)\Pr(A)$$

が成立する.

Proof. 条件付き確率の定義, 補題 1.11, 定義 1.4(2) を用いればよい. \square

例 1.13. 病気 D に対する検査の結果を $+$ と $-$ とし, 確率が以下であるとする.

$$\Pr(+ | D) = 0.9, \quad \Pr(- | D^c) = 0.9, \quad \Pr(D) = 0.01.$$

Bayes の定理を用いて, 検査で $+$ の人が本当に D である確率を求めると

$$\begin{aligned} \Pr(D | +) &= \frac{\Pr(+ \cap D)}{\Pr(+)} = \frac{\Pr(D)\Pr(+ | D)}{\Pr(D)\Pr(+ | D) + \Pr(D^c)\Pr(+ | D^c)} \\ &= \frac{0.01 \times 0.9}{0.01 \times 0.9 + (1 - 0.01) \times \{1 - 0.9\}} \approx 0.83 \end{aligned}$$

となる.

1.2 確率変数

前節では、確率と事象を記述する数学的なモデルを導入した。しかし、統計学が扱う現実の現象は、事象には直接結びつかないかもしれない数量的な情報である。以下で定義する確率変数は、事象と数量の間の橋渡しをする。

定義 1.14. (Ω, \mathcal{A}) と $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ を可測空間とする。写像 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ は (Ω, \mathcal{A}) から $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ への可測写像であるとは

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

をみたすときをいう。

注意 1.15. (1) $d \geq 2$ ($d \in \mathbb{N}$) とする。 $(\mathbb{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ のとき、 X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率ベクトルと呼ばれる。定義されている確率空間に誤解がないときには、簡単に確率ベクトルということもある。

(2) $d = 1$ のとき、 X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数と呼ばれる。定義されている確率空間に誤解がないときには、簡単に確率変数と簡単にいうこともある。 \square

定理 1.16. (Ω, \mathcal{A}) と $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ を可測空間とし、 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ を写像とし、 \mathcal{C} を \mathbb{X} の集合族とする。 $\forall C \in \mathcal{C}$ に対して、 $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in C\} \in \mathcal{A}$ であり、 \mathcal{C} が \mathcal{B} を生成する⁵とき、 X は可測となる。

Proof. \square

$B \in \mathcal{B}$ に対して、 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ を $\{X \in B\}$ と書くことにする。 $\{B\}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned} \left\{ X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in B_n\} \\ \{X \in B^c\} &= \{X \in B\}^c \end{aligned}$$

となる。したがって、集合族 $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}; \{X \in B\} \in \mathcal{A}\}$ は σ 加法族 (必要ならば、 \mathbb{X} も加える) となる。よって、 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ であり、 \mathcal{C} は \mathcal{B} を生成するので、最小性から $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ となることから X は確率変数であることがわかる。

注意 1.17. (1). $(\mathbb{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対して、定理 1.16 における \mathcal{C} の選択として、 $\{(-\infty, r] : r \in \mathbb{R}\}$ と $\{(-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}$ などがある。

⁵ \mathcal{B} は \mathcal{C} を含む最小の σ 集合族。

(2). $d \geq 2 (d \in \mathbb{N})$ とする. $(\mathbb{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対して, 定理 1.16 における \mathcal{C} の選択として

$$\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d) : -\infty < a_i < b_i < \infty (i = 1, 2, \dots, d)\}$$

がある. □

定理 1.18. $(\Omega, \mathcal{A}), (\mathbb{X}, \mathcal{B}), (\mathbb{Y}, \mathcal{C})$ を可測空間とする. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ と $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ は可測写像のとき, $f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ は可測写像となる.

Proof. $C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in C\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(C)\} \in \mathcal{A}$$

となる. なぜならば, f の可測性から $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ となることからわかる. □

定理 1.19. $n \in \mathbb{N}$ とし, X_1, X_2, \dots, X_n は確率変数とし, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とする. このとき, $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は確率変数となる.

Proof. 定理 1.18 から (X_1, X_2, \dots, X_n) は確率ベクトルであることを示せばよい. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\} \in \mathcal{A}$$

である. さらに, 集合族 $\{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n; A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) (i = 1, 2, \dots, n)\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を生成⁶する. したがって, 定理 1.16 から $(\mathbb{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ に対して, (X_1, X_2, \dots, X_n) は確率ベクトルであることがわかる. □

定理 1.20. X_1, X_2, \dots, X_n は確率変数のとき, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ も確率変数となる.

Proof. 定理 1.19 から \mathbb{R}^n 上の実数値関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ が可測であることを示せばよい. $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n < r\}$$

は \mathbb{R}^n の開集合となるので

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n < r\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

⁶この事実の証明には, 測度論の議論が必要なので, 信じることにしよう.

となる. 集合族 $\{(-\infty, r) : r \in \mathbb{R}\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を生成⁷するので, f は可測である. □

注意 1.21. 同様の議論から, X_1, X_2 は確率変数のとき, X_1X_2 も確率変数であることがわかる. さらに, $X_2 \neq 0$ のとき, X_1/X_2 も確率変数であることもわかる. □

定理 1.22. X_1, X_2, \dots は確率変数列のとき

$$\inf_n X_n \quad \sup_n X_n \quad \limsup_n X_n \quad \liminf_n X_n$$

も確率変数となる.

Proof. $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega; \inf_n X_n(\omega) < r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) < r\} \in \mathcal{A}$$

から $\inf_n X_n$ は確率変数であることがわかる. 同様に

$$\{\omega \in \Omega; \sup_n X_n(\omega) < r\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) < r\}$$

から $\sup_n X_n$ も確率変数であることがわかる. 次に

$$\liminf_n X_n = \sup_n \left(\inf_{m \geq n} X_m \right)$$

に注意する. $Y_n := \inf_{m \geq n} X_m$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して確率変数なので, $\sup_n Y_n$ も確率変数となる. 同様に

$$\limsup_n X_n = \inf_n \left(\sup_{m \geq n} X_m \right)$$

から $\limsup_n X_n$ も確率変数であることはわかる. □

注意 1.23. (1). X_1, X_2, \dots を確率変数列とする. 定理 1.22 と 定理 1.19 から

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ は存在} \} \\ &= \{ \omega \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) - \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0 \} \end{aligned}$$

⁷この事実の証明には, 測度論の議論が必要となる. 信じることにする. 丁寧な証明は

https://mcm-www.jwu.ac.jp/~konno/pdf/note_book=20230831.pdf

にある.

は可測集合となる. $\Pr(\Omega_0) = 1$ のとき, 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ はほとんど確実に収束するといひ, a.s. と記す. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に値を取る確率変数を X_∞ とおくと

$$X_\infty(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \quad (\text{a.s.}) \omega \in \Omega$$

と書ける.

(2). 任意の $a, b \in \mathbb{R} (a < b)$ とし, $\{-\infty\} \cup (-\infty, a), (a, b), (b, \infty) \cup \{+\infty\}$ によって生成される σ 加法族を $\mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ と書く. 集合 $D \subset \Omega$ が定義域で, $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を終域ともつ関数 X は可測であるとは, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

をみたすときをいう. □

定義 1.24. (1) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数 X に対して

$$F^X(x) := \Pr(X \leq x) := \Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を X の累積分布関数 (cumulative distribution function(c.d.f.)) という. また

$$P^X(B) := \Pr(X \in B) := \Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

を X の分布という. したがって, $P^X((-\infty, x]) = F^X(x)$ である.

(2) 確率変数 X, Y を $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ の確率変数とし, それぞれの c.d.f. を F^X, F^Y とする. このとき

$$F^X(x) = F^Y(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が成立するとき, X と Y の分布は同じである⁸ という. これを $X \stackrel{d}{=} Y$ と書く.

(3) 確率変数 X が c.d.f. F を持つとき, $X \sim F$ と書く.

