立教大学　数理統計学序論 1 ・数理統計学 1

今野 良彦

大阪公立大学

2025 年 10 月 25 日

講義内容

- 前回の講義の記号の復習
- 3.1 確率に対する不等式
- 3.2 期待値に対する不等式
- 4.1 確率変数列の収束のタイプ
- 4.2 大数の弱法則と強法則
- 4.3 中心極限定理
- 4.4 デルタ法

記号の復習 (1)

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$: 確率空間.
  - $\mathcal{A}$ は σ 加法族.
  - $\mathsf{Pr} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ は確率測度.
- X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数
  $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((r, \infty)) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) > r\}.$$

- 確率変数 X の分布 P^X

$$\mathsf{P}^X(B) = \mathsf{Pr}(\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in B\} \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

ここで, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は Borel 集合族. すなわち, $\mathbb{R}$ の開集合族を含む最小の σ 加法族.

- 確率変数 X の累積分布関数 F^X: $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathsf{F}^X(x) = \mathsf{P}^X((-\infty, x])] = \mathsf{Pr}(\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq x).$$

  - F^X が階段関数 $\Rightarrow$ X は離散型確率変数.
  - F^X が連続関数 $\Rightarrow$ X は連続型確率変数.

記号の復習 (2)

- 確率変数 X は離散型のとき

$$\mathsf{p}^X(x) = \mathsf{F}^X(x) - \mathsf{F}^X(x-)$$

を確率関数 (p.m.f.) という.

- 確率変数 X は連続型のとき

$$\mathsf{F}^X = \int_{-\infty}^{x} \mathsf{p}^X(t)\,\mathrm{d}t$$

をみたす非負関数 p^X(存在するならば) を確率密度関数 (p.d.f.) という.

- 確率変数 X の期待値を

$$\mathsf{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x\mathsf{p}^X(x) & (\text{離散型の場合}) \\ \int_{\mathbb{R}} x\mathsf{p}^X(x)\,\mathrm{d}x & (\text{連続型の場合}) \end{cases}$$

ただし, 和および積分の中を絶対値をとったものが有限ののとき.

記号の復習 (3)

- 確率変数 X の分散: $\mathsf{E}[X^2] < \infty$ のとき
$$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}[\{X - \mathsf{E}[X]\}^2]$$
- $\mathsf{F}^X(\cdot)$ が階段関数のとき, X を離散型確率変数という.
- 確率変数 X の積率母関数 (m.g.f.): 原点を含むある近傍 $(-z_0, z_0)$ があって, $\forall t \in (-z_0, z_0)$ に対して
$$\mathsf{m}^X(t) = \mathsf{E}[e^{tX}]$$

3.1 確率に対する不等式 (1)

定理 3.1 (Markov の不等式) X を非負値確率変数[1] とし, $\mathsf{E}[X] < \infty$ とする. このとき, $\forall t > 0$ に対して

$$\Pr(X \geq t) \leq \min\left\{\frac{\mathsf{E}[X]}{t}, 1\right\}.$$

証明 X は連続型で p.d.f. p を持つ場合を示す.

$$\mathsf{E}[X] = \int_0^\infty x\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t x\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^\infty x\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_t^\infty x\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\geq t\int_t^\infty \mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x = t\Pr(X \geq t)$$

からわかる. □

[1] $\Pr(X \geq 0) = 1$ をみたす確率変数.

3.1 確率に対する不等式 (2)

系 3.2 $\lambda > 0$ とする. X を確率変数とし $\mathbf{E}[e^{\lambda X}] < \infty$ とする. このとき $\forall t > 0$ に対して

$$\Pr(X \geq t) \leq e^{-\lambda t}\mathbf{E}[e^{\lambda X}]$$

が成り立つ.

証明 $e^{\lambda X}$ は非負値確率変数なので定理 3.1 を適用すれば

$$\Pr(X \geq t) = \Pr(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) \leq e^{-\lambda t}\mathbf{E}[e^{\lambda X}]$$

となる. □

3.1 確率に対する不等式 (3)

$\boxed{\text{系 3.3(Chebyshev の不等式)}}$ X を確率変数とし
$\mu = \mathsf{E}[X],\ \sigma^2 = \mathsf{Var}[X] < \infty\ (0 < \sigma < \infty)$ とする. このとき
$\forall t > 0$ に対して

$$\Pr(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

が成り立つ.
$\boxed{\text{証明}}$ $(X - \mu)^2$ に対して Markov の不等式 (定理 3.1) を適用する.
すると

$$\Pr(|X - \mu| \geq t) = \Pr((X - \mu)^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathsf{E}[(X - \mu)^2]}{t^2}$$

がわかる. □

定理 3.10 (Cauchy-Schwarz の不等式) 確率変数 X と Y は 2 次の有限な期待値を持つとき

$$\mathrm{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]}$$

となる.

