立教大学　数理統計学序論 1 ・数理統計学 1

今野 良彦

大阪公立大学

2026 年 01 月 10 日

講義内容

- 前回までの記号と重要事項の復習
- 8.1 仮説検定の考え方
- 8.2 Neyman-Pearson の補題
- 8.3 検定統計量の導出
- 8.6 区間推定の考え方
- 8.7 信頼区間の構成法

記号の復習 (1)

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$: 確率空間.
  - $\mathcal{A}$ は σ 加法族.
  - $\mathsf{Pr} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ は確率測度.
- X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数 $\Leftrightarrow$ $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((r, \infty)) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) > r\}.$$

- 確率変数 X の分布 P^X

$$\mathsf{P}^X(B) = \mathsf{Pr}(\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in B\}) \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

  ここで, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は Borel 集合族. すなわち, $\mathbb{R}$ の開集合族を含む最小の σ 加法族.
- 確率変数 X の累積分布関数 F^X: $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathsf{F}^X(x) = \mathsf{P}^X((-\infty, x])] = \mathsf{Pr}(\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le x).$$

- 累積分布関数 F^X の性質: ① 右連続, ② 非減少, ③ $\lim_{x\to\infty} \mathsf{F}^X(x) = 1,\ \lim_{x\to-\infty} \mathsf{F}^X(x) = 0.$
  - F^X が階段関数 $\Rightarrow$ X は離散型確率変数.
  - F^X が連続関数 $\Rightarrow$ X は連続型確率変数.

記号の復習 (2)

- 確率変数 X は離散型のとき

$$\mathsf{p}^X(x) = \mathsf{F}^X(x) - \mathsf{F}^X(x-)$$

を確率関数 (p.m.f.) という.
- 確率変数 X は連続型のとき

$$\mathsf{F}^X = \int_{-\infty}^{x} \mathsf{p}^X(t)\,\mathrm{d}t$$

をみたす非負関数 p^X(存在するならば) を確率密度関数 (p.d.f.) という.
- 確率変数 X の期待値を

$$\mathsf{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x\mathsf{p}^X(x) & (\text{離散型の場合}) \\ \int_{\mathbb{R}} x\mathsf{p}^X(x)\,\mathrm{d}x & (\text{連続型の場合}) \end{cases}$$

ただし, 和および積分の中を絶対値をとったものが有限のとき.

記号の復習 (3)

- 確率変数 X の分散: $\mathsf{E}[X^2] < \infty$ のとき

$$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}[\{X - \mathsf{E}[X]\}^2]$$

- $\mathsf{F}^X(\cdot)$ が階段関数のとき, X を離散型確率変数という.
- 確率変数 X の積率母関数 (m.g.f.): 原点を含むある近傍 $(-z_0, z_0)$ があって, $\forall t \in (-z_0, z_0)$ に対して

$$\mathsf{m}^X(t) = \mathsf{E}[e^{tX}]$$

- 母集団分布を特徴付ける母数について想定したある仮説の真偽を標本に基づいて調べることを仮説検定 hypothsis test という.
- $$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathrm{P}_{\theta^*}^{\otimes n} \, (\theta^* \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$$
  とする.
- $d, n \in \mathbb{N}$ で, Θ は母数空間である.
- $\mathbb{X}^n \, (\subset \mathbb{R}^n)$ を X の値域としたとき, $\mathrm{P}_{\theta^*}^{\otimes n}$ は $(\mathbb{X}^n, \mathcal{B}(\mathbb{X}^n))$ 上の確率測度 (X の分布) である.
- $\Theta_0 \subset \Theta$ は空でない Θ の真部分集合とし, θ^* が Θ_0 に入るか否かを調べたいとき, 仮説
  $$H_0 : \theta^* \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta^* \in \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0 \tag{1}$$
  を考える.

