第8章　検定と信頼区間

第 8.1 では仮説検定問題の枠組みと考え方を説明する．第 8.2 では, 帰無仮説も対立仮説も単純であるとき, 検定統計量の最適定理である Neyman-Pearson の補題を説明する．第 8.3 では, 検定統計量の導出原理を説明する．第 **??** では様々な検定方法をまとめる．第 8.6 では, 区間推定量の考え方を説明する．第 8.7 では, 区間推定量の構成法の代表的なものを説明する．

8.1　仮説検定の考え方

母集団分布を特徴付ける母数について想定したある仮説の真偽を標本に基づいて調べることを**仮説検定** hypothsis test という．

いま

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}^*}^{\otimes n}\,(\boldsymbol{\theta}^* \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$$

とする．ただし $d, n \in \mathbb{N}$ で, Θ は母数空間である．また, $\mathbb{X}^n\,(\subset \mathbb{R}^n)$ を $\boldsymbol{X}$ の値域としたとき, $\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}^*}^{\otimes n}$ は $\big(\mathbb{X}^n, \mathcal{B}(\mathbb{X}^n)\big)$ 上の確率測度 ($\boldsymbol{X}$ の分布) である．$\Theta_0 \subset \Theta$ は空でない Θ の真部分集合とし, $\boldsymbol{\theta}^*$ が Θ_0 に入るか否かを調べたいとき, 仮説

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}^* \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta}^* \in \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0 \tag{8.1}$$

を考える．H_0 または H_1 のいずれかが正しいかを判断することを「H_0 を H_1 に対して検定 (test) する」という．H_0 を**帰無仮説** (null hypothsis) といい, H_1 を**対立仮説** (alternative hypothsis) という．Θ_0 が Θ の 1 つの元から成るとき H_0 を**単純仮説** (simple hypothsis) という．そうでないとき H_0 を**複合仮説** (composite hypothsis) という．言葉を乱用して,「Θ_0 は単純仮説である」等ということもある．

仮説 (8.1) に対して, 以下のように検定方式を定めることができる．$\boldsymbol{X}$ の取り得るすべての値の集合を $\mathbb{X}^n(\subset \mathbb{R}^n)$ と表す．$\mathbb{X}^n$ を 2 つの排反で空でない部分集合 W と W^c に分割する．すなわち $W \neq \varnothing, W^c \neq \varnothing$ で $W \cup W^c = \mathbb{X}^n$ かつ $W \cap W^c = \varnothing$ である．$\boldsymbol{X}$ の実現値を $\boldsymbol{x}$ と書いたと

き, 検定方式は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \in W &\Rightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却し, 対立仮説 } H_1 \text{ を採択,}\\ \boldsymbol{x} \in W^c &\Rightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を受容}\end{aligned}$$

と表現できる. このとき W を**棄却域** (critical region) といい, W^c を**受容域** (acceptance region) という.

上のように定めた検定方式には 2 つのタイプの誤りが起こる可能性がある. (1) 帰無仮説 H_0 が正しいにもかかわらず標本の実現値 $\boldsymbol{x}$ に基づいて検定した結果, H_0 を棄却してしまうこと. 逆に, (2) 対立仮説 H_1 が正しいにもかかわらず標本の実現値 $\boldsymbol{x}$ に基づいて検定した結果, H_0 を受容してしまうことである. (1) の誤判断を**第 1 種の誤り**といい, (2) の誤判断を**第 2 種の誤り**とそれぞれ呼ぶ. 一般に一方の誤りが起こる確率を小さくする検定方式は, 他方の誤りを起こす確率を大きくする. すなわち, 両者の誤りが起こる確率を同時に小さくする検定方式はないことが知られている.

以下では「よい」検定方式を一般的な形で定式化することを考える. 関数 $\phi : \mathbb{X}^n \to [0, 1]$ は可測関数とする. この関数 ϕ を用いて次のように検定方式を定める. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ を観測したとき, 確率 $\phi(\boldsymbol{x})$ で帰無仮説 H_0 を棄却する検定方式を考える. この ϕ を**検定関数** (test function) という. 関数 ϕ が $\mathbb{X}$ の空でない部分集合の定義関数のとき, この検定関数 ϕ で定まる検定方式を**非確率化検定** (nonrandomized test) という. すなわち

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in W) \\ 0 & (\boldsymbol{x} \in W^c) \end{cases}$$

とすると棄却域 W をもつ非確率化検定が定まる. そうでない検定方式を**確率化検定** (randomized test) という.

以後 $\phi(\boldsymbol{X})$ を検定統計量 (test statistic) ということにする. さらに検定統計量 ϕ によって定まる検定方式を単に検定ということにする. 検定統計量 $\phi(\boldsymbol{X})$ の第 1 種の誤りの確率は

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0)$$

となり, 第 2 種の誤りの確率は

$$1 - \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1)$$

となる. ただし

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}[\phi(\boldsymbol{X})] = \int_{\mathbb{X}^n} \phi(\boldsymbol{x}) \mathsf{p}(\boldsymbol{x} | \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

と定めた．「よい」検定として, まず第 1 種の誤りの確率の Θ_0 上の上限を $\alpha\,(0<\alpha<1)$ 以下にするような検定を考える．すなわち

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \le \alpha \tag{8.2}$$

である．(8.1) をみたす検定関数または検定 ϕ を**有意水準 α の検定** (level α test) という．つぎに有意水準 α の検定 ϕ の中で, 第 2 種の誤りの確率

$$1-\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \qquad (\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1) \tag{8.3}$$

を Θ_1 上で最小にするするものを見つけることを目指す．すなわち

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \qquad (\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1)$$

を最大にするものである．この確率を $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$ の関数とみて

$$\beta\big(\boldsymbol{\theta}\big) := \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \qquad (\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1)$$

と表記する．これを**検出力関数** (power function) または**検出力**という．したがって「よい」検定は次のように定義される．

定義 8.1. 有意水準 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ の検定 ϕ で検出力を任意の $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$ に対して最大にするものを有意水準 α の**一様最強力検定** (uniformly most powerful test= u.m.p. 検定) という．特に帰無仮説と対立仮説が単純仮説であるとき, u.m.p. 検定を単に有意水準 α の**最強力検定** (m.p. 検定) という．

最後に, P 値を定義する．検定問題 (8.1) において, 関数 $T:\mathbb{X}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ と定数 $c\in\mathbb{R}$ により棄却域 $W\subset\mathbb{X}^n$ が

$$W := \big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}^n;\, T(\boldsymbol{x})>c\big\}$$

で定まる検定関数 ϕ を考える．すなわち, $\phi(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_W(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{x}\in\mathbb{X}^n)$ である．ただし, 定数 c は

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{E}_{\theta}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \le \alpha$$

をみたすものである．

定義 8.2.

$$p(\boldsymbol{x}) := \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{Pr}_{\theta}\big(T(\boldsymbol{X})\ge T(\boldsymbol{x})\big) = \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathsf{E}_{\theta}\big[\mathbb{1}_{[W(\boldsymbol{x}),\infty)}\big(W(\boldsymbol{X})\big)\big]$$

を実現値 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ に対する **P 値** (単に P 値) という．

定理 8.3. すべての $\theta \in \Theta_0$ と $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ に対して

$$\mathsf{Pr}_\theta\bigl(p(\boldsymbol{X}) \le \alpha\bigr) \le \alpha$$

が成り立つ.