証明 $\mathrm{E}[X^2] = \mathrm{E}[Y^2] = 0$ のとき, 補題 ?? から $\Pr(X = 0) = \Pr(Y = 0) = 1$ となるので, 不等式は自明である. このことを踏まえ, $\mathrm{E}[X^2] \neq 0$ として証明を進める.
いま, $g(t) := \mathrm{E}[(tX - Y)^2]$ とおく. 期待値の中を展開して期待値の線型性を用いると

$$\begin{aligned} 0 \leq g(t) &= \mathrm{E}[t^2X^2 - 2tXY + Y^2] \\ &= \mathrm{E}[X^2]\left\{t - \frac{\mathrm{E}[XY]}{\mathrm{E}[X^2]}\right\}^2 + \frac{\mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2] - \{\mathrm{E}[XY]\}^2}{\mathrm{E}[X^2]} \end{aligned}$$

となる.

定理 3.10 の証明の続き　これから

$$g\left(\frac{\mathrm{E}[XY]}{\mathrm{E}[X^2]}\right) = \frac{\mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2] - \{\mathrm{E}[XY]\}^2}{\mathrm{E}[X^2]} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2] - \{\mathrm{E}[XY]\}^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\mathrm{E}[XY]\right| \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]} \tag{1}$$

を得る. **(1)** において, X, Y を $|X|$, $|Y|$ と置き換えると定理の不等式は示される.
等号が成立するのは資料を参照のこと. □

定義 3.11 関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が凸であるとは各 $x, y \in \mathbb{R}$ と $0 \leq \forall t \leq 1$ に対して

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$$

が成立するときをいう. さらに $-g$ が凸のとき g は concave であるという.

【注意】(1) $a < b$ とし, 関数 $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は凸としたとき, 関数 g は (a, b) で連続であることが知られている.
(2) g を $\mathbb{R}$ 上の凸関数とする. このとき, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, ある $r_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$g(x) \geq r_0(x - x_0) + g(x_0) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

となることが知られている. 実は同値条件.
例 $g(x) = |x|$ とし, $x_0 = 0$ としたとき

$$g(x) \geq r_0 x \qquad (-1 \leq r_0 \leq 1).$$

$x_0 > 0$ のとき, $r_0 = 1$; $x_0 < 0$ のとき, $r_0 = -1$.

$\boxed{\text{定理 3.12(Jensen の不等式)}}$ X を有限な期待値を持つ確率変数とする. (1) 関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸で $g(X)$ の期待値は有限のとき

$$\mathsf{E}[g(X)] \geq g(\mathsf{E}[X])$$

となる.

$\boxed{\text{証明}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ に対してある定数 $r_0 \in \mathbb{R}$ が存在 [2] して

$$g(\mathsf{E}[X]) + r\{x - \mathsf{E}[X]\} \leq g(x)$$

となる. x に X を代入して上の不等式の両辺の期待値を取れば

$$g(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[g(X)]$$

がわかる. □

[2] 前のスライドの注意を参照.

$\boxed{\text{復習}}$ 実数列 $\{x_n\}$ が点 x に収束するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある正の整数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

が成り立つことである. このことを $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と書いた. たとえば $x_n = x\ (\forall n \in \mathbb{N})$ ならば, 明らかに $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる.

すると $|a| < \infty$, $|b| < \infty$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = a;\ lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{nt\to\infty} b_n, \lim_{n\to\infty} a_n b_n \quad = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{nt\o\infty} b_n.$$

関数 $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続で, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a).$$

これと同じことを確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{Pr})$ 上の確率変数列について考えてみる.

$$X_1, X_2, \ldots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

とする. すなわちこの確率変数列の任意の有限個の確率変数列は独立同一に $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う. さらに別の確率変数 X も $\mathrm{N}(0, 1)$ に従うとする. このとき X_n は X に「収束」するとしたい. しかし

$$\mathrm{Pr}(X_n \neq X) = 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である.

別の例をあげる. $X_1, X_2, \ldots$ は独立で

$$X_n \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

とする. 直観的には, 十分大きな n に対して X_n は 0 の近辺に集中すると予想するだろう. 実際, Chebyshev の不等式 から, $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\Pr(|X_n| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

よって

$$\Pr(|X_n| < \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

しかし X_n は連続型確率変数なので, すべての n に対して

$$\Pr(X_n = 0) = 0$$

である. これらの例から, 確率変数列の収束については, 実数列の収束とは異なる道具立てが必要になることがわかる.