注意 1.25. 文脈から, どの確率変数の確率分布または累積分布関数であることがわかる場合には, 簡単に P または F と書くこともある. □

注意 1.26. (1) P^X は可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度である. すなわち P^X は定義 1.6 をみたすことがわかる.

(2) c.d.f. F が与えられると

$$F(x) = P((-\infty, x]) \quad (x \in \mathbb{R})$$

⁸ $F^X(x) = F^Y(x) (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow P^X(B) = P^Y(B) (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ となることが知られている. 注意 1.26(2) を参照のこと.

をみたく $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P が一意的に定まることが知られている. このことにより X の c.d.f. と分布を同一視する. さらに $X \sim F$ とし, c.d.f. F から定まる確率測度を P としたとき, $X \sim P$ とも書く.

(3) 確率変数 X と Y の分布が同じとき

$$P^X(B) = P^Y(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

も成立する.

問 1.3. 注意 1.26(1) を示せ. 逆像の性質を利用すること.

定理 1.27. 確率変数 X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数とし, F を X の c.d.f. とする. このとき F は次をみたす.

- (1) F は非減少関数; $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- (3) F は右連続関数; $\lim_{y \rightarrow x+0} F(y) = F(x)$.
- (4) F の不連続点は高々可算個.

Proof. 確率変数 X の分布を P とする. すなわち $P(B) := \Pr(X \in B)$ ($\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) である.

- (1) $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ に注意して, 補題 1.7(4) を P に適用すればよい.
- (2) $A_n = (-\infty, n]$ と $A_n = (-\infty, -n]$ として, P に補題 1.7(6)(7) を適用すればよい.
- (3) $A_n = \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$ として, P に補題 1.7(7) を適用すればよい.
- (4) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n := \left\{ r \in \mathbb{R}; \Pr(X = r) > \frac{1}{n} \right\}$$

とおく. $\#A_n \leq n$ となる. なぜならば, n 個を越えてあると仮定すると, その中の n 個を $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ となるように選ぶことができる. すると

$$\begin{aligned} F^X(x_n) &= \Pr(X = x_n) + \lim_{x \rightarrow x_n-0} F^X(x) > \frac{1}{n} + F^X(x_{n-1}) > \dots \\ &> \frac{n-1}{n} + F^X(x_1) > 1 \end{aligned}$$

となり, $0 \leq F^X(x) \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}$) に矛盾する.

$$A := \{r \in \mathbb{R}; \Pr(X = r) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

なので, $\#A$ は高々加算となる. □

問 1.4. 固定した $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)$$

を示せ.

問 1.5. 定理 1.27(1) – (3) の証明を詳しく書き下せ.

定理 1.28. 確率変数 X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数とし, X の c.d.f. を F とする. このとき次の (1) – (3) は同値である.

- (1) F は \mathbb{R} 上の連続関数.
- (2) $F(x) = F(x-) (\forall x \in \mathbb{R})$. ただし, $F(x-) := \sup_y \{F(y); y < x\}$ とした.
- (3) $\Pr(X = x) = 0 (\forall x \in \mathbb{R})$.

Proof. (1) \Rightarrow (2) の証明: $x_n = x - \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x-)$$

である. この式から, F が連続ならば, $F(x) = F(x-)$ となることがわかる.

(2) \Rightarrow (3) の証明:

$$\{X \leq x_n\} \subset \{X \leq x_{n+1}\} (n = 1, 2, \dots), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X < x\}$$

であるので, 補題 1.7(6) より

$$\begin{aligned} F(x-) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X \leq x_n) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right) \\ &= \Pr(X < x) \end{aligned}$$

を得る. さらに補題 1.7(4) より

$$\begin{aligned} \Pr(X = x) &= \Pr\left(\{X \leq x\} \setminus \{X < x\}\right) = \Pr(X \leq x) - \Pr(X < x) \\ &= F(x) - F(x-) \end{aligned} \tag{1.4}$$

であることからわかる. よって, $\Pr(X = 0) = 0$ となる.

(3) \Rightarrow (1) の証明: (1.4) から

$$\Pr(X = x) \Rightarrow F(x) = F(x-)$$

である. このことと F は右連続であることから F は連続となる. 以上から 3 つの条件は同値であることが示せた. \square

問 1.6. 定理 1.28 の記号を踏襲する. 固定した $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ X \leq x - \frac{1}{n} \right\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \leq x - \frac{1}{n} \right\} = \{ \omega \in \Omega; X(\omega) < x \} \\ &= \{ X < x \} \end{aligned}$$

を示せ.

注意 1.29. F が \mathbb{R} 上で連続のとき, $\Pr(X = x) = 0 (\forall x \in \mathbb{R})$ なので, $a < b$ に対して

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a < X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a \leq X < b)$$

である. □

定義 1.30. 確率変数 X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数とし, その c.d.f. と分布を F と P と書く.

(1) X が高々可算個の集合 $\{x_1, x_2, \dots\}$ 上にしか値を取らないとき, X を離散型であるという. この場合には

$$p(x) := \Pr(X = x) = F(x) - F(x-) \quad (x \in \{x_1, x_2, \dots\})$$

で X の分布が特徴付けられる⁹. その p を X の確率関数 (probability mass function (p.m.f.)) と呼ぶ.

(2) $\Pr(X = x) = 0 (\forall x \in \mathbb{R})$ のとき, X を連続型であるという. さらにある非負値関数 p で

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

をみたすものが存在するとき, p を X の確率密度関数 (probability density function (p.d.f.)) という. 特に F がほとんどいたるところ¹⁰ で微分可能ならば, ほとんどいたるところで

$$\dot{F}(x) = \frac{dF}{dx}(x) = p(x)$$

となる.

注意 1.31. 確率変数 X の分布を P とする.

⁹ $p(x) = 0 (x \notin \{x_1, x_2, \dots\})$ となるので, p は \mathbb{R} 上の関数であり, $0 \leq p(x) \leq 1$ となる.

¹⁰この授業では, \mathbb{R} から可算個の点を除いた集合上で微分可能と理解して差し支えない.

(1) X を離散型とし, $S = \{x \in \mathbb{R}; p(x) > 0\}$ とおく¹¹. すると任意の Borel 集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$P(B) = \Pr(X \in B) = \sum_{x \in B \cap S} p(x)$$

が成り立つことを示すことができる.

(2) X を連続型とし, その p.d.f. p が定義されるとする. このとき, 任意の Borel 集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$P(B) = \Pr(X \in B) = \int_B p(x) dx$$

が成り立つことを示すことができる. また,

$$\Pr(B) = \int_B p_1(x) dx = \int_B p_2(x) dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

ならば, 高々可算個の点を除いて, $p_1 = p_2$ となることが知られている. したがって, 1.30(2) の p.d.f. は存在するならば, 高々可算個の点を除いて, 同じ値を取るものになる. これらの主張の厳密な証明は測度論の知識が必要となるので, 証明は省略する.

例 1.32. (1) $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $\Pr(\{0\}) = \Pr(\{1\}) = 1/2$ とし

$$X : \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) = \omega \in \mathbb{R}$$

と定義すれば

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{2}$$

となる. このとき, X の c.d.f. F と p.m.f. p はそれぞれ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}; \quad p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0, 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる.

(2) $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1] := \{B \cap [0, 1]; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ とし

$$\Pr((a, b]) = b - a \quad (0 \leq a < b \leq 1)$$

とする. さらに

$$X : \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) = \omega \in \mathbb{R}$$

と定義すれば, X の c.d.f. F と p.d.f. p はそれぞれ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}; \quad p(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる.

¹¹累積分布関数 F は有界で非減少なので, その不連続点は高々可算個であるから, 下記の式の右辺の和記号が正当化される.