Proof. $\theta_0 \in \Theta_0$ を固定して

$$p(\boldsymbol{x}|\,\theta_0) := \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(T(\boldsymbol{X}) \ge T(\boldsymbol{x})\bigr)$$

とおき, $-T(\boldsymbol{X}$ の分布関数を F_{θ_0} と書く. すなわち

$$F_{\theta_0}(t) = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{X}) \le t\bigr) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である. すると

$$p(\boldsymbol{x}|\,\theta_0) = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(T(\boldsymbol{X}) \ge T(\boldsymbol{x})\bigr) = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{X}) \le -T(\boldsymbol{x})\bigr) = \mathsf{F}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{x})\bigr)$$

と書き直せる. このことから, $\mathsf{F}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{X})\bigr)$ は $-T(\boldsymbol{X})$ の分布関数 F_{θ_0} に $-T(\boldsymbol{X})$ を代入したものであるに注意する. すると命題 1.41 から

$$\mathsf{F}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{X})\bigr) \sim \mathsf{U}(0,\,1) \tag{8.4}$$

となることがわかる. $p(\boldsymbol{X}|\,\theta_0) = \mathsf{F}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{X})\bigr)$ と (8.4) から, $0 < \alpha < 1$ に対して

$$\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(p(\boldsymbol{X}|\,\theta_0) \le \alpha\bigr) = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(\mathsf{F}_{\theta_0}\bigl(-T(\boldsymbol{X})\bigr) \le \alpha\bigr) = \alpha$$

を得る. さらに

$$p(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} p(\boldsymbol{x}|\,\theta) \ge p(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)$$

であるから

$$\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(p(\boldsymbol{X} \le \alpha\bigr) \le \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(p(\boldsymbol{X}|\,\theta_0) \le \alpha\bigr) = \alpha$$

がわかる. よって, 定理の主張は証明された. □

8.2 Neyman-Pearson の定理

まず m.p. 検定を求める最も基本的定理を述べる. 以下では, 簡単のために $\boldsymbol{X}$ は同時 p.d.f. $\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta})$ をもつとして議論を進めていく. 離散型確率変数のときは同時 p.m.f. を考え, 積分を和の記号に替えればよい.

定理 8.4. (Neyman-Pearson の定理) 母数空間は $\mathbb{R}^d$ の異なる 2 点から成るとする．$\Theta = \{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1\}$ である．$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とし，$\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta})\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ を $\boldsymbol{X}$ の同時 p.d.f. または p.m.f. とする．検定問題

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

に対する有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の m.p. 検定 ϕ_0 は以下で与えられる．

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1) > c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)) \\ \gamma & (\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1) = c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)) \\ 0 & (\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1) < c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)) \end{cases} \tag{8.5}$$

である．ただし γ, $c\,(0 \leq \gamma \leq 1, c > 0)$ は

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] = \alpha \tag{8.6}$$

から定まる定数である．

Proof. まず

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n;\, \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1) > c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\}, \\ B_2 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n;\, \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1) = c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\}, \\ B_3 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n;\, \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1) < c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\} \end{aligned}$$

とする．ϕ は有意水準 α の任意の検定とする．すなわち

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \leq \alpha \tag{8.7}$$

をみたす. 一方 (8.5) より

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] - \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \\
&\quad = \int_{\mathbb{X}^n} \phi_0(\boldsymbol{x}) \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{X}^n} \phi(\boldsymbol{x}) \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad = \int_{B_1} \underbrace{\phi_0(\boldsymbol{x})}_{=1} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{B_2} \underbrace{\phi_0(\boldsymbol{x})}_{=\gamma} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{B_3} \underbrace{\phi_0(\boldsymbol{x})}_{=0} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad - \int_{B_1} \phi(\boldsymbol{x}) \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{B_2} \phi(\boldsymbol{x}) \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{B_3} \phi(\boldsymbol{x}) \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad = \int_{B_1} \{1-\phi(\boldsymbol{x})\} \underbrace{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{>c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,(\boldsymbol{x}\in B_1)} + \int_{B_2} \{\gamma-\phi(\boldsymbol{x})\} \underbrace{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{=c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,(\boldsymbol{x}\in B_2)} \\
&\qquad + \int_{B_3} \{-\phi(\boldsymbol{x})\} \underbrace{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)}_{<c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,(\boldsymbol{x}\in B_3)} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad \geq \int_{B_1} \{1-\phi(\boldsymbol{x})\} c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{B_2} \{\gamma-\phi(\boldsymbol{x})\} c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \int_{B_3} \{-\phi(\boldsymbol{x})\} c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad = c\int_{B_1} \{1-\phi(\boldsymbol{x})\} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + c\int_{B_2} \{\gamma-\phi(\boldsymbol{x})\} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad + c\int_{B_3} \{-\phi(\boldsymbol{x})\} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad = c\int_{\mathbb{X}^n} \{\phi_0(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{x})\} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad = c\Big\{\mathsf{E}_{\theta_0}[\phi_0(\boldsymbol{X})] - \mathsf{E}_{\theta_0}[\phi(\boldsymbol{X})]\Big\} \qquad (\because (8.5)) \\
&\quad = c\Big\{\alpha - \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big]\Big\} \geq 0 \qquad (\because (8.7) \text{ より})
\end{aligned}
$$

を得る. したがって

$$
\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] \geq \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big]
$$

となるので, ϕ_0 は有意水準 α の m.p. 検定となる. □

例 8.5. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$ で $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ は既知とする. このとき検定問題

$$
H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0)
$$

に対する m.p. 検定を求める. まず $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ の同時 p.d.f.

は

$$\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2\right], \qquad \boldsymbol{x} = (x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)^\top$$

で与えられることに注意をする. 簡単な計算から

$$\begin{aligned}\log\left[\frac{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)}\right] &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(x_j-\theta_1)^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_j-\theta_0)^2\right] \\ &= \frac{n(\theta_1-\theta_0)}{\sigma^2}\left(\overline{x}_n - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.8}$$

となる. ただし

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

である. ここで

$$\begin{aligned}\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0) > c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1) &\Leftrightarrow \log\left[\frac{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)}\right] > \log c \\ &\Leftrightarrow \overline{x}_n > c' \qquad (\because (8.8)\ \text{より}) \end{aligned}$$

である. $\boldsymbol{X}$ は連続型確率変数なので, $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j = c'$ である確率は 0 となるので, m.p. 検定の形は

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\overline{x}_n > c') \\ 0 & (\overline{x}_n \le c') \end{cases}$$

となる. 定数 c' は

$$\alpha = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\{\overline{X}_n > c'\} \tag{8.9}$$

から定まる. ただし, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\mathsf{Pr}_\theta(\boldsymbol{X}\in B) = \mathsf{E}_\theta[\mathbb{1}_B(\boldsymbol{X})] = \int_B \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (\theta\in\Theta)$$