この章では確率変数列の収束の定義を述べ, これに関わる基本的な事項をまとめたうえで次の重要な事項を説明する.

(1) 大数の法則. $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad \mu = \mathrm{E}[X_1]\,(-\infty < \mu < \infty)$$

とする. このとき $\overline{X}_n$ は高い確率で μ の近くにいることを保証する定理である.

(2) 中心極限定理. $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2\ (0 < \sigma < \infty)$ とする. n が十分大きいとき $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$ の分布は正規分布で近似できることを保証する定理である.

以上の事項について証明なしで主張まずを紹介する.

定義 4.1 確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{Pr})$ 上の $X, X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とする. さらに, 各 $X_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ の c.d.f. を F_n, X の c.d.f. を F とする.

(1) 確率変数列 $\{X_n\}$ は確率変数 X に確率収束するとは, $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Pr}\left(\left|X_n - X\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

が成り立つときをいう. このことを $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X\ (n \to \infty)$ と書く.

(2) 確率変数列 $\{X_n\}$ は確率変数 X に概収束するとは

$$\mathrm{Pr}\left(\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

が成り立つときをいう. このことを $X_n \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} X\ (n \to \infty)$ と書く.

定義 4.1 の続き

(3) 確率変数列 $\{X_n\}$ は確率変数 X に分布収束するとは, F のすべての連続点 x において

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{F}(x)$$

が成り立つときをいう. このことを $X_n \rightsquigarrow X\ (n \to \infty)$ と書く. また, $X_n \rightsquigarrow X\ (n \to \infty)$ かつ $X \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$ のときには $X_n \rightsquigarrow \mathrm{N}(0,\ 1)\ (n \to \infty)$ とも書くことがある.

注意 4.2 (1) c を定数とする. $\Pr(X = c) = 1$ かつ $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ とき $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c$ と記す.
(2) $\Pr(X = c) = 1$ かつ $X_n \rightsquigarrow X\ (n \to \infty)$ とき $X_n \rightsquigarrow c\ (n \to \infty)$ と記す. □

定義 4.3 $X_1, X_2, \ldots$ を確率変数列とし X を別の確率変数とする. さらに $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$, $\mathrm{E}[X^2] < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする. 確率変数列 $\{X_n\}$ が確率変数 X に平均 2 乗の意味で収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

が成り立つときをいう. このことを $X_n \xrightarrow{\text{q.m.}} X$ と記すであるという.

定理 4.4 (1) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X\ (n \to \infty)$ ならば, $X_n \xrightarrow{\text{P}} X\ (n \to \infty)$ である.
(2) $X_n \xrightarrow{\text{q.m.}} X\ (n \to \infty)$ ならば, $X_n \xrightarrow{\text{P}} X\ (n \to \infty)$ である.

証明 資料を参照のこと.

$\boxed{\text{例 4.7}}$ $X_1, X_2, \ldots$ は同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ 上で定義された独立な確率変数列で

$$X_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)\,(n \in \mathbb{N})$$

とする. ただし, $0 < p_n < 1$ とする.

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0\,(n \to \infty) \Leftrightarrow p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{a.s}} 0\,(n \to \infty) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

反例は資料の例 4.7 を参照. □

4.1 確率変数列の収束のタイプ (5)

定理 4.9 次に関係が成立する.

(1) $X_n \xrightarrow{\text{q.m.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \ (n \to \infty)$ である.

(2) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \rightsquigarrow X \ (n \to \infty)$ である.

(3) $X_n \rightsquigarrow X$ かつある定数 c があって $\Pr(X = c) = 1$ のとき $X_n \xrightarrow{P} c \ (n \to \infty)$ である.

証明 資料の節 4.5.3 を参照.

注意 4.10 定理 **4.9(1)(2)** の逆は一般に成立しない.

(1) 定理 **4.9(1)** の逆の反例.

$U \sim \mathrm{Unif}(0, 1)$, $X_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{(0,1/n)}(U)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $X = 0$ とおく.

このとき $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\Pr(|X_n| \geq \epsilon) = \Pr(\sqrt{n}\mathbb{1}_{(0,1/n)}(U) \geq \epsilon) = \Pr\left(0 < U < \frac{1}{n}\right)$$
$$= \Pr\left(0 \leq U \leq \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となる. よって $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$ である. しかし

$$\mathrm{E}[X_n^2] = n \int_0^{1/n} \mathrm{d}u = 1$$

なので, $X_n \xrightarrow{q.m.} X$ $(n \to \infty)$ は成立しない.