仮説検定の考え方 (2)

- H_0 または H_1 のいずれかが正しいかを判断することを「H_0 を H_1 に対して検定 (test) する」という.
- H_0 を帰無仮説 (null hypothsis) という.
- H_1 を対立仮説 (alternative hypothsis) という.
- Θ_0 が Θ の 1 つの元から成るとき H_0 を単純仮説 (simple hypothsis) という.
- そうでないとき H_0 を複合仮説 (composite hypothsis) という. 言葉を乱用して,「Θ_0 は単純仮説である」等ということもある.

仮説検定の考え方 (3)

- 仮説 (1) に対して, 以下のように検定方式を定めることができる.
- X の取り得るすべての値の集合を $\mathbb{X}^n (\subset \mathbb{R}^n)$ と表す.
- $\mathbb{X}^n$ を 2 つの排反で空でない部分集合 W と W^c に分割する.
- $W \neq \emptyset$, $W^c \neq \emptyset$ で $W \cup W^c = \mathbb{X}^n$ かつ $W \cap W^c = \emptyset$ である.
- 検定方式は

$$
\begin{aligned}
x \in W &\Rightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却し, 対立仮説 } H_1 \text{ を採択,} \\
x \in W^c &\Rightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を受容}
\end{aligned}
$$

  と表現できる.
- W を棄却域 (critical region) という.
- W^c を受容域 (acceptance region) という.

仮説検定の考え方 (4)

- 上のように定めた検定方式には **2** つのタイプの誤りが起こる可能性がある.
  (1) 帰無仮説 $\boldsymbol{H_0}$ が正しいにもかかわらず標本の実現値 $\boldsymbol{x}$ に基づいて検定した結果, $\boldsymbol{H_0}$ を棄却してしまうこと.
  (2) 対立仮説 $\boldsymbol{H_1}$ が正しいにもかかわらず標本の実現値 $\boldsymbol{x}$ に基づいて検定した結果, $\boldsymbol{H_0}$ を受容してしまうことである.
- **(1)** の誤判断を第 **1** 種の誤りという.
- **(2)** の誤判断を第 **2** 種の誤りとそれぞれ呼ぶ.
- 一般に一方の誤りが起こる確率を小さくする検定方式は, 他方の誤りを起こす確率を大きくする. すなわち, 両者の誤りが起こる確率を同時に小さくする検定方式はないことが知られている.

仮説検定の考え方 (5)

	帰無仮説 H_0 を棄却	帰無仮説 H_0 を受容
H_0 が真	第 1 種の誤り	正しい判断
H_1 が真	正しい判断	第 2 種の誤り

仮説検定の考え方 (6)

以下では「よい」検定方式を一般的な形で定式化することを考える.

- 関数 $\phi : \mathbb{X}^n \to [0, 1]$ は可測関数とする.
- この関数 ϕ を用いて次のように検定方式を定める. $X = x$ を観測したとき, 確率 $\phi(x)$ で帰無仮説 H_0 を棄却する.
- この ϕ を検定関数 (test function) という.
- 関数 ϕ が $\mathbb{X}$ の空でない部分集合の定義関数のとき, この検定関数 ϕ で定まる検定方式を非確率化検定 (nonrandomized test) という. すなわち

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in W) \\ 0 & (x \in W^c) \end{cases}$$

  とすると棄却域 W をもつ非確率化検定が定まる.
- そうでない検定方式を確率化検定 (randomized test) という.

仮説検定の考え方 (7)

- 以後 $\phi(X)$ を検定統計量 (test statistic) ということにする.
- 検定統計量 ϕ によって定まる検定方式を単に検定ということにする.
- 検定統計量 $\phi(X)$ の第 1 種の誤りの確率は

$$\mathrm{E}_\theta[\phi(X)] \qquad (\theta \in \Theta_0).$$

- 第 2 種の誤りの確率は

$$1 - \mathrm{E}_\theta[\phi(X)] \qquad (\theta \in \Theta_1).$$

ただし

$$\mathrm{E}_\theta[\phi(X)] = \int_{\mathbb{X}^n} \phi(x)\mathrm{p}(x|\,\theta)\,\mathrm{d}x$$

と定めた.