と定めた. (8.9) は

$$\alpha = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c'-\theta_0)}{\sigma}\right\} \tag{8.10}$$

と書き直せ, $\theta=\theta_0$ のもとで $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)/\sigma \sim \mathsf{N}(0,\,1)$ であるので

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

とすると (8.10) は

$$\alpha = 1 - \Phi\left[\frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma}\right]$$

となる. 標準正規分布の上側 $100 \times \alpha\%$ を z_α とすると

$$\frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma} = z_\alpha \Leftrightarrow c' = \theta_0 + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る. よって有意水準 α の m.p. 検定は

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \left(\overline{x}_n > \theta_0 + \dfrac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ 0 & \left(\overline{x}_n \le \theta_0 + \dfrac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}$$

となる. 次に ϕ_0 の検出力は次のようになる.

$$\begin{aligned} \beta_{\phi_0}(\theta_1) = \mathsf{E}_{\theta_1}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] &= \mathsf{Pr}_{\theta_1}\left\{\overline{X}_n > \theta_0 + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right\} \\ &= \mathsf{Pr}_{\theta_1}\left\{\frac{\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \theta_1\big)}{\sigma} > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\big(\theta_1 - \theta_0\big)}{\sigma}\right\} \end{aligned} \tag{8.11}$$

となる. $\theta = \theta_1$ のとき $\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \theta_1\big)/\sigma \sim \mathsf{N}(0,\, 1)$ なので, (8.11) より仮説間の平均の差 $\theta_1 - \theta_0 (> 0)$ が大きいほど検出力は大きくなる. また標本 n が大きくなっても検出力が大きくなることがわかる. □

例 8.6. $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Ber}(\theta)\,(0 < \theta < 1)$ とする. このとき検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0) \tag{8.12}$$

に対する m.p. 検定を求める. まず $\boldsymbol{X} = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)^\top$ の同時 p.m.f. は

$$\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta) = \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{1-x_j} \qquad \big(\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)^\top\big) \tag{8.13}$$

で与えられるので

$$\log \frac{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)} = \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j\right\} \log\left\{\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0}\right\} + n \log\left\{\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right\}$$

となる. $\theta_1 > \theta_0$ としたので, $\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0} > 1$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1) > c\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0) &\Leftrightarrow \log\left[\frac{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)}\right] > c' \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j > c'' \end{aligned}$$

と書きかえることができる．よって有意水準 α の m.p. 検定は

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \left(\sum_{j=1}^n x_j > c''\right) \\ \gamma & \left(\sum_{j=1}^n x_j = c''\right) \\ 0 & \left(\sum_{j=1}^n x_j < c''\right) \end{cases} \tag{8.14}$$

の形になる．ここで γ と c'' を

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathsf{E}_{\theta_0}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] \\ &= \mathsf{Pr}_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^n X_j > c''\right\} + \gamma \mathsf{Pr}_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^n X_j = c''\right\} \end{aligned} \tag{8.15}$$

から定まる．$\sum_{j=1}^n X_j$ は $\theta = \theta_0$ のとき二項分布 $\mathsf{Bino}(n,\, \theta_0)$ に従うので，(8.15) は

$$\alpha = \sum_{j=c''+1}^n \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j} + \gamma \binom{n}{c''} \theta_0^{c''} (1-\theta)^{n-c''}$$

となる．まずは c'' を

$$\sum_{j=c''+1}^n \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j} \le \alpha < \sum_{j=c''}^n \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j}$$

をみたす整数を定める．これから c_0 と書くことにする．すると γ は

$$\gamma = \left[\alpha - \sum_{j=c_0+1}^n \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j}\right] \Bigg/ \binom{n}{c_0} \theta_0^{c_0} (1-\theta_0)^{n-c_0}$$

で定められる． □

8.3 検定統計量の導出方法

$\mathbb{X}^n$ を標本空間とし，$\boldsymbol{X} = (X_1,\, X_2,\, \dots,\, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とする．検定関数 $\phi\colon \mathbb{X}^n \to [0,\, 1]$ によって定まる検定方式は，以下のように定まることがある．ある統計量 $S\colon \mathbb{X}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ と定数 c が存在して

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{x}) \le c &\Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = 1 \\ S(\boldsymbol{x}) > c &\Rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

となる．この場合，$S(\boldsymbol{X})$ のことも検定統計量と呼ぶことにする．

$\boldsymbol{X} = (X_1,\, X_2,\, \dots,\, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とする．ただし，$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度である．$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}$ は同時 p.d.f. $\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta})$ をもつとする．また，母数空間 Θ は Θ_0 と Θ_0 に分割されたとする．すなわち $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta,\ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing,\ \Theta_0 \ne \varnothing,\ \Theta_1 \ne \varnothing$ である．

8.3.1 尤度比検定統計量

定義 8.7. 検定問題

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

を検定するための**尤度比検定統計量** (likelihood ratio statistic=l.r. 統計量) は

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X} | \boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X} | \boldsymbol{\theta})}$$

で与えらる．このとき正の定数 C が存在して H_0 の棄却域が

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n;\ \lambda(\boldsymbol{x}) \leq C\}$$

で与えられる検定を**尤度比検定** (likelihood ratio test=l.r.t.) という．すなわち

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_W(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in W) \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin W) \end{cases}$$

となる．

注意 8.8. $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$ を母数空間 Θ での $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量とし, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0(\boldsymbol{X})$ を母数空間を Θ_0 に制限したときの $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量とする．このとき

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}\big(\boldsymbol{X} | \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0(\boldsymbol{X})\big)}{\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}\big(\boldsymbol{X} | \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})\big)}$$

と表現できる．

定理 8.9. $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}^*}^{\otimes n}\ (\boldsymbol{\theta}^* \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とする．Θ の次元を d, Θ_0 の次元を $r\,(r < d)$ とする．検定問題

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}^* \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad \boldsymbol{\theta}^* \in H_1 : \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0$$

に対する尤度比検定統計量を $\lambda(\boldsymbol{X})$ とする．このとき H_0 のもとで次が成り立つ．

$$-2 \log \lambda(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \chi^2_{d-r}$$

が成立する．

Proof. 節 12.4 の定理 12.12 で証明を与える． □

注意 8.10. 定理 8.9 の結果を用いると尤度比検定の棄却域は

$$W = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n;\ -2 \log \lambda(\boldsymbol{x}) > \chi^2_{d-r,\alpha}\right\}$$

で与えらる．ただし $\chi^2_{d-r,\alpha}$ は自由度 $d-r$ の χ^2 分布の上側 $100 \times \alpha\%$ 点である．したがって, 検定手続きは

$$\boldsymbol{x} \in W \Rightarrow H_0 \text{ は棄却}$$

となる． □

8.3.2 スコア検定

分布 $\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ の p.d.f./p.m.f. を $\mathsf{p}_{\boldsymbol{\theta}}$ と書いたとき, スコア関数を

$$\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}}(x) := \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log \mathsf{p}_{\boldsymbol{\theta}}(x)$$

で定める. ただし, $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}, \dfrac{\partial}{\partial\theta_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial\theta_d}\right)^{\top}$ である. $X \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ のとき, 適当な正則条件のもとで

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\big[\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}}(X)\big] = 0$$

となる. 実現値 $X = x$ の対するスコア関数の実現値 $\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(x)$ が 0 からある程度離れているとき, $\boldsymbol{\theta}_0$ は真の母数でないことを示唆することになる.