注意 4.10 の続き

(2) 定理 4.9(2) の逆の反例. $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ とし, $X_n = -X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする. したがって, $X_n \sim \mathrm{N}(0, 1)$ である. 明らかに

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{F}(x)$$

である. よって $X_n \rightsquigarrow X$ となる. しかし $\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\Pr(\left|X_n - X\right| > \epsilon) = \Pr(|2X| > \epsilon) = \Pr\left(|X| > \frac{\epsilon}{2}\right) \neq 0$$

である. よって $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ $(n \to \infty)$ は成立しない. □

注意 4.11 以上の結果をまとめると

$$
\begin{array}{ccccc}
X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X & \Rightarrow & X_n \overset{\text{P}}{\to} X & \Rightarrow & X_n \rightsquigarrow X \\
 & & \Uparrow & & \\
 & & X_n \overset{\text{q.m.}}{\to} X & &
\end{array}
$$

となる.

「$X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow X_n \overset{\text{q.m.}}{\to} X$」も「$X_n \overset{\text{q.m.}}{\to} X \Rightarrow X_n \rightsquigarrow X$」も一般には真ではない反例は演習問題 **4.4** と **4.5** を参照のこと. □ □

定理 4.12 (Portmanteau の補題)

確率変数列 X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, X に対し, X_n と X の分布関数を F_n と F とそれぞれ書く. このとき, 以下の (1) ～ (7) は同値である.

(1) $X_n \rightsquigarrow X$ である.

(2) $\mathbb{R}$ 上の任意の有界連続関数 g に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[g(X_n)] = \mathsf{E}[g(X)]$$

である.

(3) $\mathbb{R}$ 上の任意の有界 Lipshitz 連続関数 g に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[g(X_n)] = \mathsf{E}[g(X)]$$

である.

(4) $\mathbb{R}$ 上の任意の非負値連続関数 g に対して

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}[g(X_n)] \geq \mathsf{E}[g(X)]$$

である.

定理 4.12 (Portmanteau の補題) の続き

(5) $\mathbb{R}$ の任意の開集合 O に対して

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr(X_n \in O) \geq \Pr(X \in O)$$

である.

(6) $\mathbb{R}$ の任意の閉集合 C に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \Pr(X_n \in C) \leq \Pr(X \in C)$$

である.

(7) $\mathbb{R}$ の任意の Borel 集合 B が $\Pr(X \in \partial B) = 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n \in B) = \Pr(X \in B)$$

である. ただし, ∂B は B の境界である.

証明 節 4.5.4 を参照のこと.

定理 4.14 $X_n, X, Y_n, Y\ (n = 1, 2, \ldots)$ は確率変数列とする.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, c を定数とする.

(1) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y \ \Rightarrow\ X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X + Y\ (n \to \infty)$ である.

(2) $X_n \xrightarrow{\mathrm{q.m.}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathrm{q.m.}} Y \ \Rightarrow\ X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{q.m.}} X + Y\ (n \to \infty)$ である.

(3) $X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c \ \Rightarrow\ X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c\ (n \to \infty)$ である.

(4) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y \ \Rightarrow\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} XY\ (n \to \infty)$ である.

(5) $X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c \ \Rightarrow\ X_n Y_n \rightsquigarrow cX\ (n \to \infty)$ である.

(6) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \ \Rightarrow\ g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} g(X)\ (n \to \infty)$ である.

(7) $X_n \rightsquigarrow X \ \Rightarrow\ g(X_n) \rightsquigarrow g(X)\ (n \to \infty)$ である.

定理 4.14(6) の証明　関数 g は x_0 ($\in \mathbb{R}$) で連続なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\exists \delta > 0$ があって

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

である. よって

$$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - X_n(\omega)| < \delta\} \subset \{\omega \in \Omega : |g(X(\omega)) - g(X_n(\omega))| < \epsilon\}$$

となる. 上式の補事象を取り, 補題 **??(4)** の後半の主張を適用すると

$$\mathrm{Pr}(|X - X_n| \geq \delta) \geq \mathrm{Pr}(|g(X) - g(X_n)| \geq \epsilon))$$

がわかる. よって, $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ が示せた.

定理 4.14(7) の証明　$g \circ f$ が有界連続関数となるように有界連続関数 f を取る. $X_n \rightsquigarrow X$ $(n \to \infty)$ と定理 **4.12** から

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[f(g(X_n))] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[(f \circ g)(X_n)] = \mathrm{E}[(f \circ g)(X)] = \mathrm{E}[f(g(X))]$$

から (7) は示される. □

定義 4.15 (1) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし, すべての $n \geq 1$ に対して, $\Pr(Y_n > 0) = 1$ とする. $X_n = o_P(Y_n)$ であるとは

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つときをいう.