1.3 分位点関数

定義 1.33. c.d.f. F に対して, 分位点関数 (quantile function) $F^- : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F^-(y) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} \quad (0 < y < 1)$$

で定義する. また, $y \in (0, 1)$ に対して, $F^{-1}(y)$ を F の y 分位点とよぶ. $1/2$ 分位点をメディアン (median) と呼ぶ.

注意 1.34. c.d.f. F が連続かつ $\text{supp } F = \{x \in \mathbb{R}; 0 < F(x) < 1\}$ 上で狭義単調増加のとき, F^- は F の逆関数になる. $\text{supp } F$ は累積分布関数が $F(x) > 0$ かつ $F(x) < 1$ となる点 x の全体である. 関数の台はこの集合の閉包で定義するので, 違いに注意せよ. \square

注意 1.35. F^- の定義から, 任意の $0 < y < 1$ に対して, 単調減少列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して

$$F(x_n) \geq y \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = F^{-1}(y)$$

とできる. このとき, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の単調減少性と F の右連続性から

$$F(F^-(y)) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq y \quad (1.5)$$

となることがわかる. よって, F^- の定義における \inf は達成される. \square

注意 1.36. c.d.f. F は連続とする. c.d.f. の性質

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

と F の連続性から, 中間値の定理を用いると任意の $0 < y < 1$ に対して, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して

$$F(x) = y$$

をみたす. ここで, F^- の定義から

$$F^-(y) \leq x \quad (1.6)$$

となる. なぜならば, $F^-(y)$ は条件 $F(z) \geq y$ をみたす $z \in \mathbb{R}$ の \inf である. 一方, $F(x) = y$ だから $x \in \{z \in \mathbb{R} : F(z) \geq y\}$ なので, $x \geq F^-(y)$ がわかる. (1.6) と F の非減少性から

$$F(F^-(y)) \leq F(x) = y \quad (1.7)$$

となる. 一方, F^- の定義から

$$F(F^-(y)) \geq y \quad (1.8)$$

となる. (1.7) と (1.8) を合わせると

$$F(F^-(y)) = y$$

を得る. したがって

$$F \text{ が連続} \Rightarrow F(F^-(y)) = y \quad (0 < \forall y < 1)$$

となる.

注意 1.37. F が不連続ならば

$$F(F^-(y)) = y$$

とは限らない. 反例は, 次の例 1.39 を参照せよ. □

例 1.38. $a < b (a, b \in \mathbb{R})$ とし, $X \sim U(a, b)$ とする. すると X の c.d.f. は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ \frac{x-a}{b-a} & (a < x < b) \\ 1 & (x \geq b) \end{cases}$$

である. よって, F の分位点関数は

$$F^-(y) = a + (b-a)y \quad (y \in (0, 1))$$

となる. □

例 1.39. $\Pr(X=0) = \Pr(X=1) = \frac{1}{2}$ とする. このとき, X の c.d.f. は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

となる. よって, F の分位点関数は

$$F^-(y) = \begin{cases} 0 & \left(0 < y \leq \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{2} < y < 1\right) \end{cases}$$

となる. この場合, $y \neq \frac{1}{2}$ のとき

$$F(F^-(y)) \neq y$$

となる. □

定理 1.40. 分位点関数は以下の性質 (1) ~ (3) をもつ.

(1) F^- は非減少である.

(2) F^- は左連続である. すなわち, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ を任意の非減少列で $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ としたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^-(y_n) = F^-(y)$$

が成立する.

(3) $F^-(y) \leq x \Leftrightarrow y \leq F(x)$ が成立する.

Proof. (1) $y_1 < y_2$ ($y_1, y_2 \in (0, 1)$) に対して

$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y_1\} \supset \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y_2\}$$

となる. 両辺の \inf をとると

$$F^-(y_1) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y_1\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y_2\} = F^-(y_2)$$

となる. よって, F^- の非減少性が証明できた.

(2) $x_n := F^-(y_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく. 数列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ は非減少なので, (1) から $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ も非減少列となる. さらに, $y_n \leq y$ から

$$x_n = F^-(y_n) \leq F^-(y) =: x_0 \tag{1.9}$$

となる. よって, (1.9) の両辺の極限を取ると

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq x_0 \tag{1.10}$$

となる. ここで, $x < x_0$ を仮定して矛盾を導く. そのために

$$\epsilon := \frac{1}{2}(x_0 - x) > 0 \Leftrightarrow x = x_0 - 2\epsilon$$

とおく. F^- の定義から導出された (1.8) に注意すると

$$y_n \leq F(F^-(y_n)) \leq F(x_n) \leq F(x + \epsilon) = F(x_0 - \epsilon)$$

となる. すると

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq F(x_0 - \epsilon)$$

となる. しかし, F^- の定義から

$$F(x_0 - \epsilon) < y$$

となる. なぜならば, $F^-(y) = x_0$ なので, x_0 は条件 $F(z) \geq y$ をみたす z の \inf である. $x_0 > x_0 - \epsilon$ だから, $x_0 - \epsilon \notin \{z \in \mathbb{R} : F(z) \geq y\}$ となる. よって, $F(x_0 - \epsilon) < y$ となることがわかる. 以上から $y \leq F(x_0 - \epsilon)$ かつ $y > F(x_0 - \epsilon)$ となるので, 矛盾. よって

$$F^-(y) = x_0 = x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F^-(y_n)$$

となるので, F^- の左連続性がわかる.

(3) F^- の非減少性から

$$y \leq F(x) \Rightarrow F^-(y) \leq F^-(F(x)) \leq x$$

となる. 最後の不等号は

$$F^-(F(x)) = \inf\{z \in \mathbb{R} : F(z) \geq F(x)\}$$

である. しかし, $x \in \{z \in \mathbb{R} : F(z) \geq F(x)\}$ であるので, $x \geq F^-(F(x))$ がわかる.

逆に, $F^-(y) \leq x$ ならば, (1.8) と F の非減少性から

$$y \leq F(F^-(y)) = F(x)$$

がわかる. よって, (3) は証明された. □

系 1.41. F を c.d.f. とする. このとき, $U \sim U(0, 1)$ に対して

$$X := F^-(U) \sim F$$

となる.

Proof. 定理 1.40(3) から, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{X \leq x\} \Leftrightarrow \{U \leq F(x)\}$$

となる. よって

$$\Pr(X \leq x) = \Pr(U \leq F(x)) = F(x)$$

を得る. □

1.4 主な 1 次元分布

1.4.1 離散型確率変数

Bernoulli 分布

$0 \leq \theta \leq 1$ とする. 確率変数 X は母数 θ の Bernoulli 分布に従うとは, X の p.m.f. $p_\theta(\cdot)$ が

$$p_\theta(x) = p(x) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x} & (x = 0, 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

のときをいう. このことを $X \sim \text{Ber}(\theta)$ と記す.

注意 1.42. $\theta = 0$ のとき, $0^0 = 1$ と定めていることに注意せよ.

2 項分布

$n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta \leq 1$ とする. 確率変数 X は母数 (n, θ) の 2 項分布に従うとは, X の p.m.f. $p_{\theta,n}(\cdot)$ が

$$p_{\theta,n}(x) = p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x(1-\theta)^{n-x} & (x = 0, 1, \dots, n) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

のときをいう. ただし

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}, \quad 0! = 1$$

である. このことを $X \sim \text{Bino}(n, \theta)$ と記す.

問 1.7. $p_{\theta,n}(x)$ を 2 項分布 $\text{Bino}(n, \theta)$ ($0 < \theta < 1$, $n \in \mathbb{N}$) p.m.f. としたとき, $\sum_{x=0}^n p_{\theta,n}(x) = 1$ を確認せよ.

幾何分布

$0 < \theta < 1$ とする. 確率変数 X は (母数 θ の幾何分布に従うとは, X の p.m.f. $p(\cdot|\theta)$ が

$$p_\theta(x) = p(x) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^{x-1} & (x = 1, 2, \dots) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

のときをいう. このことを $X \sim \text{Geo}(\theta)$ と記す.