つぎに,「ある程度 0 から離れている」を定量化する. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ をランダム標本とする. すると $\boldsymbol{X}$ の同時 p.d.f./p.m.f. は

$$\mathsf{p}_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{p}_{\boldsymbol{\theta}}(x_j)$$

となる. このことから, 帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ に対するスコア関数は

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}_0} \log \mathsf{p}_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(X_j)$$

の形で表現できることがわかる. ここで, $\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ はひとつのデータに対するスコア関数である. 帰無仮説 H_0 のもとでは, $\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(X_j)\big] = 0\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ である. したがって, 中心極限定理 4.24 から, 帰無仮説 H_0 のもと

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(X_j) \rightsquigarrow \mathsf{N}_d\big(\mathbf{0}_d, \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}_0)\big) \qquad (n \to \infty)$$

となる. ただし

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(X_1)\,\dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(X_1)^{\top}\big]$$

である. よって

$$\left|\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \dot{\ell}_{\boldsymbol{\theta}_0}(X_j)\right|_{2,\,d}^{2} > \chi_d^2(\alpha) \;\Rightarrow\; H_0 \text{ を棄却} \tag{8.16}$$

とすればよい, ただし, $\chi_d^2(\alpha)$ は自由度 d の χ 自乗分布の上側 α 点で $|\cdot|_{2,\,d}$ は $\mathbb{R}^d$ の Euclid ノルムである. (8.16) で与えられる検定方式を**スコア検定**という.

次に, 複合帰無仮説に対するスコア検定統計量を導出しよう. 一般性を失くことなく, Θ_0 は

$$\Theta_0 = \left\{\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \in \mathbb{R}^d;\, \boldsymbol{\theta}_1 \in \mathbb{R}^r,\, \boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{0}_{d-r}\right\}$$

と表現されるとする. ただし, $0 < r < d$ である. この分割に対応させてスコア関数

$$\overset{\bullet}{\ell}{}_{\boldsymbol{\theta}}^{\top} = \left(\overset{\bullet}{\ell}{}_{\boldsymbol{\theta},1}^{\top}, \overset{\bullet}{\ell}{}_{\boldsymbol{\theta},2}^{\top}\right)$$

と分割する. H_0 のもとの $\boldsymbol{\theta}_0$ の最尤推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0^{\top} = \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{0,1}, \mathbf{0}_{d-r}^{\top}\right)$ は尤度方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{\bullet}{\ell}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{0,1}}(X_j) = \mathbf{0}_r$$

をみたす. このことから

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{\bullet}{\ell}{}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0}^{\top}(X_j) = \left(\mathbf{0}_r^{\top}, \sum_{j=1}^{n} \overset{\bullet}{\ell}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{0,2}}(X_j)\right)$$

と表現できる. したがって, (8.16) は

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \overset{\bullet}{\ell}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{0,2}}(X_j)\right)^{\top} \left(\mathcal{F}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0}^{-1}\right)_{2,2} \left(\sum_{j=1}^{n} \overset{\bullet}{\ell}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{0,2}}(X_j)\right) > \chi_{d-r}^2(\alpha)$$

となる. ここで, $d \times d$ の正値対称行列 $\mathbf{A}$ に対して, $(\mathbf{A}^{-1})_{2,2}$ は $\mathbf{A}^{-1}$ の $(d-r) \times (d-r)$ の下側左ブロック行列である.

8.3.3 Wald 検定

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ をフルモデルの最尤推定量とし, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$ を帰無仮説 H_0 のもとでの最尤推定量としたとき, 帰無仮説 H_0 のもとで

$$n\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0\right)^{\top} \mathcal{F}_{\widehat{\boldsymbol{theta}}_0}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0\right) > \chi_{d-r}^2(\alpha) \;\Rightarrow\; H_0 \text{ を棄却}$$

とする検定方式を Wald **検定**という.

8.4 検定の一様最適性

8.4.1 単調尤度比

$n \in \mathbb{N}$ とし, $\mathbb{X}^n$ を標本空間とする. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ をランダム標本とし, その同時 p.d.f./p.m.f. を $\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}$ とする. ただし, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ である. 以下では, 集合 $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n;\, \mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) > 0\right\}$ は θ に依存しないと仮定する.

定義 8.11. 関数 $U : \mathbb{X}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ があって, $\theta < \theta'$ なる任意の $\theta,\, \theta' \in \Theta$ に対して

$$\frac{\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}$$

は $U(\boldsymbol{x})$ の関数であり, $U(\boldsymbol{x})$ に関して単調増加であるとき, すなわち, 任意の $\forall \boldsymbol{x},\, \widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}^n$ に対して

$$U(\boldsymbol{x}) < U(\widetilde{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \frac{\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})} \leq \frac{\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\widetilde{\boldsymbol{x}})}{\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\widetilde{\boldsymbol{x}})}$$

が成り立つとき, $\left\{\mathsf{p}_\theta;\, \theta \in \Theta\right\}$ は U に関して**単調尤度比** (monotone likelihood ratio=m.l.r.) を持つという. U に関して強い意味の単調であるとき, U に関して強い意味での単調尤度比を持つという.

定理 8.12. 標本空間 $\mathbb{X}^n$ 上の確率変数列 $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ は指数型分布族

$$\mathsf{p}_\theta(x) = h(x)\exp\left\{A(\theta)T(\theta) - \kappa^\vee(\theta)\right\}\mathbb{1}_{\mathbb{X}}(x)$$

からのランダム標本とする. ただし, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ で, $A : \Theta \longrightarrow [0,\, \infty)$, $T : \mathbb{X} \longrightarrow [0,\, \infty)$, $\kappa^\vee : \Theta \longrightarrow [0,\, \infty)$ である. さらに, A は θ の単調増加関数とし, $U(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n T(x_j)\, (\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ とおく. このとき, $\boldsymbol{X} = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ の同時 p.d.f./p.m.f. の分布族 $\left\{\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}};\, \theta \in \Theta\right\}$ は U に関して単調尤度比を持つ.