(2) $X_n = O_p(Y_n)$ であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $K_\epsilon > 0$ が存在して

$$\Pr\left(\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > K_\epsilon\right) < \epsilon$$

が成り立つときをいう.

注意 4.16　次の関係式が成り立つことが証明できる.

(1) $o_P(1) + O_P(1) = O_P(1)$,

(2) $O_P(1) + O_P(1) = O_P(1)$,

(3) $o_P(1) + o_P(1) = o_P(1)$,

(4) $O_P(1) \cdot O_P(1) = O_P(1)$,

(5) $o_P(1) \cdot O_P(1) = o_P(1)$.

定理 4.17 $X_1, X_2, \ldots$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ 上の i.i.d. 確率変数列とする. $\mathrm{E}[|X_1|] < \infty$ のとき

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu, \qquad (n \to \infty)$$

が成立する. ただし, $\mu = \mathrm{E}[X_1]$ である.

証明 より強い条件 $\mathrm{E}[X_1^2] < \infty$ のもとで定理の主張を証明する. 定理の仮定のもとの証明は節 4.5.1 で与える. $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$ とおく. Chebyshev の不等式 (系 ??) より

$$\mathrm{Pr}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}[\overline{X}_n]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

よりわかる.

仮定のもとでの証明は, 節 4.5.1 を参照せよ. □

4 次の積率が有限という仮定のもとで大数の強法則を証明するために, 次の補題が必要となる. 大数の強法則も $\mathbf{E}[|X_n|] < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$ のもとで成立することに注意せよ.

補題 4.18 $X_1, X_2, \ldots$ は非負値確率変数列で, 条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}[X_n] < \infty \tag{2}$$

をみたすとする. このとき

$$\mathsf{Pr}\left(\omega \in \Omega;\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty\right) = 1$$

が成り立つ.

証明 背理法で証明する．そのために

$$\Pr\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\right) < 1$$

を仮定する．さらに事象 F と N を

$$F := \left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) < \infty\right\}, \qquad N := \left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) = \infty\right\}$$

で定める．このとき

$$\Omega = F \cup N \quad \text{かつ} \quad F \cap N = \emptyset$$

が成り立つ．したがって

$$1 = \Pr(\Omega) = \Pr(F \cup N) = \Pr(F) + \Pr(N) \qquad (\because \Pr \text{ の加法性})$$

がわかる．この関係式と背理法の仮定 $\Pr(F) < 1$ から $\Pr(N) > 0$ となる．

証明の続き 一方, $\omega \in N$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) = \infty$$

であり, $\omega \in N^c$ のとき

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) < \infty$$

である. したがって, 任意の正の実数 $r \geq 0$ に対して

$$r\mathbb{1}_N(\omega) \leq \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega) \tag{3}$$

が成り立つ. (3) の両辺の期待値をとる.

4.2 大数の法則 (5)

すると 定義 **2.5(4)**, **(2)** と **(3)** から

$$r \times \Pr(N) = \mathrm{E}[r \mathbb{1}_N] \leq \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[X_k] < \infty \qquad (4)$$

を得る. **(4)** の最後の等号は単調収束定理からわかる. ここで $\Pr(N) > 0$ であり, $r \geq 0$ は任意の実数だったので, $r \to \infty$ とすれば, **(4)** の最左辺は $+\infty$ となるので, 矛盾が生じる. したがって, $\Pr(F) = 1$ が成り立つ. □

4.2 大数の法則 (6)

定理 4.19(大数の強法則) $X_1, X_2, \ldots$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Pr})$ 上の i.i.d. 確率変数列とし, $\mathbf{E}[|X_1|^4] < \infty$ とする. このとき

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \qquad (n \to \infty) \tag{5}$$

が成立する. ただし, $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ である.

証明 まず

$$\mathsf{E}[|X_1|^4] =: K < \infty, \quad T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \overline{X}_n = \frac{T_n}{n}$$

とおく.
最初に, $\mu = 0$ として (5) を示す. 以下の事象の包含関係に注意する. すなわち

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{X}_n(\omega))^4 < \infty\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n(\omega) = 0\right\}$$

が成立する. このことより

$$\Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n^4 < \infty\right) = 1 \tag{6}$$

がわかると

$$1 = \Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n^4 < \infty\right) \le \Pr\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0\right).$$

となり, $\mu = 0$ のときに (5) がわかる.