仮説検定の考え方 (8)

- 「よい」検定として, まず第 1 種の誤りの確率の Θ_0 上の上限を $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ 以下にするような検定を考える. すなわち

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathrm{E}_\theta[\phi(X)] \le \alpha. \tag{2}$$

- (1) をみたす検定関数または検定 ϕ を有意水準 α の検定.
- 有意水準 α の検定 ϕ の中で, 第 2 種の誤りの確率

$$1 - \mathrm{E}_\theta[\phi(X)] \qquad (\theta \in \Theta_1) \tag{3}$$

を Θ_1 上で最小にするするものを見つけることを目指す. すなわち

$$\mathrm{E}_\theta[\phi(X)] \qquad (\theta \in \Theta_1)$$

を最大にするものである.

- この確率を $\theta \in \Theta_1$ の関数とみて

$$\beta(\theta) := \mathrm{E}_\theta[\phi(X)] \qquad (\theta \in \Theta_1)$$

と表記. これを検出力関数 (power function) または検出力という.

$\boxed{\textbf{定義 8.1}}$ 有意水準 $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ の検定 ϕ で検出力を任意の $\theta \in \Theta_1$ に対して最大にするものを有意水準 α の一様最強力検定 (uniformly most powerful test= u.m.p. 検定) という. 特に帰無仮説と対立仮説が単純仮説であるとき, u.m.p. 検定を単に有意水準 α の最強力検定 (m.p. 検定) という.

P 値を定義する. 検定問題 (1) において, 関数 $T : \mathbb{X}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ により棄却域 $W \subset \mathbb{X}^n$ が

$$W := \{x \in \mathbb{X}^n;\ T(x) > c\}$$

で定まる検定関数 ϕ を考える. すなわち, $\phi(x) = \mathbb{1}_W(x)\ (x \in \mathbb{X}^n)$ である. ただし, 定数 c は

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathsf{E}_\theta[\phi(X)] \le \alpha$$

をみたすものである.

仮説検定の考え方 (8)

定義 8.2

$$p(x) := \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathrm{Pr}_\theta(T(X) \geq T(x)) = \sup_{\theta\in\Theta_0} \mathrm{E}_\theta[\mathbb{1}_{[W(x),\infty)}(W(X))]$$

を実現値 $X = x$ に対する P 値 (単に P 値) という.

定理 8.3 すべての $\theta \in \Theta_0$ と α $(0 < \alpha < 1)$ に対して

$$\mathrm{Pr}_\theta(p(X) \leq \alpha) \leq \alpha$$

が成り立つ.

定理 8.3 の証明 資料を参照のこと.

Neyman-Pearson の定理 (1)

まず m.p. 検定を求める最も基本的定理を述べる. 以下では, 簡単のために X は同時 p.d.f. $\mathbf{p}_\theta^X(x)$ をもつとして議論を進めていく. 離散型確率変数のときは同時 p.m.f. を考え, 積分を和の記号に替えればよい.

定理 8.4 母数空間は $\mathbb{R}^d$ の異なる 2 点から成るとする.
$\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ である.
$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_\theta^{\otimes n}\,(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とし,
$\mathsf{p}_\theta^X(x)\,(\theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^n)$ を X の同時 p.d.f. または p.m.f. とする. 検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

に対する有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の m.p. 検定 ϕ_0 は以下で与えられる.

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & (\mathsf{p}_{\theta_1}^X(x) > c\mathsf{p}_{\theta_0}^X(x)) \\ \gamma & (\mathsf{p}_{\theta_1}^X(x) = c\mathsf{p}_{\theta_0}^X(x)) \\ 0 & (\mathsf{p}_{\theta}^X(x) < c\mathsf{p}_{\theta_0}^X(x)) \end{cases} \tag{4}$$

である. ただし $\gamma, c\,(0 \le \gamma \le 1, c > 0)$ は

$$\mathsf{E}_{\theta_0}[\phi_0(X)] = \alpha \tag{5}$$

から定まる定数である.