Proof. まず

$$\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^n \mathsf{p}_\theta(x_j) = \left(\prod_{j=1}^n h(x_j)\right)\exp\left\{A(\theta)\sum_{j=1}^n T(x_j) - n\kappa^\vee(\theta)\right\}$$

と書けることに注意する. $\theta < \theta'$ とすると

$$\frac{\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})} = \exp\left\{-n\left\{\kappa(\theta') - \kappa(\theta)\right\}\right\}\exp\left\{\left(A(\theta') - A(\theta)\right)\sum_{j=1}^n T(x_j)\right\}$$

となる. A は単調増加と仮定しているので, $A(\theta') - A(\theta) \geq 0$ である. よって, $\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})/\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ は $\sum_{j=1}^n T(x_j)$ に関して単調増加であることがわかるので, 定理の主張は示された. □

定理 8.13. 確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ の同時 p.d.f/p.m.f. を $\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, (\theta \in \Theta \subset \mathbb{R})$ とする. 分布族 $\left\{\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}};\, \theta \in \Theta\right\}$ は U に関して強い意味で単調尤度比を持つとする. $\theta_0 \in \Theta$ を定めて, $\Theta_0 = \Theta \cap (-\infty,\, \theta_0]$ とする. 検定問題

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$$

に対する有意水準 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ の検定関数

$$\phi^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & (U(\boldsymbol{x})>c)\\ \gamma & (U(\boldsymbol{x})=c)\\ 0 & (U(\boldsymbol{x})<c)\end{cases}$$

は u.m.p. 検定となる. ただし, c,γ は $\mathsf{E}_{\theta_0}\bigl[\phi^*(\boldsymbol{X})\bigr]=\alpha$ から定める定数である.

Proof. $\theta'\in\Theta\setminus\Theta_0$ とする. まず, 検定問題

$$H_0:\,\theta=\theta_0\quad\text{v.s.}\quad H_1:\,\theta=\theta'$$

を考える. この場合, 帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 はともに単純なので, 定理 8.4 より

$$\phi^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & \bigl(\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})>c_0\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\bigr)\\ \gamma_0 & \bigl(\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=c_0\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\bigr)\\ 0 & \bigl(\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})<c_0\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\bigr)\end{cases}$$

は有意水準 α の m.p. 検定である. ただし, c_0 と γ_0 は

$$\mathsf{E}_{\theta_0}\bigl[\phi^*(\boldsymbol{X})\bigr]=\alpha$$

となるように定められた定数である. 仮定から, 強い意味での単調増加関数 $\tau:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が存在して

$$\frac{\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}=\tau\bigl(U(\boldsymbol{x})\bigr)$$

と書ける. このとき

$$\frac{\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}>c_0\ \Leftrightarrow\ \tau\bigl(U(\boldsymbol{x})\bigr)>c_0\ \Leftrightarrow\ U(\boldsymbol{x})>\tau^{-1}(c_0)$$

が成立する. また, 上の同値関係は $>$ を $=$ と $<$ としても成り立つ. ここで $c:=\tau^{-1}(c_0)$ と $\gamma_0=\gamma$ とおくと

$$\phi^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & (U(\boldsymbol{x})>c)\\ \gamma & (U(\boldsymbol{x})=c)\\ 0 & (U(\boldsymbol{x})<c)\end{cases}$$

と表現できる. さらに

$$\begin{aligned}\alpha&=\mathsf{E}_{\theta_0}\bigl[\phi^*(\boldsymbol{X})\bigr]\\ &=\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}>c_0\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}\bigr)+\gamma_0\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(\mathsf{p}_{\theta'}^{\boldsymbol{X}}=c_0\mathsf{p}_{\theta}^{\boldsymbol{X}}\bigr)\\ &=\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(U(\boldsymbol{X})>c\bigr)+\gamma\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl(U(\boldsymbol{X})=c\bigr)\end{aligned}$$

から, c と γ は θ_0 にのみ依存する. すなわち, θ' には無関係である. したがって, あらいる $\theta' \in \Theta \setminus \Theta_0$ に対する検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta = \theta'$$

に対して, 検定関数 ϕ^* は m.p. 検定となる. すなわち, 任意の検定関数 ϕ に対して

$$\mathsf{E}_{\theta_0}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \le \alpha \ \Rightarrow\ \mathsf{E}_{\theta'}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] \ge \mathsf{E}_{\theta'}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \qquad (\theta' \in \Theta \setminus \Theta_0)$$

が成り立つ.

以上のことから, すべての $\theta \in \Theta_0$ に対して

$$\mathsf{E}_{\theta}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] \le \alpha \tag{8.17}$$

が成り立つことを示せば, 定理の主張は証明される. ここで, $\theta' \in \Theta_0 \setminus \{\theta_0\}$ に対して

$$\alpha(\theta') := \mathsf{E}_{\theta'}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] \tag{8.18}$$

とおく. 検定問題

$$H_0 : \theta = \theta' \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta = \theta_0$$

に対する有意水準 $\alpha(\theta')$ の m.p. 検定は

$$\widetilde{\phi}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \big(\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}_{\theta'}(\boldsymbol{x}) > \widetilde{c}\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}_{\theta}(\boldsymbol{x})\big) \\ \widetilde{\gamma} & \big(\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}_{\theta'}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{c}\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}_{\theta}(\boldsymbol{x})\big) \\ 0 & \big(\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}_{\theta'}(\boldsymbol{x}) < \widetilde{c}\mathsf{p}^{\boldsymbol{X}}_{\theta}(\boldsymbol{x})\big) \end{cases}$$

で与えられることが定理 8.4 からわかる. ただし, $\widetilde{c}$ と $\widetilde{\gamma}$ は

$$\mathsf{E}_{\theta'}\big[\widetilde{\phi}(\boldsymbol{X})\big] = \alpha(\theta')$$

となるように定めた. さらに, これは

$$\widetilde{\phi}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \big(U(\boldsymbol{x}) > c'\big) \\ \widetilde{\gamma} & \big(U(\boldsymbol{x}) = c'\big) \\ 0 & \big(U(\boldsymbol{x}) < c'\big) \end{cases}$$

とも表すことができる. ただし, $c' = \tau^{-1}(\widetilde{x})$ である. $\widetilde{\phi}$ の定め方から

$$\alpha(\theta') = \mathsf{E}_{\theta'}\big[\widetilde{\phi}(\boldsymbol{X})\big] = \mathsf{Pr}_{\theta'}\big(U(\boldsymbol{X}) > c'\big) + \widetilde{\gamma}\mathsf{Pr}_{\theta'}\big(U(\boldsymbol{X}) = c'\big) \tag{8.19}$$

が成立している. 一方, (8.18) から

$$\alpha(\theta') = \mathsf{E}_{\theta'}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] = \mathsf{Pr}_{\theta'}\big(U(\boldsymbol{X}) > c\big) + \gamma\mathsf{Pr}_{\theta'}\big(U(\boldsymbol{X}) = c\big) \tag{8.20}$$

が成立している. (8.19) と (8.20) を比較すると

$$c = c', \quad \gamma = \widetilde{\gamma}$$

と c' と $\widetilde{\gamma}$ を取ることができる. したがって, $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{X}) = \phi^*(\boldsymbol{X})$ である. いま, $\alpha(\theta') \equiv \phi(\boldsymbol{x})$ なる検定関数を考えると

$$\mathsf{E}_{\theta'}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] = \mathsf{E}_{\theta'}\big[\alpha(\theta')\big] = \alpha(\theta')$$

であるから, 検定関数 ϕ は検定問題

$$H_0 : \theta = \theta' \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta = \theta_0$$