証明の続き 以下では $\mu = 0$ として (6) を示す. そのために多項定理を用いて, T_n を展開する. すると

$$(X_1 + \cdots + X_n)^4 = \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_n=4 \\ \ell_j \geq 0\,(j=1,\ldots,n)}} \frac{4!}{\ell_1! \times \ell_2! \times \cdots \times \ell_n!} X_1^{\ell_1} \times X_2^{\ell_2} \times \cdots \times X_n^{\ell_n}$$

となる. ただし $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ は 0 以上の整数である. ここで $X_1^{\ell_1}, X_2^{\ell_2}, \ldots, X_n^{\ell_n}$ は独立あることに注意すると

$$\mathrm{E}[T_n^4] = \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n=4 \\ \ell_j \geq 0\,(j=1,2,\ldots,n)}} \frac{4!}{\ell_1!\ell_2! \times \cdots \times \ell_n!} \mathrm{E}[X_1^{\ell_1}] \times \mathrm{E}[X_2^{\ell_2}] \times \cdots \times \mathrm{E}[X_n^{\ell_n}].$$

さらに, $\mathrm{E}[X_k] = \mu = 0\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ と $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ を用いると

$$\mathrm{E}[T_n^4] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_k^4] + 6 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \mathrm{E}[X_k^2]\,\mathrm{E}[X_\ell^2]$$

を得る.

証明の続き ここで $\mathsf{E}[X_k^4] = K$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ と Cauchy-Schwarz の不等式から

$$\mathsf{E}[X_k^2] \leq \sqrt{\mathsf{E}[X_k^4]} = \sqrt{K}$$

となることに注意すると

$$\mathsf{E}[T_n^4] \leq nK + 6 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \sqrt{K}\sqrt{K} = nK + 3n(n-1)K \leq 3Kn^2$$

を得る. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}[\overline{X}_n^4] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \mathsf{E}[T_n^4] \leq 3K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

となる. したがって 補題 4.18 から (6) が成立することがわかる.

証明の続き　つぎに $\mu \neq 0$ の場合を示す.
$Y_k = X_k - \mu \ (k = 1, 2, \ldots, n)$ とおくと

$$\mathrm{E}[Y_k^4] \leq \mathrm{E}[\{|X_k| + |\mu|\}^4] \leq 8\mathrm{E}[|X_k|^4 + |\mu|^4] \leq 8(K + \mu^4) < \infty$$

が成り立つ. したがってこの定理の証明の前半部分で得られた結果から

$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = 0\right) = 1$$

となる. 最後に, $\forall\omega \in \Omega$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_n(\omega)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)) = \mu$$

に注意すればよい. $\square$

定理 4.22(中心極限定理) $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし, $\mathsf{E}[X_1] = \mu$, $\mathsf{Var}[X_1] = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$ とする. このとき

$$Z_n := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\mathsf{Var}[\overline{X}_n]}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow Z \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つ. ただし $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$ である.

【注意】 $Z_n \rightsquigarrow Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Pr}(Z_n \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/s}\,\mathrm{d}t \qquad (\forall z \in \mathbb{R}).$$

証明 証明は補遺 A.2 を参照.

例 4.23 $X_1, X_2, \dots$ を i.i.d. 確率変数列とし, $\mathrm{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$ とする. このとき中心極限定理 (定理 **??**) より

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1) \qquad (n \to \infty) \tag{7}$$

が成立する. ここで

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2, \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2}$$

とおく. すると

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2 - (\overline{X}_n - \mu)^2\right\}$$

と書き直せる.

$\boxed{\text{例 4.23 の続き}}$ 設定から $\mathbf{E}[(X_1-\mu)^2]=\sigma^2<\infty$ なので, 大数の弱法則 (定理 4.17) より

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2\xrightarrow{\mathrm{P}}\mathbf{E}[(X_1-\mu)^2]=\sigma^2, \tag{8}$$

$$\overline{X}_n\xrightarrow{\mathrm{P}}\mu \qquad (n\to\infty) \tag{9}$$

である. (9) に対して, 定理 4.14(6)($g(x)=(x-\mu)^2$) を用いると

$$(\overline{X}_n-\mu)^2\xrightarrow{\mathrm{P}}0 \qquad (n\to\infty) \tag{10}$$

となる. さらに, (8), (10) と定理 4.14(3)(5) より

$$S_n^2\xrightarrow{\mathrm{P}}\sigma^2 \qquad (n\to\infty)$$

である. 再度, 定理 4.14(6) を用いると

$$\frac{S_n}{\sigma}\xrightarrow{\mathrm{P}}1 \qquad (n\to\infty) \tag{11}$$

がわかる.

