第8章　検定と信頼区間

8.1　仮説検定の考え方

得られた標本が従う確率分布を特徴付ける母数について想定したある仮説の真偽を標本に基づいて調べることを**仮説検定** hypothsis test という．$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}^*}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k)$ とする．ただし $k, n \in \mathbb{N}$, Θ は母数空間, $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ は $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$ 上の確率測度 ($\boldsymbol{X}$ の分布) である．$\Theta_0 \subset \Theta$ は空でない Θ の真部分集合とし, $\boldsymbol{\theta}$ が Θ_0 に入るか否かを調べたいとき, 次の仮説を考える．

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}^* \in \Theta_0, \quad H_1 : \boldsymbol{\theta}^* \in \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0. \tag{8.1}$$

H_0 であるか H_1 が正しいかを判断することを「H_0 を H_1 に対して検定 (test) する」という．H_0 を**帰無仮説** (null hypothsis) といい, H_1 を**対立仮説** (alternative hypothsis) という．Θ_0 が Θ の 1 つの元から成るとき H_0 を単純仮説 (simple hypothsis) という．そうでないとき H_0 を複合仮説 (composite hypothsis) という．言葉を乱用して,「Θ_0 は単純仮説である」等ということもある．

仮説 (8.1) に対して, 以下のように検定方式を定めることができる．$\boldsymbol{X}$ の取り得るすべての値の集合を $\mathbb{X}(\subset \mathbb{R}^n)$ と表す．$\mathbb{X}$ を 2 つの排反で空でない部分集合 W と W^c に分割する．すなわち $W \neq \varnothing, W^c \neq \varnothing$ で $W \cup W^c = \mathbb{X}$ かつ $W \cap W^c = \varnothing$ である．$\boldsymbol{X}$ の実現値を $\boldsymbol{x}$ と書いたとき, 検定方式は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in W &\Longrightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却し, 対立仮説 } H_1 \text{ を採択}, \\ \boldsymbol{x} \in W^c &\Longrightarrow \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を受容} \end{aligned}$$

と表現できる．このとき W を**棄却域** (critical region) といい, W^c を**受容域** (acceptance region) という．

上のように定めた検定方式には 2 つのタイプの誤りが起こる可能性がある．(1): 帰無仮説 H_0 が正しいにもかかわらず標本の実現値 $\boldsymbol{x}$ に基づいて検定した結果, H_0 を棄却してしまうこと．逆に, (2): 対立仮説 H_1 が正しいにもかかわらず標本の実現値 $\boldsymbol{x}$ に基づいて検定した結果, H_0 を受容してしまうこと．(1) の誤判断を**第 1 種の誤り**といい, (2) の誤判断を**第 2 種の誤り**と呼ぶ．一般に一方の誤りが起こる確率を小さくする検

定方式は, 他方の誤りを起こす確率を大きくする．すなわち両者の誤りが起こる確率を同時に小さくする検定方式はないことが知られている．

以下では「よい」検定方式を一般的な形で定式化することを考える．関数 $\phi : \mathbb{X} \longrightarrow [0, 1]$ は可測関数とする．この関数 ϕ を用いて次のような検定方式を定める．$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ に対して確率 $\phi(\boldsymbol{x})$ で帰無仮説 H_0 を棄却する検定方式を考える．この ϕ を**検定関数** (test function) という．関数 ϕ が $\mathcal{X}$ の空でない部分集合の定義関数のとき, この検定関数 ϕ で定まる検定方式を**非確率化検定** (nonrandomized test) という．そうでない検定方式を (確率化検定)(randomized test) という．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in W), \\ 0 & (\boldsymbol{x} \in W^c) \end{cases}$$

とすると棄却域 W をもつ非確率化検定が定まる．

以後 $\phi(\boldsymbol{X})$ を検定統計量 (test statistic) ということにする．さらに検定統計量 ϕ によって定まる検定方式を単に検定ということにする．検定統計量 $\phi(\boldsymbol{X})$ の第 1 種の誤りの確率は

$$\mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[\phi(\boldsymbol{X})\bigr] \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0)$$