問 1.8. $p_\theta(x)$ を幾何分布 $\text{Geo}(\theta)$ ($\theta > 0$) の p.m.f. としたとき, $\sum_{x=0}^{\infty} p_\theta(x) = 1$ を確認せよ.

Poisson 分布

$\theta > 0$ とする. 確率変数 X は母数 θ の Poisson 分布に従うとは, X の p.m.f. $p_\theta(\cdot)$ が

$$p_\theta(x) = p(x) = \begin{cases} e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} & (x = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

のときをいう. このことを $X \sim \text{Po}(\theta)$ と記す.

問 1.9. $p_\theta(x)$ を Poisson 分布 $\text{Po}(\theta)$ ($\theta > 0$) の p.m.f. としたとき, $\sum_{x=0}^{\infty} p_\theta(x) = 1$ を確認せよ.

1.4.2 連続型確率変数

正規分布

$\mu \in \mathbb{R}, 0 < \sigma < \infty$ とする. 確率変数 X は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布¹²に従うとは, X の p.d.f. $p_{\mu, \sigma^2}(\cdot)$ が

$$p_{\mu, \sigma^2}(x) = p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (-\infty < x < \infty)$$

のときをいう. ただし $\exp(x) = e^x$ である. このことを $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ と記す. $\mu = 0, \sigma = 1$ のときの分布を標準正規分布という.

注意 1.43. p.d.f. $p_{\mu, \sigma^2}(x)$ のグラフは単峰型であり, μ に関して左右対称となる. さらに, μ が p.d.f. $p_{\mu, \sigma^2}(x)$ のグラフの峰の位置に対応することがわかる. また, σ が大きくなると p.d.f. $p_{\mu, \sigma^2}(x)$ のグラフの裾が長くなるのがわかる.

注意 1.44. よく知られている事実として

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

がある. $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t^2} \in (0, \infty)$ は偶関数であることに注意して, $t = z/\sqrt{2}$ と変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

¹²母数 (μ, σ^2) を平均と分散となぜ呼ぶかは第 2 章で判明する.

となることがわかる. さらに, $z = (x - \mu)/\sigma$ と変数変換をすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu, \sigma^2}(x) dx = 1$$

となることが確認できる. □

ガンマ分布

$\alpha > 0, \beta > 0$ とする. 確率変数 X は母数 (α, β) のガンマ分布に従うとは, X の p.d.f. $p_{\alpha, \beta}(\cdot)$ が

$$p_{\alpha, \beta}(x) = p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

のときをいう. ただし

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\alpha > 0)$$

である. このことを $X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ と記す. $\lambda > 0$ とし, $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\lambda}$ とおく. このとき, $\text{Ga}(1, 1/\lambda)$ を母数 λ の指数分布といい, $\text{Exp}(\lambda)$ と書く. また, $p \in \mathbb{N}$ とし, $\alpha = \frac{p}{2}, \beta = 2$ とおく. このとき, $\text{Ga}(p/2, 2)$ を自由度 p の χ^2 分布といい, χ_p^2 と記す.

問 1.10. $p(x|\alpha, \beta)$ をガンマ分布 $\text{Ga}(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) の p.d.f. としたとき, $\int_0^{\infty} p_{\alpha, \beta}(x) dx = 1$ を示せ.

1.5 2次元の分布

1.5.1 同時確率関数と確率密度関数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ 上の離散型確率変数 (X, Y) の対に対して, 同時確率関数 (同時 p.m.f.) p を

	Y = 0	Y = 1	
X = 0	1/9	2/9	1/3
X = 1	2/9	4/9	2/3
	1/3	2/3	

で定める. たとえば

$$p(1, 1) = \text{Pr}(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{9}$$

である.

定義 1.45. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数 X, Y は連続型とする. \mathbb{R}^2 上の非負値実数値関数 \mathbf{p} が確率ベクトル (X, Y) の同時確率密度関数 (同時 p.d.f.) であるとは, 次の条件をみたすときをいう.

- (1) $\mathbf{p}(x, y) \geq 0 \ (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$.
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(x, y) \, dx dy = 1$.
- (3) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\Pr((X, Y) \in A) = \int \int_A \mathbf{p}(x, y) \, dx dy.$$

注意 1.46. (X, Y) の同時累積分布関数 (同時 c.d.f.) F を

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= \Pr(X \leq x, Y \leq y) && (1.11) \\ &:= \Pr\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} && (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

で定義する. (X, Y) の同時分布 P を

$$P(A) = \Pr((X, Y) \in A) \quad (\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \quad (1.12)$$

で定義する. どの確率変数の c.d.f. または確率分布であることを明示したいときには, $F^{(X, Y)}$ または $P^{(X, Y)}$ と記す.

細かなことであるが, (1.11) の F によって $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ 上の確率測度 P を一意的に定めていることができる. この点に関しては補遺 ?? 章の測度論の知識が必要となる. □

例 1.47. 連続型確率変数のベクトル (X, Y) は同時 p.d.f.

$$\mathbf{p}(x, y) = \begin{cases} x + y & (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を持つとする. このとき集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \mathbf{p}(x, y) > 0\}$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{p}(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 x \, dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_0^1 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dy + \int_0^1 \frac{1}{2} dx = 1 \end{aligned}$$

となる. □

1.5.2 周辺分布

定義 1.48. (X, Y) を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上で定義された確率ベクトルとする.

(1) (X, Y) が離散型で同時 p.m.f. \mathbf{p} を持つとする. X の周辺確率関数 (周辺 p.m.f.) を

$$\mathbf{p}^X(x) = \Pr(X = x) = \sum_{y \in S_Y} \Pr(X = y, Y = y) = \sum_{y \in S_Y} \mathbf{p}(x, y) \quad (\forall x \in S_X)$$

で定義する. ただし

$$S_X := \{x \in \mathbb{R}; \text{ある } y \in \mathbb{R} \text{ に対して, } \mathbf{p}(x, y) > 0\}$$

$$S_Y := \{y \in \mathbb{R}; \text{ある } x \in \mathbb{R} \text{ に対して, } \mathbf{p}(x, y) > 0\}$$

である.

(2) (X, Y) は連続型とし, 同時 p.d.f. \mathbf{p} を持つとする. このとき X の周辺確率密度関数 (周辺 p.d.f.) を

$$\mathbf{p}^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(x, y) dy \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

で定義し, Y の周辺確率密度関数 (周辺 p.d.f.) を

$$\mathbf{p}^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(x, y) dx \quad (\forall y \in \mathbb{R})$$

で定義する.

注意 1.49. 連続型確率ベクトル (X, Y) に対して

$$\begin{aligned} F^X(x) &:= \Pr(X \leq x) = \int \int_{(s,t) \in \mathbb{R}^2; s \leq x} \mathbf{p}(s, t) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}(s, t) ds \right\} dt = \int_{-\infty}^x \mathbf{p}^X(s) ds \end{aligned}$$

となるので, X の周辺 p.d.f. と X の p.d.f. は高々可算個の点を除いて同じ値を取ることがわかる. \square

注意 1.50. F を確率ベクトル (X, Y) の同時 c.d.f. とし, F^X を X の周辺 c.d.f. とする. このとき $x \in \mathbb{R}$ と $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$F^X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y); \quad F^Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

が成立する. \square

問 1.11. 注意 1.50 の式を証明せよ.

1.5.3 独立性な分布と条件付き分布

定義 1.51. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の 2 つの確率変数 X と Y は独立であるとは, $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\Pr(X \in A, Y \in B) = \Pr(X \in A)\Pr(Y \in B)$$

が成り立つときをいう. 独立でないとき X と Y は従属であるという.