の有意水準 $\alpha(\theta')$ 検定である. 検定関数 $\widetilde{\phi}$ はこの検定問題に対する m.p. 検定であることと (8.18) から, $\forall\theta' \in \Theta_0 \setminus \{\theta_0\}$ に対して

$$\alpha = \mathsf{E}_{\theta_0}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] = \mathsf{E}_{\theta_0}\big[\widetilde{\phi}(\boldsymbol{X})\big] \geq \mathsf{E}_{\theta_0}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] = \alpha(\theta') = \mathsf{E}_{\theta'}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big]$$

が成立することがわかる. 以上から (8.17) が確認できた. 以上の議論から, $\forall\theta \in \Theta_0$ に対して

$$\mathsf{E}_{\theta}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] \leq \alpha$$

が成り立つので, ϕ^* は有意水準 α の検定となる. さらに, 任意の有意水準 ϕ の検定と $\forall\theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ に対して

$$\mathsf{E}_{\theta}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big] \geq \mathsf{E}_{\theta}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big]$$

となることが示せたので, 検定関数 ϕ^* は u.m.p. 検定であることが示せた. □

例 8.14. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Ber}(\theta)\,(0 < \theta < 1)$ とする. $\theta_0 \in (0, 1)$ を固定して, 検定問題

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{8.21}$$

に対する有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の u.m.p. 検定を求めよう. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時 p.m.f. は

$$\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \theta^{\sum_{j=1}^n x_j}(1-\theta)^{n-\sum_{j=1}^n x_j}\prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_j) \qquad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

であるから

$$\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \exp\left\{n\log(1-\theta) + \sum_{j=1}^n x_j \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\}\prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_j)$$

と書き直せるので, 1 母数指数型分布族で

$$A(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$$

は θ の強い意味での単調増加関数である. したがって, 定理 8.12 から $U(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{n} x_j$ に関して強い意味での単調尤度比を持つ. したがって, 検定問題 (8.21) において, 有意水準 α の u.m.p. 検定が存在し

$$\phi^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\sum_{j=1}^{n} x_j > c) \\ \gamma & (\sum_{j=1}^{n} x_j = c) \\ 0 & (\sum_{j=1}^{n} x_j < c) \end{cases}$$

が u.m.p. 検定となる. ただし, c と γ は

$$\alpha = \mathsf{E}_{\theta_0}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big]$$

から定まる定数である. □

例 8.15. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{N}(0, \theta)\,(0 < \theta < \infty)$ とする. $\theta_0 \in (0, \infty)$ を固定して, 検定問題

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{8.22}$$

に対する有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の u.m.p. 検定を求めよう. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時 p.d.f. は

$$\mathsf{p}_\theta^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right\} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

であるから, 1 母数指数型分布族で

$$A(\theta) = -\frac{1}{2\theta}$$

は θ の強い意味での単調増加関数である. したがって, 定理 8.12 から $U(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ に関して強い意味での単調尤度比を持つ. したがって, 検定問題 (8.21) において, 有意水準 α の u.m.p. 検定が存在し

$$\phi^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\sum_{j=1}^{n} x_j^2 > c) \\ \gamma & (\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = c) \\ 0 & (\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < c) \end{cases}$$

が u.m.p. 検定となる. ただし, c と γ は

$$\alpha = \mathsf{E}_{\theta_0}\big[\phi^*(\boldsymbol{X})\big]$$

から定まる定数である. □

8.4.2 不偏検定

節 8.4.1 では, 1 次元の母数の片側検定問題おいて, u.m.p. 検定が構成できる場合があることを示した. しかし, 単調尤度比の手法は両側検定に対しては適用できない. そこで, 両側検定問題の場合において, 自然と思われる検定方式の正当化のための概念を導入する.

まず, 簡単な例をみてみよう.

例 8.16. $\mu^* \in \mathbb{R}$ とし, $X \sim \mathsf{N}(\mu, 1)$ とする. 観測 X に基づいて, 有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の検定問題

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \mu \neq 0 \tag{8.23}$$

を考える.

u.m.p. 検定が存在しないことを確認しよう. そのために, $\mu_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を固定して, 検定問題

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \mu = \mu_1$$

を考える. 帰無仮説も対立仮説も単純であることので, 定理 8.4 を用いて m.p. 検定が構成できることに注意する. $\mu_1 > 0$ の場合には

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & (X > c') \\ 0 & (X \leq c') \end{cases}$$

は m.p. 検定となる. ただし, c' は $\mathsf{E}_{\mu=0}\big[\phi_1(X)\big] = \alpha$ となるように定めた定数である. 一方, $\mu_1 < 0$ の場合には

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 1 & (X < -c') \\ 0 & (X \geq -c') \end{cases}$$

は m.p. 検定となる. u.m.p. 検定はどんな対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1$ に対しても同時に m.p. 検定でなけらばならない. しかし, $\mu_1 > 0$ と $\mu_1 < 0$ の場合では, m.p. 検定の形が異なるので, u.m.p. 検定は存在しないことがわかる.

検定問題 8.22 において, 自然な検定関数は

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 1 & (|X| > c) \\ 0 & (|X| \leq c) \end{cases}$$

である. ただし, c は $\mathsf{E}_{\mu=0}\big[\phi_3(X)\big] = \alpha$ をみたすように定めた定数である. この検定関数は, 以下で定める不偏検定の族の中で m.p. となることがわかる. □

定義 8.17. Θ を母数空間とし, $\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$ は $\Theta_1 \neq \emptyset, \Theta_2 = \emptyset, \Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset, \Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ をみたすとする. 母数 $\theta \in \Theta$ に対する有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の検定問題

$$H_0 : \theta \in \Theta_1 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

を考える. さらに, X を母数 θ の母集団分布から観測とする. 有意水準 α の検定関数 ϕ は**不偏** (unbiased) であるとは

$$\beta_\phi(\theta) = \mathsf{E}_\theta\big[\phi(X)\big] \geq \alpha \qquad (\forall\theta \in \Theta_1)$$

が成り立つことである.

定義 8.18. 定義 8.17 の設定を踏襲する. 有意水準 α の不偏検定の族の中で, すべての対立仮説について検出力を最大にする検定関数 ϕ^* が存在すれば, ϕ^* を**一様最強力不偏検定** (uniformly most powerful unbiased =u.m.p.u.) という. すなわち, 有意水準 α の任意の不偏検定関数 ϕ に対して

$$\beta_{\phi^*}(\theta) \geq \beta_\phi(\beta) \qquad (\forall\theta \in \Theta_1)$$

が成り立つことである.

定理 8.19. 有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の検定問題において, u.m.p. 検定は u.m.p.u. 検定である.

Proof. 定義 8.17 の設定を踏襲して, 証明を与える. 有意水準 α の u.m.p. 検定関数を ϕ^* とおく. すると

$$\mathsf{E}_\theta\big[\phi^*(X)\big] \leq \alpha \qquad (\theta \in \Theta_0)$$

である.