Neyman-Pearson の定理 (2)

定理 8.4 の証明 まず

$$B_1 = \left\{ x \in \mathbb{X}^n;\ \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x) > c\mathsf{p}^X_{\theta_0}(x) \right\},$$

$$B_2 = \left\{ x \in \mathbb{X}^n;\ \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x) = c\mathsf{p}^X_{\theta_0}(x) \right\},$$

$$B_3 = \left\{ x \in \mathbb{X}^n;\ \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x) < c\mathsf{p}^X_{\theta_0}(x) \right\}$$

とする. ϕ は有意水準 α の任意の検定とする. すなわち

$$\mathsf{E}_{\theta_0}[\phi(X)] \leq \alpha \tag{6}$$

をみたす.

定理 8.4 の証明の続き　一方 (4) より

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{\theta_1}[\phi_0(X)] - \mathsf{E}_{\theta_1}[\phi(X)] \\
&\quad = \int_{\mathbb{X}^n} \phi_0(x) \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{X}^n} \phi(x) \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{B_1} \underbrace{\phi_0(x)}_{=1} \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{B_2} \underbrace{\phi_0(x)}_{=\gamma} \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{B_3} \underbrace{\phi_0(x)}_{=0} \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad - \int_{B_1} \phi(x) \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{B_2} \phi(x) \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{B_3} \phi(x) \mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{B_1} \{1 - \phi(x)\} \underbrace{\mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x}_{> c\mathsf{p}^X_{\theta_0}(x)\ (x \in B_1)} + \int_{B_2} \{\gamma - \phi(x)\} \underbrace{\mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)\,\mathrm{d}x}_{= c\mathsf{p}^X_{\theta_0}(x)\ (x \in B_2)} \\
&\qquad + \int_{B_3} \{-\phi(x)\} \underbrace{\mathsf{p}^X_{\theta_1}(x)}_{< c\mathsf{p}^X_{\theta_0}(x)\ (x \in B_3)} \mathrm{d}x =: (*)
\end{aligned}
$$

定理 8.4 の証明の続き

$$
\begin{aligned}
(*) \geq & \int_{B_1} \{1 - \phi(x)\} c\,\mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x + \int_{B_2} \{\gamma - \phi(x)\} c\,\mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x \\
& + \int_{B_3} \{-\phi(x)\} c\,\mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x \\
= & \; c \int_{B_1} \{1 - \phi(x)\} \mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x + c \int_{B_2} \{\gamma - \phi(x)\} \mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x \\
& + c \int_{B_3} \{-\phi(x)\} \mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x \\
= & \; c \int_{\mathbb{X}^n} \{\phi_0(x) - \phi(x)\} \mathrm{p}^X(x|\,\theta_0)\,\mathrm{d}x \\
= & \; c \Big\{ \mathrm{E}_{\theta_0}[\phi_0(X)] - \mathrm{E}_{\theta_0}[\phi(X)] \Big\} \qquad (\because (4)) \\
= & \; c \Big\{ \alpha - \mathrm{E}_{\theta_0}[\phi(X)] \Big\} \geq 0 \qquad (\because (6) \text{ より})
\end{aligned}
$$

を得る.