定理 1.52. \mathbf{p} を確率ベクトル (X, Y) の同時 p.d.f. とし, \mathbf{p}^X と \mathbf{p}^Y を X と Y それぞれの周辺 p.d.f. とする. このとき

$$X \text{ と } Y \text{ は独立} \Leftrightarrow \mathbf{p}(x, y) = \mathbf{p}^X(x)\mathbf{p}^Y(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

となる.

Proof. 独立ならば, 同時 p.d.f. が周辺 p.d.f. の積で表現されることの証明は易しい. 逆はこの講義の範囲 (測度の拡張の議論が必要となる!) を超えるので, 信じることにする. \square

注意 1.53. (1) 連続型の場合には, 測度 0 の集合を除いて¹³p.d.f. は定義されるので, 定理 1.52 の書き方はやや数学的な厳密性に欠ける.

(2) 離散型確率変数の場合には, p.d.f. を p.m.f. に置き換えればよい. \square

例 1.54. 連続型確率変数 X と Y は独立で同時 p.d.f.

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を持つとする. このとき確率 $\Pr(X + Y \leq 1)$ を求めてみよう. 独立性より (X, Y) の同時 p.d.f. は

$$\mathbf{p}^{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 4xy & (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} \Pr(X + Y \leq 1) &= \int \int_{x+y \leq 1} \mathbf{p}^{(X,Y)}(x, y) \, dx dy = 4 \int_0^1 x \left\{ \int_0^{1-x} y \, dy \right\} dx \\ &= 4 \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる. \square

¹³この用語は定義されていない. 「有限個の点を除いて」と理解してもこの講義の内容の範囲では問題ない.

定理 1.55. 連続型確率ベクトル (X, Y) は同時 p.d.f. $p(x, y)$ を持つとする. ただし $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; p(x, y) > 0\}$ は矩形¹⁴ とする. このときある非負値関数 q と r が存在して

$$p(x, y) = q(x)r(y)$$

と書けるとき, X と Y は独立である.

Proof. 積分をして確かめればよい. □

注意 1.56. 定理 1.55 の主張も「ほとんど至る所」でよい. □

例 1.57. 連続型確率ベクトル (X, Y) は同時 p.d.f.

$$p(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & (x > 0, y > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を持つとする. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; p(x, y) > 0\} = (0, \infty)^2$ なので

$$q(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases};$$

$$r(y) = \begin{cases} e^{-y} & (y > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

と取れば

$$p(x, y) = q(x)r(y)$$

となるので, X と Y は独立である. □

定義 1.58. (1) 離散型確率ベクトル (X, Y) は同時 p.m.f. $p(x, y)$ を持つとする. $p_Y(y) > 0$ なる y に対して, $Y = y$ を与えたときの X の条件付き確率関数 (条件付き p.m.f.) を

$$p^{X|Y}(x|y) = \Pr(X = x|Y = y) = \frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p^Y(y)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義する.

(2) 連続型確率ベクトル (X, Y) は同時 p.d.f. $p(x, y)$ を持つとする. $p^Y(y) > 0$ なる y に対して, $Y = y$ を与えたときの X の条件付き確率密度関数 (条件付き p.d.f.) を

$$p^{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p^Y(y)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義する.

¹⁴有界でなくともよい.

注意 1.59. (X, Y) が連続型確率ベクトルのとき, $p^Y(y) > 0$ なる $y \in \mathbb{R}$ に対して, $Y = y$ を与えたときの事象 $\{X \in A\}$ の条件付き確率を

$$\Pr(X \in A | Y = y) := \int_A p^{X|Y}(x|y) dx \quad (\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

と形式的に定義する. □

例 1.60. 連続型確率ベクトル (X, Y) は同時 p.d.f.

$$p(x, y) = \begin{cases} x + y & (0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を持つとする. このとき $\Pr(X \leq 1/4 | Y = 1/3)$ を求めてみよう. まず $0 < y < 1$ に対して

$$p^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx = y + \int_0^1 x dx = y + \frac{1}{2}$$

となる. したがって

$$p^Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & (0 < y < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる. よって $0 < y < 1$ と $0 < x < 1$ に対して

$$p^{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p^Y(y)} = \frac{x + y}{y + \frac{1}{2}}$$

となる. これより $0 < y < 1$ のとき

$$p^{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{x + y}{y + \frac{1}{2}} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる. 注意 1.59 より

$$\Pr\left(X \leq \frac{1}{4} \mid Y = \frac{1}{3}\right) = \int_0^{1/4} p^{X|Y}\left(x \mid \frac{1}{3}\right) dx = \int_0^{1/4} \frac{x + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} dx = \frac{11}{80}$$

となる. □

1.6 多次元分布と i.i.d. 標本

X_1, X_2, \dots, X_n を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数とし

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$$

と書く. \mathbf{X} を確率ベクトルという.

注意 1.61. 本講義録では、ベクトルは縦ベクトルとする. □

定義 1.62. X_1, X_2, \dots, X_n が独立であるとは、すべての Borel 集合 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\Pr(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{j=1}^n \Pr(X_j \in A_j) \quad (1.13)$$

が成立するときである.

注意 1.63. \mathbf{X} の同時 p.d.f. を $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書き、各 $X_j (j = 1, 2, \dots, n)$ の周辺 p.d.f. を p^{X_j} と書くことにする. (1.13) を示すためには

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n p^{X_j}(x_j) \quad (\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R})$$

を示せばよい. □

定義 1.64. X_1, X_2, \dots, X_n は独立で、各 $X_j (j = 1, 2, \dots, n)$ は同じ c.d.f. F を持つとき、 X_1, X_2, \dots, X_n は独立同一分布に従う (i.i.d. = identically and independently distributed) といひ

$$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F$$

と書く¹⁵. X_1, X_2, \dots, X_n は累積分布関数 F からの標本の大きさが n のランダム標本ともいふ.

1.6.1 重要な多次元分布モデル

この本で取り上げる代表的な多次元分布モデルをあげておく. 離散型分布は多項分布, 連続型分布は多変量正規分布である.

多項分布

2 項分布を多変量にしたものが多項分布である. $d, n \in \mathbb{N}$ とし、 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $p_j (0 \leq p_j \leq 1; j = 1, 2, \dots, d)$, $\sum_{j=1}^d p_j = 1$ とす

¹⁵p.d.f. p を使い

$$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} p$$

と書く. \sim の右側には、確率測度/確率分布/p.d.f./p.m.f./ $N(0, 1)$ など分布を特定するものを書いてよいことにする.

る. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ は母数 (d, \mathbf{p}) の多項分布に従うとは, \mathbf{X} の p.m.f. が

$$p_{n,d,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \binom{d}{x_1, x_2, \dots, x_d} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \times \dots \times p_d^{x_d} & \begin{pmatrix} x_j = 0, 1, \dots, n; \\ j = 1, 2, \dots, d \end{pmatrix} \\ 0 & \text{(その他の場合)} \end{cases}$$

で与えられたときをいう. ただし, $\sum_{j=1}^d x_j = n$ で

$$\binom{n}{x_1 x_2, \dots, x_d} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_d!}, \quad 0! = 1$$

である. これを $\mathbf{X} \sim \text{Multi}_d(n, \mathbf{p})$ と記す.

補題 1.65. $\mathbf{X} \sim \text{Multi}_d(n, \mathbf{p})$ とする. ただし, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ と $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ とする. このとき X_j ($j = 1, 2, \dots, d$) の周辺分布は $\text{Bino}(n, p_j)$ である.

Proof. x_2 から x_d について同時 p.m.f. の和をとればよい. □

多変量正規分布

$Z_1, Z_2, \dots, Z_d \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ に対して

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_d \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

と定める¹⁶. すると \mathbf{Z} の同時 p.d.f. は

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= p^{\mathbf{Z}}(z_1, z_2, \dots, z_d) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z_j^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d z_j^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top \mathbf{z}\right\} \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

¹⁶この節ではベクトルは縦とする. 下の式では縦ベクトルと横ベクトルを混せて表現している. これは記号の乱用であるが, $f((z_1, z_2, \dots, z_d)^\top)$ などと書くのは煩わしい.