いま, $\widetilde{\phi}(x) \equiv= \alpha$ なる検定関数を考える. すると

$$\mathsf{E}_\theta\big[\widetilde{\phi}(X)\big] = \mathsf{E}_\theta\big[\alpha\big] = \alpha \qquad (\theta \in \Theta)$$

であることがわかる. 一方, ϕ^* は u.m.p. 検定関数なので

$$\mathsf{E}_\theta\big[\phi^*(X)\big] \geq \mathsf{E}_\theta\big[\widetilde{\phi}(B)\big] = \alpha \qquad (\theta \in \Theta_1)$$

である. したがって, ϕ^* は不偏検定である. ϕ^* は u.m.p. なので, 有意水準 α の任意の検定関数 ϕ に対して

$$\beta_{\phi^*}(\theta) \geq \beta_\phi(\beta) \qquad (\forall\theta \in \Theta_1)$$

が成立する. したがって, ϕ^* は u.m.p.u. 検定である. □

定理 8.20. 標本空間 $\mathbb{X}^n$ 上の確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は指数型分布族

$$\mathsf{p}_\theta(x) = h(x)\exp\bigl\{A(\theta)T(x) - \kappa^\vee(\theta)\bigr\}\mathbb{1}_{\mathbb{X}}(x)$$

からのランダム標本とする．ただし，$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ で，$A : \Theta \longrightarrow [0, \infty)$, $T : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty)$, $\kappa^\vee : \Theta \longrightarrow [0, \infty)$ である．$\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 < \theta_2$ に対して，

$$\Theta_0 = \Theta \cap [\theta_1, \theta_2]$$

と定め, 有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の検定問題

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$$

を考える．さらに, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とおく．検定関数 ϕ^* を

$$\phi^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \left(\sum_{j=1}^n T(x_j) < c_1 \text{ または } \sum_{j=1}^n T(x_j) > c_2\right) \\ \gamma & \left(\sum_{j=1}^n T(x_j) = c_1 \text{ または } \sum_{j=1}^n T(x_j) = c_2\right) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で定めたとき, 検定関数 ϕ^* は u.m.p.u. 検定となる．ただし, γ, c_1, c_2 は $\mathsf{E}_{\theta_j}\bigl[\phi^*(\boldsymbol{X})\bigr] = \alpha\,(j = 1, 2)$ から定まる定数である．

Proof. 草間 (1975, pp.107-108) では証明は省略されている．Lehmann-Romano (2022, pp.126-128) を参照すること． □

8.5　多重比較と FDR

8.6　区間推定の考え方

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_\theta^{\otimes n}\,(\theta \in \Theta \subset R)$ とする．$0 < \alpha < 1$ を固定する．母数 θ に依存しない区間 $\bigl[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\bigr] \subset \Theta$ が $\forall\theta \in \Theta$ に対して

$$\mathsf{Pr}_\theta\Bigl\{L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le U(\boldsymbol{X})\Bigr\} \ge 1 - \alpha \tag{8.24}$$

をみたすとき区間 $\bigl[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\bigr]$ を信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の**信頼区間** (confidence interval) という．$L(\boldsymbol{X})$, $U(\boldsymbol{X})$ を**信頼限界** (confident limit) という．通常 α として 0.05, 0.01, 0.1 等が用いられる．(8.24) の関係式は, たとえば 100 組の実現値を発生させると 100α 回程度は信頼区間に真の母数 θ は含まれないと考える．

例 8.21. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$ とする．ただし $\theta \in \mathbb{R}$ で $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ の値は既知である．このとき標本平均 $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j$ は

$$\overline{X}_n \sim \mathsf{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる．このことより

$$S_\theta(\boldsymbol{X}) = \frac{\sqrt{n}\bigl(\overline{X}_n - \theta\bigr)}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0, 1)$$

となる．ここで $z_{\alpha/2}$ を標準正規分布 $\mathsf{N}(0, 1)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点ととると

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathsf{Pr}_\theta\left\{-z_{\alpha/2} \le S_\theta(\boldsymbol{X}) \le z_{\alpha/2}\right\} \\ &= \mathsf{Pr}_\theta\left\{\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \theta \le \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} \end{aligned}$$

なることがわかる．したがって

$$\bigl[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\bigr] = \left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

は信頼係数 $(1 - \alpha)$ の θ の信頼区間となる． □

8.7 信頼区間の構成法

8.7.1 検定方式の反転

$\Theta \subset \mathbb{R}$ とし，$\theta_0 \in \Theta$ を取る [1]．検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta \ne \theta_0$$

を考える．有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の検定の受容域を $A(\theta_0)$ とおく．すなわち

$$\mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl\{\boldsymbol{X} \in A(\theta_0)\bigr\} \ge 1 - \alpha$$

が成り立っている．そこで $\boldsymbol{X} \in A(\theta_0)$ を θ_0 に関して解くことによって

$$C(\boldsymbol{X}) = \{\theta \in \Theta; \boldsymbol{x} \in A(\theta)\}$$

[1] θ_0 を θ^* と書くべきであろうが，後の表記上の都合でこの記号を採用した．

が得られる．一般に $C(\boldsymbol{X})$ は連結区間になるという保証はない．$C(\boldsymbol{X})$ が連結区間となれば

$$\mathsf{Pr}_\theta\bigl\{\theta \in A(\theta)\bigr\} \geq 1-\alpha$$

となるので, $C(\boldsymbol{X})$ は信頼係数 $(1-\alpha)$ の信頼区間となる．

例 8.22. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Ber}(\theta)\,(0<\theta<1)$ とする．$\theta_0 \in (0,1)$ と固定し, 検定問題

$$H_0: \theta = \theta_0, \quad H_1: \theta \neq \theta_0$$

を考える．この検定問題に対する尤度比検定統計量は

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{X}) &= \frac{\prod_{j=1}^n \theta_0^{X_j}(1-\theta_0)^{1-X_j}}{\prod_{j=1}^n \overline{X}_n^{X_j}(1-\overline{X}_n)^{1-X_j}} \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta_0}{\overline{X}_n}\right)^{X_j}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\overline{X}_n}\right)^{1-X_j}\end{aligned}$$

となる．これより受容域 $A(\theta_0)$ は

$$\begin{aligned}A(\theta_0) = \Biggl\{&\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n; \\ &-2\log\lambda(\boldsymbol{x}) = 2n\overline{x}_n \log\left(\frac{\overline{x}_n}{\theta_0}\right) + 2n(1-\overline{x}_n)\log\left(\frac{1-\overline{x}_n}{1-\theta_0}\right) \leq \chi^2_{1,\alpha}\Biggr\}\end{aligned}$$

となる．ただし $\overline{x}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n x_j$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ である．よって

$$C(\boldsymbol{X}) := \left\{\theta; \overline{X}_n \log\left(\frac{\overline{X}_n}{\theta}\right) + (1-\overline{X}_n)\log\left(\frac{1-\overline{X}_n}{1-\theta}\right) \leq \frac{\chi^2_{1,\alpha}}{2n}\right\}$$

となる．ただし信頼限界 $L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})$ を陽に求めることはできない．□

8.7.2 枢軸量 (pivotal quantity)