Neyman-Pearson の定理 (5)

定理 **8.4** の証明の続き　したがって

$$\mathsf{E}_{\theta_1}[\boldsymbol{\phi}_0(X)] \geq \mathsf{E}_{\theta_1}[\boldsymbol{\phi}(X)]$$

となるので, $\boldsymbol{\phi}_0$ は有意水準 α の m.p. 検定となる. $\square$

例 8.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ で σ^2 $(\sigma > 0)$ は既知とする. このとき検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0)$$

に対する m.p. 検定を求める. まず $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ の同時 p.d.f. は

$$\mathrm{p}^X(x|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (x_j-\theta)^2\right], \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$$

で与えられることに注意をする. 簡単な計算から

$$\begin{aligned}\log\left[\frac{\mathrm{p}^X(x|\theta_1)}{\mathrm{p}^X(x|\theta_0)}\right] &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^n (x_j-\theta_1)^2 - \sum_{j=1}^n (x_j-\theta_0)^2\right] \\ &= \frac{n(\theta_1-\theta_0)}{\sigma^2}\left(\bar{x}_n - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) \qquad (7)\end{aligned}$$

となる. ただし

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j.$$

例 8.5 の続き　ここで

$$\mathsf{p}^X(x|\theta_0) > c\mathsf{p}^X(x|\theta_1) \Leftrightarrow \log\left[\frac{\mathsf{p}^X(x|\theta_1)}{\mathsf{p}^X(x|\theta_0)}\right] > \log c$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_n > c' \qquad (\because (7) \text{ より})$$

である. X は連続型確率変数なので, $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j = c'$ である確率は 0 となるので, m.p. 検定の形は

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & (\overline{x}_n > c') \\ 0 & (\overline{x}_n \leq c') \end{cases}$$

となる. 定数 c' は

$$\alpha = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\{\overline{X}_n > c'\} \tag{8}$$

から定まる. ただし, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\mathsf{Pr}_\theta(X \in B) = \mathsf{E}_\theta[\mathbb{1}_B(X)] = \int_B \mathsf{p}^X(x|\theta)\,\mathrm{d}x \qquad (\theta \in \Theta)$$

と定めた.

例 8.5 の続き (8) は

$$\alpha = \Pr_{\theta_0}\left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma}\right\} \tag{9}$$

と書き直せ, $\theta = \theta_0$ のもとで $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)/\sigma \sim \mathrm{N}(0, 1)$ であるので

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

とすると (9) は

$$\alpha = 1 - \Phi\left[\frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma}\right]$$

となる. 標準正規分布の上側 $100 \times \alpha\%$ を z_α とすると

$$\frac{\sqrt{n}(c' - \theta_0)}{\sigma} = z_\alpha \Leftrightarrow c' = \theta_0 + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る.

例 8.5 の続き　よって有意水準 α の m.p. 検定は

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \left(\bar{x}_n > \theta_0 + \dfrac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ 0 & \left(\bar{x}_n \leq \theta_0 + \dfrac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}$$

となる. 次に ϕ_0 の検出力は次のようになる.

$$\begin{aligned} \beta_{\phi_0}(\theta_1) &= \mathrm{E}_{\theta_1}[\phi_0(X)] = \mathrm{Pr}_{\theta_1}\left\{\bar{X}_n > \theta_0 + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right\} \\ &= \mathrm{Pr}_{\theta_1}\left\{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_1)}{\sigma} > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma}\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

となる. $\theta = \theta_1$ のとき $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_1)/\sigma \sim \mathrm{N}(0, 1)$ なので, (10) より仮説間の平均の差 $\theta_1 - \theta_0 (> 0)$ が大きいほど検出力は大きくなる. また標本 n が大きくなっても検出力が大きくなることがわかる. □

例 8.6 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Ber}(\theta)\ (0 < \theta < 1)$ とする. このとき検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0) \tag{11}$$

に対する m.p. 検定を求める. まず $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ の同時 p.m.f. は

$$\mathrm{p}^X(x|\theta) = \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{1-x_j} \qquad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top) \tag{12}$$

で与えられるので

$$\log \frac{\mathrm{p}^X(x|\theta_1)}{\mathrm{p}^X(x|\theta_0)} = \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j\right\} \log\left\{\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0}\right\} + n\log\left\{\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right\}$$

となる.