と書ける. ただし $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_d)^\top$ である. これを $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}_d(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$ と記す. ただし \mathbf{I}_d は d 次単位行列である. さらに定義より

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{p}^{\mathbf{Z}}(z_1, z_2, \dots, z_d) dz_1 dz_2 \cdots dz_d = 1$$

となっていることもわかる.

次に

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \cdots & \sigma_{dd} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ (i, j = 1, 2, \dots, d) \end{matrix}$$

とする. ただし $\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値対称行列¹⁷とする. このとき, ある $d \times d$ の正則行列 \mathbf{A} が存在して

$$(1) \mathbf{A} \text{ は対称行列, } (2) \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}^2$$

と取れる. これを $\boldsymbol{\Sigma}$ の平方根といい, $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ と書くことにする. これを用いて

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{Z} \tag{1.15}$$

と定めたとき, \mathbf{X} の分布を $\mathbf{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ と記す. このとき \mathbf{X} の同時 p.d.f. は

$$\mathbf{p}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d) \tag{1.16}$$

で与えられる. ただし, $\det(\cdot)$ は行列式を表す. この分布を平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$, 分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の d 変量正規分布という.

注意 1.66. (1.16) の導出は以下のように行うことができる. 一般に

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)^\top$$

を d 次元確率ベクトルとし, その同時 p.d.f. を $\mathbf{p}^{\mathbf{Z}}$ と書くことにする. さらに $\mathbb{Z} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d; \mathbf{p}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) > 0\}$ とし, 関数

$$\mathbf{h}(\cdot) = (h_1(\cdot), h_2(\cdot), \dots, h_d(\cdot))^\top : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{h}(\mathbb{Z})$$

は 1 対 1 とし, $j = 1, 2, \dots, d$ に対して

$$X_j = h_j(Z_1, Z_2, \dots, Z_d); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^\top$$

¹⁷ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_d)$ に対して, $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} > 0$ が成立する. したがって, 逆行列 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ が存在する.

とおく. \mathbf{h} は 1 対 1 なので, \mathbf{h} の逆写像を

$$\mathbf{h}^{-1} = (h_1^{-1}, h_2^{-1}, \dots, h_d^{-1})^\top : \quad \mathbf{h}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が存在すると仮定する. よって, $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{h}(z)) = z$ なので, $\mathbf{Z} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{X})$ となる. ここで, すこし記号の乱用をしている. すなわち, h_j^{-1} は \mathbf{h}^{-1} の第 j 成分の表記であって, h_1 の逆関数ではないことに注意せよ. 変換 \mathbf{h} の Jacobian を

$$J_{\mathbf{h}}(z) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(z)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_1(z)}{\partial z_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_d(z)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_d(z)}{\partial z_d} \end{pmatrix}$$

とおく. さらに, \mathbf{X} の同時 p.d.f. を求めるために, $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x})$ の Jacobian $\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_d^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_d^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

で定める.

$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(z) \neq 0 (z \in \mathbb{Z})$ ¹⁸ が成立するとき

$$p^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{p^{\mathbf{Z}}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}))}{J_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}))} = |\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x})| p^{\mathbf{Z}}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x})) \quad (1.17)$$

となることが知られている. これは, 標準的な多変数の積分の変換公式からわかる.

すると $\mathbf{h}(z) = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}z \Leftrightarrow \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ より

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x}) = \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}}$$

を (1.17) に代入すれば, (1.16) はわかる. 以上の議論から

$$\int \int \dots \int_{\mathbb{R}^d} p^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_d = \int \int \dots \int_{\mathbb{R}^d} p^{\mathbf{Z}}(z) dz_1 dz_2 \dots dz_d = 1$$

となっていることもわかる. □

問 1.12. $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ のとき

$$J_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}}$$

を示せ.

¹⁸実は, a.e \mathbb{X} でよい.

注意 1.67. Σ を半正定値としたときに, 多変量正規分布を (1.14) と変換 (1.15) を用いて定義することが出来る. しかし, $\det(\Sigma) = 0$ のときは, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して, 確率 $\Pr(\mathbf{X} \in B)$ は定義できるが, \mathbf{X} は同時 p.d.f. を持たないことが知られている. このような分布を退化した多変量正規分布という. \square

定理 1.68. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^\top \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ とする. ただし $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ で, Σ は $d \times d$ の正定値行列である. このとき次が成立する.

- (1) $X_j (j = 1, 2, \dots, d) \sim N(\mu_j, \sigma_{jj})$. ただし μ_j は $\boldsymbol{\mu}$ の第 j 成分, σ_{jj} は Σ の第 j 対角成分である.
- (2) $X_\ell = x_\ell (\ell = 1, 2, \dots, d)$ を与えたときの $X_j (j \neq \ell)$ の条件付き分布は

$$X_j | X_\ell = x_\ell \sim N\left(\mu_j + \frac{\sigma_{j\ell}}{\sigma_{\ell\ell}}(x_\ell - \mu_\ell), \sigma_{jj} - \frac{\sigma_{j\ell}^2}{\sigma_{\ell\ell}}\right)$$

となる.

- (3) 定数ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d (\mathbf{c} \neq \mathbf{0}_d)$ に対して

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{X} \sim N(\mathbf{c}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}^\top \Sigma \mathbf{c})$$

となる. ただし, $\mathbf{0}_d$ は \mathbb{R}^d の零ベクトルである.

- (4) $V := (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_d^2$ である. なお, 自由度 d の χ^2 分布 χ_d^2 は定義 1.74 で導入する.

Proof. (1) $j = 1$ として示す. Σ の $(i, j) (i, j = 1, 2, \dots, d)$ 成分を σ_{ij} と書き, $(d-1) \times (d-1)$ 行列 Σ_1 と $(d-1) \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_1$ をそれぞれ

$$\Sigma_1 = (\sigma_{ij})_{i,j=2,3,\dots,d}, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = (\sigma_{21}, \sigma_{31}, \dots, \sigma_{d1})^\top$$

で定める. すると

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_{11} & \boldsymbol{\sigma}_1^\top \\ \hline \boldsymbol{\sigma}_1 & \Sigma_1 \end{array} \right)$$

となる. このとき

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{d-1}^\top \\ \hline \sigma_{11}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_1 & \mathbf{I}_{d-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \sigma_{11} & \mathbf{0}_{d-1}^\top \\ \hline \mathbf{0}_{d-1} & \Sigma_1 - \sigma_{11}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_1^\top \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \sigma_{11}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_1^\top \\ \hline \mathbf{0}_{d-1} & \mathbf{I}_{d-1} \end{array} \right)$$

と書ける. ただし \mathbf{I}_{d-1} は $(d-1)$ 次の単位行列で, $\mathbf{0}_{d-1}$ は $(d-1) \times 1$ の零ベクトルである. Σ が正定値ならば, $\Sigma_2 - \sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1^\top$ も正定値であるので

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1^\top \\ \hline \mathbf{0}_{d-1} & \mathbf{I}_{d-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \sigma_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{d-1}^\top \\ \hline \mathbf{0}_{d-1} & \{\Sigma_2 - \sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1^\top\}^{-1} \end{array} \right) \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{d-1}^\top \\ \hline -\sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1 & \mathbf{I}_{d-1} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

となる. $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d)^\top$ と $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^\top$ と書いたときに, $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_d)^\top$ と $\mathbf{x}_1 = (x_2, x_3, \dots, x_d)^\top$ とおく. (1.18) から

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{\sigma_{11}}(x_1 - \mu_1)^2 \\ &\quad + \text{tr} \left[\left(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_{11}}\boldsymbol{\sigma}_1 \right)^\top \left\{ \Sigma_2 - \sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1^\top \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_{11}}\boldsymbol{\sigma}_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} &=: \frac{1}{\sigma_{11}}(x_1 - \mu_1)^2 + g_{d-1}(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

となる. ただし

$$\begin{aligned} g_{d-1}(\mathbf{x}_1) &= \text{tr} \left[\left(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_{11}}\boldsymbol{\sigma}_1 \right)^\top \left\{ \Sigma_2 - \sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1^\top \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_{11}}\boldsymbol{\sigma}_1 \right) \right] \end{aligned}$$

である. このことから

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] dx_2 dx_3 \times dx_d \\ &= \exp \left[-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_{11}} \right] \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \exp \left[-\frac{1}{2} g_{d-1} \right] dx_2 dx_3 \times dx_d \\ &= \exp \left[-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_{11}} \right] \det \left(2\pi(\Sigma_2 - \sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1^\top) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

がわかる. よって

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} p^{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \Sigma) dx_2 dx_3, \dots, dx_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{11}}} \exp \left[-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_{11}} \right]$$

がわかる.