4.3 中心極限定理 (4)

例 4.23 の続き 最後に (7), (11) と定理 4.14(5) より

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} \rightsquigarrow \mathrm{N}(0,\ 1) \qquad (n \to \infty)$$

を得る. □

中心極限定理の証明についてのコメント

- 積率母関数を用いた証明 ⇒ cheat proof!
- 特性関数 $\psi^{X_n}(t) = \mathrm{E}[e^{\sqrt{-1}tX_n}]$ を用いた証明がある. ここで, $\sqrt{-1}$ は虚数単位. すると

$$\psi^{X_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} \psi^{X}(t) \Leftrightarrow X_n \rightsquigarrow X\,(n \to \infty).$$

- Lindeberg (1922) の証明.

$$\Leftrightarrow\ X_n \rightsquigarrow X\,(n \to \infty) \Leftrightarrow \mathrm{E}[g(X_n)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}[g(X)].$$

ただし, g は任意の有界連続関数.

- Stein 法を用いた証明.

定理 4.24 $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率ベクトル列とする. ただし $j = 1, 2, \ldots$ に対して

$$X_j = \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{dj} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}[X_{1j}] \\ \mathrm{E}[X_{2j}] \\ \vdots \\ \mathrm{E}[X_{dj}] \end{pmatrix}$$

とし,

$$\mathrm{Var}[X_1] = \Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[X_{11}] & \mathrm{Cov}[X_{11}, X_{21}] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_{11}, X_{d1}] \\ \mathrm{Cov}[X_{21}, X_{11}] & \mathrm{Var}[X_{21}] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_{21}, X_{d1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[X_{d1}, X_{11}] & \mathrm{Cov}[X_{d1}, X_{21}] & \cdots & \mathrm{Var}[X_{d1}] \end{pmatrix}$$

は正定値とする. このとき任意の $c \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\sqrt{n} c^\top (\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, c^\top \Sigma c) \qquad (n \to \infty)$$

が成立する.

4.3 中心極限定理 (7)

定理 4.24 の続き このことを

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow \mathbf{N}_d(0, \Sigma) \qquad (n \to \infty)$$

と書くことにする.

$\{Y_n\}$ を確率変数列とする. Y_n の極限分布が正規分布のとき滑らかな実数値関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $g(Y_n)$ の極限分布を求めよう.

定理 4.25 $Y_1, Y_2, \ldots$ を確率変数列とし

$$\frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1) \qquad (n \to \infty)$$

とし, g は $x = \mu$ の近傍で連続微分可能な関数で $\dot{g}(\mu) \neq 0$ とする. ただし, $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \sigma < \infty$, $\dot{g}(t) = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t)$ である. このとき

$$\frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{|\dot{g}(\mu)|\sigma} \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1)$$

が成立する. すなわち

$$Y_n \approx \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow g(Y_n) \approx \mathrm{N}\left(g(\mu), (\dot{g}(\mu))^2 \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

である. ただし「≈」は「分布が近似できる」の意味である.

証明 $g(x)$ は $x = \mu$ の近傍で連続微分可能である. このことから ある $\delta_1 > 0$ が存在して $|x - \mu| < \delta_1$ なる任意の x に対して

$$g(x) - g(\mu) = (x - \mu) \int_0^1 \dot{g}\,(\mu + t(x - \mu))\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

が成立する. また $\dot{g}\,(x)$ は $x = \mu$ で連続なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta_2 > 0$ があって

$$|x - \mu| < \delta_2 \;\Rightarrow\; \left|\dot{g}\,(x) - \dot{g}\,(\mu)\right| < \epsilon$$

となる. よって $|x - \mu| < \min(\delta_1, \delta_2) =: \delta$ なる任意の x に対して

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \dot{g}\,(\mu + t(x - \mu))\,dt - \dot{g}\,(\mu)\right| &\le \int_0^1 \left|\dot{g}\,(\mu + t(x - \mu)) - \dot{g}\,(\mu)\right| dt \\ &< \epsilon \int_0^1 dt = \epsilon \end{aligned} \tag{13}$$

となる.

$\boxed{\text{証明の続き}}$ (13) より

$$\Pr\left(\left|\int_0^1 \dot{g}(\mu + t(Y_n - \mu))\,dt - \dot{g}(\mu)\right| \geq \epsilon\right) \leq \Pr(|Y_n - \mu| \geq \delta) \tag{14}$$

が成立する. $\sqrt{n}(Y_n - \mu)/\sigma \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1)$ なので $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$ である. (14) から

$$\int_0^1 \dot{g}(\mu + t(Y_n - \mu))\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathrm{P}} \dot{g}(\mu) \tag{15}$$

が成立する. $|Y_n - \mu| < \delta$ が起こったとき, (12) に $x = Y_n$ を代入すれば

$$\frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \int_0^1 \dot{g}(\mu + t(Y_n - \mu))\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

を得る.