例 8.6 の続き $\theta_1 > \theta_0$ としたので, $\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0} > 1$ であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}^X(x|\theta_1) > c\mathsf{p}^X(x|\theta_0) \;&\Leftrightarrow\; \log\left[\frac{\mathsf{p}^X(x|\theta_1)}{\mathsf{p}^X(x|\theta_0)}\right] > c' \\
&\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} x_j > c''
\end{aligned}
$$

と書きかえることができる. よって有意水準 α の m.p. 検定は

$$
\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & (\sum_{j=1}^n x_j > c'') \\ \gamma & (\sum_{j=1}^n x_j = c'') \\ 0 & (\sum_{j=1}^n x_j < c'') \end{cases} \tag{13}
$$

の形になる.

例 8.6 の続き　ここで γ と c'' を

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathrm{E}_{\theta_0}[\phi_0(X)] \\ &= \mathrm{Pr}_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j > c''\right\} + \gamma \mathrm{Pr}_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j = c''\right\} \qquad (14)\end{aligned}$$

から定まる. $\sum_{j=1}^{n} X_j$ は $\theta = \theta_0$ のとき二項分布 $\mathrm{Bino}(n, \theta_0)$ に従うので, (14) は

$$\alpha = \sum_{j=c''+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j} + \gamma \binom{n}{c''} \theta_0^{c''} (1-\theta)^{n-c''}$$

となる. まずは c'' を

$$\sum_{j=c''+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j} \leq \alpha < \sum_{j=c''}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j}$$

をみたす整数を定める. これから c_0 と書くことにする.

Neyman-Pearson の定理 (11)

$\boxed{\text{例 8.6 の続き}}$ すると γ は

$$\gamma = \left[\alpha - \sum_{j=c_0+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j}\right] \Big/ \binom{n}{c_0} \theta_0^{c_0} (1-\theta_0)^{n-c_0}$$

で定められる. □

8.3 検定統計量の導出法 (1)

- $\mathbb{X}^n$ を標本空間.
- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_\theta^{\otimes n}$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$.
- 検定関数 $\phi : \mathbb{X}^n \to [0, 1]$ によって定まる検定方式は, 以下のようにに定まることがある. ある統計量 $S : \mathbb{X}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ と定数 c が存在して

$$S(x) \le c \Rightarrow \phi(x) = 1$$
$$S(x) > c \Rightarrow \phi(x) = 0$$

となる.

- この場合, $S(X)$ のことも検定統計量と呼ぶことにする.

8.3 検定統計量の導出法 (2)

記号

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_\theta^{\otimes n}$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とする. ただし, $\mathsf{P}_\theta^{\otimes n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度.
- $\mathsf{P}_\theta^{\otimes n}$ は同時 p.d.f. $\mathsf{p}^X(x|\theta)$ をもつとする.
- 母数空間 Θ は Θ_0 と Θ_0 に分割されたとする. すなわち $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, $\Theta_0 \neq \emptyset$, $\Theta_1 \neq \emptyset$ である.

定義 8.7 検定問題

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

を検定するための尤度比検定統計量 (likelihood ratio statistic=l.r. 統計量) は

$$\lambda(X) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} \mathrm{p}^X(X|\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} \mathrm{p}^X(X|\theta)}$$

で与えらる. このとき正の定数 C が存在して H_0 の棄却域が

$$W = \{x \in \mathbb{X}^n;\ \lambda(x) \leq C\}$$

で与えられる検定を尤度比検定 (likelihood ratio test=l.r.t.) という. すなわち

$$\phi(x) = \mathbb{1}_W(x) = \begin{cases} 1 & (x \in W) \\ 0 & (x \notin W) \end{cases}$$

となる.