- (2) (1.20) からわかる.
 (3) $\mathbf{c}^\top \mathbf{X}$ の第 2 章で定義する積率を計算すればよい.
 (4) (3) から

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_d(\mathbf{0}_d, \mathbf{I}_d)$$

となる. あとは χ^2 分布の定義からわかる. □

(1.17) を用いた例題を述べておく

例 1.69. 連続型確率ベクトル (X_1, X_2) は同時 p.d.f.

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を持つとする. さらに

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, y_2 = h_2(x_1, x_2) = x_2 \\ \Leftrightarrow x_1 &= h_1^{-1}(y_1, y_2), x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) \end{aligned}$$

とし, $\mathbf{Y} = (h_1(X_1, X_2), h_2(X_1, X_2))^\top$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top$ とする. なお, 上式では記号の乱用をしている. h_1^{-1}, h_2^{-1} は単に \mathbf{h}^{-1} の成分を表し, h_1, h_2 の逆写像ではないことに注意せよ. このとき

$$J_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1^{-1}(\mathbf{y})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2^{-1}(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2^{-1}(\mathbf{y})}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

より

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= \begin{cases} 1 & (0 < y_1 - y_2 < 1, 0 < y_2 < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & (y_2 < y_1 < 1 + y_2, 0 < y_2 < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

を得る. また

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} p^{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 = 1$$

となっていることに注意せよ. □

1.7 正規分布に関連した分布

この節では、正規分布に関連した分布であるガンマ分布、 χ^2 分布、 F 分布、 t 分布を定義し、これらの基本的な性質を述べる。これらの分布は正規母集団から標本に基づく統計量の分布（いわゆる標本分布）の議論で重要な役割を担う。

まず、ガンマ関数を導入する。 $\alpha > 0$ に対してガンマ関数を

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

で定義する。 $\alpha > 1$ のとき、部分積分により

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx \\ &= (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1) \end{aligned}$$

となる。 $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ なので、帰納法により

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。

1.7.1 ガンマ分布

定義 1.70. (ガンマ分布) $\alpha, \beta > 0$ とする。連続型確率変数 X が母数 (α, β) のガンマ分布に従うとは、 X の p.d.f. が

$$p_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられるときをいう。これを $X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ と記す。

補題 1.71. $n \geq 2$ は自然数とする。 X_1, X_2, \dots, X_n は独立な確率変数、各 $X_j \sim \text{Ga}(\alpha_j, \beta)$ ($j = 1, 2, \dots, n, \alpha_j > 0, \beta > 0$ としたとき

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Ga}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \beta)$$

となる。

Proof. 証明は次の補題を用いてする。 □

補題 1.72. 連続型確率変数 X, Y は独立とし、それぞれの p.d.f. を p^X, p^Y とする. このとき $X + Y$ の p.d.f. は

$$p^{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p^X(x-y)p^Y(y) dy$$

で与えられる.

Proof. X, Y の同時 p.d.f. は $p^X(x)p^Y(y)$ になることに注意する. $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \Pr(X + Y \leq t) &= \int \int_{x+y \leq t} p^X(x)p^Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p^Y(y) \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} p^X(x) dx \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p^Y(y) \left\{ \int_{-\infty}^t p^X(z-y) dz \right\} dy \\ &\quad (x|_{-\infty}^{t-y} = z-y|_{-\infty}^t \text{ と変換}) \\ &= \int_{-\infty}^t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p^X(z-y)p^Y(y) dy \right\} dz \end{aligned}$$

となる. よって微積分の基本定理より

$$p^{X+Y}(t) = \frac{d}{dt} \Pr(X + Y \leq t) = \int_{-\infty}^{\infty} p^X(t-y)p^Y(y) dy$$

を得る. □

補題 1.71 の証明. $X_1 \sim \text{Ga}(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \text{Ga}(\alpha_2, \beta)$ とし, X_1 と X_2 は独立とする. $\text{Ga}(\alpha, \beta)$ の p.d.f. を $p(\cdot | \alpha, \beta)$ と書く. 補題 1.72 より

$$\begin{aligned} p^{X_1+X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y | \alpha_1, \beta)p(y | \alpha_2, \beta) dy \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta x} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} dy \\ &\quad (x-y > 0 \text{ かつ } y > 0 \text{ より } 0 < y < x \text{ となる.}) \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta x} \int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} dz \\ &\quad (y = xz \text{ と変換}) \end{aligned}$$

を得る. ここで $p^{X_1+X_2}$ は p.d.f. であることに注意すれば

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty p^{X_1+X_2}(x) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} dz \right) \beta^{\alpha_1+\alpha_2} \int_0^\infty x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} dz \right) \int_0^\infty w^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-w} dw \\ &\quad (w = \beta x \text{ と変換}) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} dz \quad (\text{ガンマ関数の定義より}) \end{aligned}$$

より

$$\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} dz = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (1.21)$$

を得る. よって

$$X_1 + X_2 \sim \text{Ga}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

がわかる. あとはこのことを繰り返せばよい.

注意 1.73. $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ に対して

$$B(\alpha_1, \alpha_2) := \int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-1} z^{\alpha_2-1} dz$$

をベータ関数とよぶ. すると (1.21) から

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

という関係式が成り立つことがわかる. □

1.7.2 χ^2 分布

定義 1.74. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ とする.

$$S = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$$

の分布を自由度 n の χ^2 分布といい, $S \sim \chi_n^2$ と記す.

$Z \sim N(0, 1)$ のとき $Y = Z^2$ の p.d.f. は

$$p^Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} & (y > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \quad (1.22)$$

となる. 演習問題 1.2 を参照せよ. 一方, $\text{Ga}(1/2, 1/2)$ の p.d.f. は

$$p_{1/2, 1/2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2})} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} & (y > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

であった. これらはともに p.d.f. なので, 積分をすれば 1 となる. このことより

$$\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

を得る. さらに補題 1.71 より

$$\chi_n^2 = \text{Ga}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

がわかる. よって χ_n^2 の p.d.f. は

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

である.

1.7.3 F 分布

定義 1.75. $k, m \in \mathbb{N}$ とする. X と Y は独立で $X \sim \chi_k^2$ と $Y \sim \chi_m^2$ とする. このとき

$$F = \frac{X/k}{Y/m}$$

の分布を自由度 (k, m) の F 分布といい, $F \sim F(k, m)$ と記す.

注意 1.76. 上の定義では, F 分布の記号を $F(k, m)$ と書いた. 分布関数の記号と同じ F の字体 F を使用しているが, 文脈から判断できるので記号の乱用をする. \square

補題 1.77. $k, m \in \mathbb{N}$ とする. $F \sim F(k, m)$ のとき, F の p.d.f. $p(x|k, m)$ は

$$p_{k,m}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{k^{k/2}m^{m/2}x^{(k/2)-1}}{(m+kx)^{(k+m)/2}} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる.

