目 次

はじめに ix

第 I 部　宴の支度編: 確率・確率変数・確率分布・標本分布 1

第 0 章　準備 3
- 0.1　集合論の言葉使い 3
  - 0.1.1　数の集合 3
  - 0.1.2　集合の記号 3
- 0.2　写像 5
  - 0.2.1　写像の定義と性質 5
  - 0.2.2　像と逆像 6
  - 0.2.3　合成写像 7
- 0.3　可算集合・非可算集合・濃度 8
- 0.4　距離と位相 8
  - 0.4.1　距離空間 8
  - 0.4.2　位相空間 10
- 0.5　$\mathbb{R}$ の拡張 11
- 0.6　章末注釈と参考文献 12

第 1 章　確率・確率変数の基本事項 13
- 1.1　基礎的な確率規則 13
- 1.2　確率変数 21
- 1.3　分位点関数 29
- 1.4　主な 1 次元分布 32
  - 1.4.1　離散型確率変数 32
  - 1.4.2　連続型確率変数 34
- 1.5　2 次元の分布 35
  - 1.5.1　同時確率関数と確率密度関数 35
  - 1.5.2　周辺分布 36
  - 1.5.3　独立性な分布と条件付き分布 38
- 1.6　多次元分布と i.i.d. 標本 40

1.6.1 重要な多次元分布モデル 41
1.7 正規分布に関連した分布 48
1.7.1 ガンマ分布 48
1.7.2 χ^2 分布 50
1.7.3 F 分布 51
1.7.4 t 分布 53
1.8 章末注釈と参考文献 54
1.9 演習問題 55

第 2 章 期待値の基礎事項 59

2.1 期待値 59
2.2 確率ベクトルの期待値 64
2.3 分散と共分散 66
2.4 条件付き期待値 72
2.5 積率母関数 77
2.6 章末注釈と参考文献 79
2.7 演習問題 80

第 3 章 確率と期待値の不等式 87

3.1 確率に対する不等式 87
3.2 期待値に対する不等式 93
3.3 章末注釈と参考文献 96
3.4 演習問題 96

第 4 章 確率変数列と分布列の収束 99

4.1 確率変数列の収束のタイプ 100
4.2 大数の法則 109
4.3 中心極限定理 113
4.4 デルタ法 115
4.5 定理 4.17, 補題 4.18, 定理 4.9, 4.12, 4.14, 4.25 の証明 . . 118
4.5.1 定理 4.17 の証明 118
4.5.2 補題 4.18 の証明 121
4.5.3 定理 4.9 の証明 122
4.5.4 定理 4.12 の証明 123
4.5.5 定理 4.14 の証明 125
4.5.6 定理 4.25 の証明 126
4.6 章末注釈と参考文献 127
4.7 演習問題 128

第 II 部　宴編: 統計的推測　131

第 5 章　統計的推測論の枠組み　133
5.1　統計的実験と母数モデル 133
5.2　統計的決定問題 138
5.3　章末注釈と参考文献 142
5.4　演習問題 143

第 6 章　母数モデル　145
6.1　正則母数モデルと Fisher 情報量 145
6.2　指数型分布族 150
6.2.1　1 変数の場合 150
6.3　指数型分布族の正準表示 152
6.4　十分統計量 157
6.5　統計量の最小十分性と完備性 160
6.5.1　十分統計量の最小性 160
6.5.2　十分統計量の完備性 164
6.6　補遺: Laplace 変換の一意性 165
6.7　章末注釈と参考文献 167
6.8　演習問題 167

第 7 章　推定　169
7.1　モーメント法 169
7.2　最尤法 171
7.3　不偏推定と情報不等式 176
7.4　章末注釈と参考文献 185
7.5　演習問題 185

第 8 章　検定と信頼区間　189
8.1　仮説検定の考え方 189
8.2　Neyman-Pearson の定理 192
8.3　検定統計量の導出方法 197
8.3.1　尤度比検定統計量 198
8.3.2　スコア検定 199
8.3.3　Wald 検定 200
8.4　検定の一様最適性 200
8.4.1　単調尤度比 200
8.4.2　不偏検定 206
8.5　多重比較と FDR 208
8.6　区間推定の考え方 208
8.7　信頼区間の構成法 209

8.7.1 検定方式の反転 209
8.7.2 枢軸量 (pivotal quantity) 210
8.8 章末注釈と参考文献 211
8.9 演習問題 211

第 9 章 Bayes 的推測 215
9.1 Bayes 的推測の考え方 215
9.2 Bayes 的推測手法 216
9.3 事前分布の選択について 220
9.3.1 一様事前分布 221
9.3.2 Jeffreys 事前分布 222
9.3.3 共役事前分布 223
9.4 1 次元の van Trees 不等式 225
9.5 統計的決定理論からみた Bayes 法 230
9.6 章末注釈と参考文献 231
9.7 演習問題 231

第 10 章 計算機集約的手法 233
10.1 乱数の発生法 233
10.1.1 ベルヌーイ分布 233
10.1.2 2 項分布 234
10.1.3 標準正規分布 234
10.1.4 正規分布 235
10.1.5 確率の積分変換 235
10.1.6 受容・棄却法 236
10.2 Markov 連鎖 Monte Carlo 法 (MCMC 法) 238
10.2.1 基本的な考え方 239
10.2.2 推移核の Metropolis-Hastings による構成 241
10.3 Gibbs サンプリング法 246
10.4 ブートストラップ法 246

第 11 章 モデル選択 249
11.1 モデル選択の目標 249
11.2 罰則法: AIC 249
11.3 Bayes モデル選択 249
11.4 交差検証法 249
11.5 章末注釈と参考文献 249
11.6 演習問題 249

第 12 章 大標本理論 **251**
12.1 ランダム関数の確率収束 251
12.2 最尤推定量の一致性 259
12.3 最尤推定量の漸近正規性 264
12.4 尤度比検定統計量の漸近分布 267
12.5 EM アルゴリズム: 不完全データに基づく最尤推定値の計算 271
12.6 章末注釈と参考文献 278
12.7 演習問題 278

第 III 部 宴の始末編: 付録 **279**

第 A 章 補遺 **281**
A.1 大数の強法則の証明 281
A.1.1 証明のための準備の補題 281
A.1.2 大数の強法則 (定理 4.19) の証明 284
A.1.3 Weierstrass の近似定理 286
A.2 中心極限定理の証明 287
A.3 Laplace 変換の一意性 291
A.4 Dynkin 族の議論 292
A.5 Dynkin の定理の応用例 298
A.5.1 その 1 298
A.5.2 その 2 300
A.5.3 $\mathbb{R}$ の位相についての注意 302
A.6 凸関数の性質 305
A.7 Radon-Nikodym の定理と条件付き期待値の議論 305
A.8 条件付き期待値の性質 309
A.9 Neyman-Fisher の因子分解定理の証明 (Keener から?) . . 312
A.10 Dini の定理を加筆 319
A.11 最尤推定量の漸近分布の証明 (定理 12.11) 319