$\boxed{\text{証明の続き}}$ さらに，$\sqrt{n}(Y_n - \mu)/\sigma \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1)$ と (15) に注意して定理 ??(5) を (16) に適用すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{\sigma} \\
&= \frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{\sigma} \mathbb{1}\{|Y_n - \mu| < \delta\} + \frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{\sigma} \mathbb{1}\{|Y_n - \mu| \geq \\
&= \frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \underbrace{\int_0^1 \dot{g}\,(\mu + t(Y_n - \mu))\,\mathrm{d}t\, \mathbb{1}\{|Y_n - \mu| < \delta\}}_{\dot{g}(\mu) + o_P(1)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{\sigma} \mathbb{1}\{|Y_n - \mu| \geq \delta\}}_{= o_P(1)} \\
&\rightsquigarrow \dot{g}\,(\mu)\mathrm{N}(0, 1)
\end{aligned}
$$

を得る．よって定理は示された．

証明の続き　したがって, $\mathrm{Pr}(A_n) = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ がわかる. (??) と合わせると $\mathrm{Pr}(A) = 0$ となる. よって

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathrm{Pr}(A^c) = \mathrm{Pr}\Big((\{X \le 0\} \cap \{X \ge 0\}) \cup (\{X \le 0\} \cap \{X < 0\})\Big) \\
&= \mathrm{Pr}(X = 0) + \underbrace{\mathrm{Pr}(X < 0)}_{=0} = \mathrm{Pr}(X = 0)
\end{aligned}
$$

が示せた. □

例 4.26 $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし,
$\mathrm{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$ とする. このとき中心極限定理 (定理 **??**) より

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1) \qquad (n \to \infty)$$

となる. いま

$$W_n = e^{\overline{X}_n}$$

とおく. したがって $g(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ とすれば $\dot{g}(x) = e^x$ となる.
よってデルタ法 (定理 **??**) より

$$\frac{\sqrt{n}(W_n - e^{\mu})}{e^{\mu}\sigma} \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1) \qquad (n \to \infty)$$

となる. よって

$$W_n \approx \mathrm{N}\left(e^{\mu}, \frac{e^{2\mu}\sigma^2}{n}\right)$$

がわかる.

定理 4.27(多次元デルタ法)

$Y_n = (Y_{1n}, Y_{2n}, \ldots, Y_{dn})^\top$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を確率ベクトル列とし

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \rightsquigarrow \mathrm{N}_d(0_d, \Sigma) \qquad (n \to \infty)$$

とする. ただし $\mu \in \mathbb{R}^d$ で Σ は $d \times d$ の正値対称行列とする. 関数 $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は滑らかで

$$\nabla g(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_d} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}, \quad \nabla_\mu := \nabla g(y)\Big|_{y=\mu}$$

とする. このとき

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, \nabla_\mu^\top \Sigma \nabla_\mu) \qquad (n \to \infty)$$

となる.

例 4.28

$$\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \end{pmatrix}$$

は i.i.d. 確率ベクトル列で

$$\mathbf{E}\begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \mu,$$

$$\mathbf{Var}\begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \Sigma$$

とする. ただし Σ は 2×2 の正値対称行列である.

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{1j}, \quad \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{2j}$$

とし

$$Y_n = \overline{X}_1\overline{X}_2, \quad g(s_1, s_2) = s_1 s_2 \ (s_1, s_2 \in \mathbb{R})$$

とおく.

$\boxed{\text{例 4.28 の続き}}$ 中心極限定理 (定理 **4.24**) より

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X}_1 - \mu_1 \\ \overline{X}_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{N}_2(0_2, \Sigma) \qquad (n \to \infty)$$

となる. いま

$$\nabla g(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial s_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\nabla_\mu^\top \Sigma \nabla_\mu = \mu_2^2\sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_{22}$$

である. したがって

$$\sqrt{n}(\overline{X}_1\overline{X}_2 - \mu_1\mu_2) \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, \mu_2^2\sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_{22}) \qquad (n \to \infty)$$

がわかる. □

本日の講義のまとめ

- 前回の講義の記号の復習
- 3.1 確率に対する不等式
- 3.2 期待値に対する不等式
- 4.1 確率変数列の収束のタイプ
- 4.2 大数の弱法則と強法則
- 4.3 中心極限定理
- 4.4 デルタ法