Proof. 証明は次の補題を用いて行う. □

補題 1.78. X, Y を正值の連続型確率変数とし, それぞれの p.d.f. を $p^X(x)$ と $p^Y(x)$ とする. このとき

$$Z = \frac{X}{Y}$$

の p.d.f. は

$$p^Z(z) = \begin{cases} \int_0^\infty yp^X(zy)p^Y(y) dy & (z > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる.

Proof. 仮定から (X, Y) の同時 p.d.f. は $p^X(x)p^Y(y)$ となる. よって $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \Pr(Z \leq t) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^{ty} p^X(x)p^Y(y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t p^X(zy)p^Y(y)y dz \right\} dy \quad (x = zy \text{ と変換}) \\ &= \int_0^t \left\{ \int_0^\infty p^X(zy)p^Y(y)y dy \right\} dz \end{aligned}$$

となる. ここで微積分の基本定理を用いると

$$p^Z(t) = \frac{d}{dt}\Pr(Z \leq t) = \int_0^\infty yp^X(ty)p^Y(y) dy$$

となる. □

補題 1.77 の証明 補題 1.78 を用いる. $z > 0$ のとき, $Z = X/Y$ の

p.d.f. は

$$\begin{aligned}
 p^Z(z) &= \int y p^X(zy) p^Y(y) dy \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty y (zy)^{(k/2)-1} e^{-(zy)/2} y^{(m/2)-1} e^{-y/2} dy \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+m)/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} \int_0^\infty y^{(k+m)/2-1} e^{-(z+1)y/2} dy \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+m)/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} \int_0^\infty \left(\frac{2x}{z+1}\right)^{(k+m)/2-1} e^{-x} \frac{2}{z+1} dx \\
 &\quad (x = \frac{z+1}{2}y \text{ と変換}) \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} (1+z)^{-(k+m)/2} \int_0^\infty x^{(k+m)/2-1} e^{-x} dx \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} (1+z)^{-(k+m)/2}
 \end{aligned}$$

となる. $F = \frac{m}{k}Z$ なので

$$p_{k,m}(x) = p^Z\left(\frac{k}{m}x\right) \frac{k}{m}$$

となる. この式を整理すると主張は証明される.

1.7.4 t 分布

定義 1.79. $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ のとき

$$T = \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2)}}$$

を自由度 n の t 分布といい, これを $T \sim t_n$ と記す.

補題 1.80. T の p.d.f. は

$$p_n^T(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる

Proof. 定義より

$$T^2 \sim F(1, n)$$

であることをまず思い出す. T の分布は対称なので

$$p_n^T(x) = p_n^T(-x) \quad (x \geq 0)$$

となる. よって $x > 0$ に対して

$$2\Pr(0 \leq T \leq x) = \Pr(-x \leq T \leq x) = \Pr(T^2 \leq x^2)$$

となる. 上の式から $F(1, n)$ の p.d.f. を $p_{1,n}(\cdot)$ と書けば

$$2 \int_0^x p^T(t|n) dt = \int_0^{x^2} p_{1,n}(t) dt$$

となる. さらに, $t \mapsto t^2$ と変換すると

$$\int_0^{x^2} p_{1,n}(t) dt = \int_0^x p_{1,n}(t^2) 2t dt \quad (1.23)$$

となる. ここで補題 1.77 から

$$p_{1,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n^{n/2}x^{-1/2}}{(n+x)^{(n+1)/2}}$$

であることを思い出す. この式を (1.23) の右辺に代入すると

$$p^T(x|n) = p_{1,n}(x^2)x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

となる. □

1.8 章末注釈と参考文献

第 1.1 節は [28] を参照した. 第 1.2 節は [8] を参照した. 第 1.3 節から第 1.6 節は [36] を参照した. 第 1.7 節は [23] からの借用である.

1.9 演習問題

演習問題 1.1. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の離散型確率変 X は以下の p.m.f. を持つ:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} & (x = 0, 1, 2, 3) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

である. ただし

$$\binom{3}{x} = \frac{3!}{x! \times (3-x)!}, \quad 0! = 1$$

である.

- (1) $p(0), p(1), p(2), p(3)$ の値を計算せよ.
- (2) $\Pr(0 < X < 3)$ を求めよ.

演習問題 1.2. $Z \sim N(0, 1)$ とする. Z の p.d.f. を

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (-\infty < z < \infty)$$

としたとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の $y > 0$ に対して, $\Pr(Z^2 \leq y)$ を p も用いて表現せよ.
- (2) $Y := Z^2$ とし, Y の p.d.f. を p^Y と書く. このとき, $y > 0$ に対して

$$p^Y(y) = \frac{d}{dy} \Pr(Y \leq y)$$

となることを利用して, Y の p.d.f. が (1.22) で与えられることを示せ.

演習問題 1.3. X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の連続型確率変数とし, X の p.d.f. を

$$p(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

とする. さらに, 離散型確率変数 Y を

$$Y := \mathbf{1}_{(1/2, \infty)}(X) := \begin{cases} 1 & (X > \frac{1}{2}) \\ 0 & (X \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 確率変数 X の c.d.f. を求めよ. なお, X の c.d.f. を F と書くことにする.
- (2) 確率変数 Y の p.m.f. を求めよ. なお, X の p.m.f. を p^Y と書くことにする.
- (3) 確率 $\Pr\left(0 < X \leq \frac{1}{2}\right)$, $\Pr(Y = 0)$ を求めよ.
- (4) 確率 $\Pr\left(0 < X \leq \frac{1}{2}, Y = 0\right)$ を求めよ.
- (5) 確率変数 X と Y は独立か従属かを判定せよ.

演習問題 1.4. 大小 2 つのサイコロを投げたとき, それぞれの出る目を X と Y とおく. これらを確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上で定義されている確率変数と考える. この空間上の確率変数 Z と W を

$$Z(\omega) = \min\{X(\omega), Y(\omega)\}, \quad W(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 確率ベクトル (Z, W) の同時 p.m.f. $p^{(Z, W)}$ を求めよ.
- (2) 確率 $\Pr(Z = W)$ と条件付き確率 $\Pr(Z = 2 | W < 5)$ を求めよ.
- (3) 確率変数 Z の周辺 p.m.f. p^Z を求めよ.
- (4) 確率変数 W の周辺 p.m.f. p^W を求めよ.
- (5) 確率変数 Z と W は独立であるかどうかを判定せよ.

演習問題 1.5. p を自然数とする. 連続型確率変数 T は p.d.f.

$$p^T(t) = \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)} \frac{1}{\sqrt{p\pi}} \frac{1}{(1+t^2/p)^{(p+1)/2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

を持つとする. ただし, $\Gamma(\cdot)$ の Euler のガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0)$$

で定義する.

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} p^T(t) dt$ を計算せよ.
- (2) 連続型確率変数 U と V は独立で, U は自由度 p の χ^2 分布 χ_p^2 に従い, V は $N(0, 1)$ に従うとする.

$$T = \frac{V}{\sqrt{\frac{U}{p}}}$$

とおいたとき, T の p.d.f. p^T を求めよ.

ヒント 確率ベクトル (U, V) の同時 p.d.f. $\mathbf{p}^{(U,V)}$ は

$$\mathbf{p}^{(U,V)}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \frac{1}{\Gamma(p/2) 2^{p/2}} u^{(p/2)-1} e^{-u/2} & \begin{pmatrix} -\infty < v < \infty; \\ 0 < u < \infty \end{pmatrix} \\ 0 & \text{(その他の場合)} \end{cases}$$

となる. さらに

$$T = \frac{V}{\sqrt{U}}; \quad W = U$$

として, (1.17) を利用して, 同時 p.d.f. $\mathbf{p}^{(T,W)}$ を求め

$$\mathbf{p}^T(t) = \int_0^\infty \mathbf{p}^{(T,W)}(t, w) dw$$

を計算すればよい.