8.3.1. 尤度比検定統計量 (2)

$\boxed{\textbf{注意 8.8}}$ $\widehat{\theta}(X)$ を母数空間 Θ での θ の最尤推定量とし, $\widehat{\theta}_0(X)$ を母数空間を Θ_0 に制限したときの θ の最尤推定量とする. このとき

$$\lambda(X) = \frac{\mathsf{p}^X(X|\widehat{\theta}_0(X))}{\mathsf{p}^X(X|\widehat{\theta}(X))}$$

と表現できる. □

定理 8.9 $X \sim \mathrm{P}_{\theta^*}^{\otimes n}$ $(\theta^* \in \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ とする. Θ の次元を d, Θ_0 の次元を $r\,(r < d)$ とする. 検定問題

$$H_0 : \theta^* \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad \theta^* \in H_1 : \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0$$

に対する尤度比検定統計量を $\lambda(X)$ とする. このとき H_0 のもとで次が成り立つ.

$$-2\log\lambda(X) \rightsquigarrow \chi^2_{d-r}.$$

定理 8.9 の証明 資料 (節 12.4 の定理 12.12) を参照のこと.

注意 8.10 定理 8.9 の結果を用いると尤度比検定の棄却域は

$$W = \{x \in \mathbb{X}^n;\ -2\log\lambda(x) > \chi^2_{d-r,\alpha}\}$$

で与えらる. ただし $\chi^2_{d-r,\alpha}$ は自由度 $d-r$ の χ^2 分布の上側 $100 \times \alpha\%$ 点である. したがって, 検定手続きは

$$x \in W \Rightarrow H_0 \text{ は棄却.}$$

記号

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathrm{P}_\theta^{\otimes n}\ (\theta \in \Theta \subset R)$ とする.
- $0 < \alpha < 1$ を固定する.
- 母数 θ に依存しない区間 $[L(X), U(X)] \subset \Theta$ が $\forall\theta \in \Theta$ に対して

$$\Pr_\theta\left\{L(X) \leq \theta \leq U(X)\right\} \geq 1 - \alpha \tag{15}$$

  をみたすとき区間 $[L(X), U(X)]$ を信頼係数 $(1 - \alpha)$ の θ の信頼区間 (confidence interval) という.
- $L(X), U(X)$ を信頼限界 (confident limit) という.
- 通常 α として $0.05, 0.01, 0.1$ 等が用いられる.
- (15) の関係式は, たとえば 100 組の実現値を発生させると 100α 回程度は信頼区間に真の母数 θ は含まれないと考える.

例 8.21 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ とする. ただし $\theta \in \mathbb{R}$ で σ^2 $(\sigma > 0)$ の値は既知である. このとき標本平均 $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j$ は

$$\overline{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる. このことより

$$S_\theta(X) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta)}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

となる. ここで $z_{\alpha/2}$ を標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点ととると

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathrm{Pr}_\theta\left\{-z_{\alpha/2} \le S_\theta(X) \le z_{\alpha/2}\right\} \\ &= \mathrm{Pr}_\theta\left\{\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \theta \le \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} \end{aligned}$$

なることがわかる.

8.6. 区間推定の考え方 (3)

$\boxed{\text{例 }\mathbf{8.21}\text{ の続き}}$ したがって

$$[L(X),\ U(X)] = \left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

は信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間となる. □

検定方式の反転

- $\Theta \subset \mathbb{R}$ とし, $\theta_0 \in \Theta$ を取る[1].
- 検定問題 $H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$ を考える.
- 有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ の検定の受容域を $A(\theta_0)$ とおく. すなわち

$$\Pr_{\theta_0}\{X \in A(\theta_0)\} \geq 1 - \alpha$$

  が成り立っている.
- そこで $X \in A(\theta_0)$ を θ_0 に関して解くことによって

$$C(X) = \{\theta \in \Theta;\ x \in A(\theta)\}.$$

- $C(X)$ が連結区間となれば (一般に $C(X)$ は連結区間になるという保証はない)

$$\Pr_\theta\{\theta \in A(\theta)\} \geq 1 - \alpha$$

  となるので, $C(X)$ は信頼係数 $(1-\alpha)$ の信頼区間となる.