一般に $Q(\boldsymbol{X}, \theta)$ の分布が θ に依存しないとき, $Q(\boldsymbol{X}, \theta)$ を**枢軸量** (pivotal quantity) という．このとき

$$\mathsf{Pr}_\theta\Bigl(a \leq Q(\boldsymbol{X}, \theta) \leq b\Bigr) = 1-\alpha$$

をみたす a, b を定めて, $a \leq Q(\boldsymbol{X}, \theta) \leq b$ を θ に関して解くことにより, 信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間

$$C(\boldsymbol{X}) = \bigl\{\theta \in \Theta; a \leq Q(\boldsymbol{X}, \theta) \leq b\bigr\}$$

が得られる．もちろん $C(\boldsymbol{X})$ が連結区間になる保証は一般的にはないが, うまく連結区間になれば, 信頼区間として使用できる．

例 8.23. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Exp}(\theta)\,(\theta > 0)$ とする. すなわち, p.d.f. は

$$\mathsf{p}(x|\,\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる. すると $2\theta \sum_{j=1}^{n} X_j$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布に従うので

$$Q(\boldsymbol{X},\, \theta) = 2\theta \sum_{j=1}^{n} X_j$$

とおく. よって $\chi^2_{2n,\,\alpha}$ を自由度 $2n$ の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点とすると

$$\mathsf{Pr}_\theta\left(\chi^2_{2n,\,1-\alpha/2} \le Q(\boldsymbol{X},\, \theta) \le \chi^2_{2n,\,\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

となるので,

$$\left[L(\boldsymbol{X}),\, U(\boldsymbol{X})\right] = \left[\frac{\chi^2_{2n,\,1-\alpha/2}}{2\sum_{j=1}^{n} X_j},\, \frac{\chi^2_{2n,\,\alpha/2}}{2\sum_{j=1}^{n} X_j} \right]$$

は信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間となる. □

問 8.1. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Exp}(\theta)\,(\theta > 0)$ のとき, $2\theta \sum_{j=1}^{n} X_j \sim \chi^2_{2n}$ となることを示せ.

8.8 章末注釈と参考文献

節 **??** は [42, pp.62 − 67] を借用した.

8.9 演習問題

演習問題 8.1. 確率空間 $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathsf{Pr})$ 上で定義された確率変数 X_1, X_2, X_3 は独立同一に母数 $\theta\,(0 < \theta < 1)$ の Benoulli 分布 $\mathsf{Ber}(\theta)$ に従っているとする. 検定問題

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : \theta \neq \frac{1}{2}$$

の検定問題に対して, 検定方式

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in S;\, \sum_{i=1}^{3} x_i \in \{0,\, 3\}\} \\ W_2 &= \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in S;\, \sum_{i=1}^{3} x_i \in \{2,\, 3\}\} \end{aligned}$$

を考える．ただし, $S = \{(x_1,\,x_2,\,x_3);\, x_i \in \{0,\,1\}\,(i=1,\,2,\,3)\}$ である．検定方式 W_1, W_2 のサイズを求めよ．すなわち

$$\mathsf{Pr}_{\theta=1/2}((X_1,\,X_2,\,X_3)\in R_1) \quad \text{および} \quad \mathsf{Pr}_{\theta=1/2}((X_1,\,X_2,\,X_3)\in R_2)$$

の確率である．

$\boxed{\text{記号}}$ $\mathsf{p}(x|\,\theta)$ を $\mathsf{Ber}(\theta)$ の p.m.f. とする．Borel 集合 $A\subset\mathbb{R}^3$ に対して

$$\mathsf{Pr}_{\theta=1/2}\big((X_1,\,X_2,\,X_3)\in A\big) = \sum_{(x_1,\,x_2,\,x_3)\in A\cap S} \mathsf{p}\big(x_1|\,\frac{1}{2}\big)\mathsf{p}\big(x_2|\,\frac{1}{2}\big)\mathsf{p}\big(x_3|\,\frac{1}{2}\big)$$

と定めている．

演習問題 8.2. $\theta\in\mathbb{R}$ とし, 連続型確率変数 X は p.d.f.

$$\mathsf{p}(x|\,\theta) = \frac{1}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を持つとする．仮説検定問題

$$\text{帰無仮説 } H_0:\,\theta=0 \quad \text{vs.} \quad \text{対立仮説 } H_0:\,\theta=1$$

を X に基づく検定する．この検定問題に対して, 棄却域

$$W := \{x\in\mathbb{R}:\, 1<x<3\}$$

を考える．以下の問いに答えよ．ただし, $\arctan 2 = 1.107$, $\arctan 3 = 1.249$, $\pi = 3.1416$ として計算せよ．

(1) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{p}(x|\,\theta)\,\mathrm{d}x$$

を計算せよ．

(2) W で定まる検定のサイズ (第 1 種の誤りの確率) α の値を小数第 3 位まで求めよ．

(3) W で定まる検定の検出力 $1-\beta$ (第 1 種の誤りの確率) を小数第 3 位まで求めよ．

(4) 尤度比

$$\Lambda(x) = \frac{\mathsf{p}(x|\,1)}{\mathsf{p}(x|\,0)}$$

の $x=0$ と $x=1$ における値を求めよ．

(5) 不等式 $\Lambda(x)>2$ をみたす領域を求めることにより, W で与えらるは (1) で与えられた α を有意水準とする検定の中で最強力検定となることを Neyman-Peason の補題を用いて証明せよ．

演習問題 8.3. 連続型確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$ は正規分布 $\mathsf{N}(\mu, 3^2)$ からのランダム標本とする. ただし, $-\infty < \mu < \infty$ で, これらの確率変数は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上で定義されたものとする.
(1) 標本平均 $\overline{X}_{16} = (1/16)(X_1 + \cdots + X_{16})$ の期待値と分散を計算することにより, $\overline{X}_{16}$ の分布を述べよ.
(2) $a > 0$, b を定数とし, $Z = a\overline{X}_{16} + b$ としたとき, Z の分布が標準正規分布になるように定数 a, b を定めよ.
(3) 信頼係数 90% の μ の信頼区間を構成せよ.

演習問題 8.4. 連続型確率変数列 X_1, X_2, X_3 は正規母集団 $\mathsf{N}(\mu, 3)$ からの標本の大きさ 3 のランダム標本とする. 次の仮説検定問題を考える:

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu = 2$$

このとき, 以下の問いに答えよ.
(1) H_0 と H_1 は単純仮説か複合仮説かを答えよ.
(2) $\overline{X}_3 = (1/3)(X_1 + X_2 + X_3)$ とする. $\bar{X}_3$ は帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$ のもとでどのようなものになるかを答えよ. 理由も述べること.
(3) H_0 の棄却域を

$$C(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathsf{R}^3; \, x_1 + x_2 + x_3 > t\}$$

としたとき, $C(t)$ が有意水準 0.1 の検定の棄却域になるように t をひとつ定めよ. t を求めるときには小数第 3 位を四捨五入せよ.
(4) 棄却域 $C(t)$ の検出力を 対立仮説 $H_1 : \mu = 2$ のもとで求めよ. ただし, 解答は関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} (1/\sqrt{2\pi}) e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$ および t を用いて表現せよ. すなわち, 具体的な値を計算しなくともよい.