[1] θ_0 を θ^* と書くべきであろうが, 後の表記上の都合でこの記号を採用した.

例 8.22 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Ber(θ) $(0 < \theta < 1)$ とする.
$\theta_0 \in (0, 1)$ と固定し, 検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

を考える. この検定問題に対する尤度比検定統計量は

$$\lambda(X) = \frac{\prod_{j=1}^n \theta_0^{X_j}(1-\theta_0)^{1-X_j}}{\prod_{j=1}^n \overline{X}_n^{X_j}(1-\overline{X}_n)^{1-X_j}} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta_0}{\overline{X}_n}\right)^{X_j}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\overline{X}_n}\right)^{1-X_j}$$

となる. これより受容域 $A(\theta_0)$ は

$$A(\theta_0) = \Biggl\{x \in \{0, 1\}^n; \\ -2\log\lambda(x) = 2n\overline{x}_n \log\left(\frac{\overline{x}_n}{\theta_0}\right) + 2n(1-\overline{x}_n)\log\left(\frac{1-\overline{x}_n}{1-\theta_0}\right) \leq \chi^2_{1,\alpha}\Biggr\}.$$

8.7. 信頼区間の構成法 (3)

$\boxed{\text{例 8.22 の続き}}$ ただし $\bar{x}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ である. よって

$$C(X) := \left\{\theta;\ \bar{X}_n \log\left(\frac{\bar{X}_n}{\theta}\right) + (1-\bar{X}_n)\log\left(\frac{1-\bar{X}_n}{1-\theta}\right) \le \frac{\chi^2_{1,\alpha}}{2n}\right\}$$

となる. ただし信頼限界 $L(X)$, $U(X)$ を陽に求めることはできない. □

枢軸量 (pivotal quantity)

- 一般に $Q(X, \theta)$ の分布が θ に依存しないとき, $Q(X, \theta)$ を枢軸量 (pivotal quantity) という.
- このとき

$$\Pr_\theta\left(a \le Q(X, \theta) \le b\right) = 1 - \alpha$$

  をみたす a, b を定めて, $a \le Q(X, \theta) \le b$ を θ に関して解くことにより, 信頼係数 $(1 - \alpha)$ の θ の信頼区間

$$C(X) = \{\theta \in \Theta;\ a \le Q(X, \theta) \le b\}$$

  が得られる.
- うまく連結区間になれば ($C(X)$ が連結区間になる保証は一般的にはない), 信頼区間として使用できる.

$\boxed{\text{例 } 8.23}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\theta)\ (\theta > 0)$ とする. すなわち, p.d.f. は

$$p(x|\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる. すると $2\theta \sum_{j=1}^{n} X_j$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布に従うので

$$Q(X, \theta) = 2\theta \sum_{j=1}^{n} X_j$$

とおく.

$\boxed{\text{例 8.23 の続き}}$ よって $\chi^2_{2n,\alpha}$ を自由度 $2n$ の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点とすると

$$\Pr_\theta\left(\chi^2_{2n,1-\alpha/2} \le Q(X,\theta) \le \chi^2_{2n,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

となるので,

$$[L(X),U(X)] = \left[\frac{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}{2\sum_{j=1}^n X_j}, \frac{\chi^2_{2n,\alpha/2}}{2\sum_{j=1}^n X_j}\right]$$

は信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間となる. □

本日の講義内容のまとめ

- 8.1 仮説検定の考え方
  - 帰無仮説と対立仮説
  - 第 **1** 種の誤りと第 **2** 種の誤り
  - 検定関数と検定統計量
  - 有意水準
- 8.2 Neyman-Pearson の補題
- 8.3 検定統計量の導出
  - 尤度比検定統計量
- 8.6 区間推定の考え方
  - 信頼係数
- 8.7 信頼区間の構成法
  - 検定方式の反転
  - pivot 法（枢軸量）