となり, 第 2 種の誤りの確率は

$$1 - \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[1 - \phi(\boldsymbol{X})\bigr] = 1 - \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[\phi(\boldsymbol{X})\bigr] \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1)$$

となる．「よい」検定として, まず第 1 種の誤りの確率の Θ_0 上の上限を $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ 以下にするような検定を考える．すなわち

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[\phi(\boldsymbol{X})\bigr] \leq \alpha \tag{8.2}$$

である．(8.1) をみたす検定または ϕ を**有意水準 α の検定** (level α test) という．つぎに有意水準 α のある検定 ϕ で, 有意水準 α の検定の中で第 2 種の誤りの確率

$$1 - \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[\phi(\boldsymbol{X})\bigr] \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1) \tag{8.3}$$

を Θ_1 上で最小にするするものを見つけることを目指す．すなわち

$$\mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[\phi(\boldsymbol{X})\bigr] \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1)$$

を最大にするものである．この確率を $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ の関数とみて,

$$\beta\bigl(\boldsymbol{\theta}\bigr) := \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}}\bigl[\phi(\boldsymbol{X})\bigr], \qquad (\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1)$$

と表記する．これを**検出力関数** (power function) または**検出力**という．したがって「よい」検定は次のように定義される．

定義 8.1. 有意水準 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ の検定 ϕ で検出力を任意の $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$ に対して最大にするものを有意水準 α の**一様最強力検定** (uniformly most powerful test= u.m.p. 検定) という．特に帰無仮説と対立仮説が単純仮説であるとき, u.m.p. 検定を単に有意水準 α の**最強力検定** (m.p. 検定) という．

8.2 Neyman-Pearson の定理

まず m.p. 検定を求める最も基本的定理を述べる．以下では, 簡単のために $\boldsymbol{X}$ は同時 p.d.f. $\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta})$ をもつとして議論を進めていく．離散型確率変数のときは同時 p.m.f. を考え, 積分を和の記号に替えればよい．

定理 8.2. (Neyman-Pearson の定理) 母数空間は $\mathbb{R}^k$ の異なる 2 点から成るとする．$\Theta=\{\boldsymbol{\theta}_0,\,\boldsymbol{\theta}_1\}$ である．$\boldsymbol{X}=(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n)^\top\sim\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\,(\boldsymbol{\theta}\in\Theta\subset\mathbb{R}^k)$ とし, $\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta})\,(\boldsymbol{\theta}\in\Theta,\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$ を $\boldsymbol{X}$ の同時 p.d.f. とする．検定問題

$$H_0:\,\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0,\quad H_1:\,\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_1$$

に対する有意水準 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ の m.p. 検定 ϕ_0 は以下で与えられる．

$$\phi_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & (\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)>c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)),\\ \gamma & (\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)=c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)),\\ 0 & (\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)<c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)).\end{cases}\tag{8.4}$$

ただし $\gamma,\,c\,(0\le\gamma\le1,\,c>0)$ は

$$\mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big]=\alpha\tag{8.5}$$

から定まる定数である．

Proof. まず

$$\begin{aligned}B_1&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n;\,\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)>c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\},\\ B_2&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n;\,\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)=c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\},\\ B_3&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n;\,\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)<c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\}\end{aligned}$$

とする．

ϕ は有意水準 α の任意の検定とする．すなわち

$$\mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big]\le\alpha\tag{8.6}$$

をみたす. 一方 (8.4) より

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] - \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big] \\
&\quad = \int_{B_1} \{1-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,d\boldsymbol{x} + \int_{B_2} \{\gamma-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \int_{B_3} \{-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_1)\,d\boldsymbol{x} \\
&\quad \geq \int_{B_1} \{1-\phi(\boldsymbol{x})\}c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} + \int_{B_2} \{\gamma-\phi(\boldsymbol{x})\}c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + \int_{B_3} \{-\phi(\boldsymbol{x})\}c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} \\
&\quad = c\int_{B_1} \{1-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} + c\int_{B_2} \{\gamma-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} \\
&\qquad + c\int_{B_3} \{-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} \\
&\quad = c\int_{\mathbb{R}^n} \{\phi_0(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{x})\}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}_0)\,d\boldsymbol{x} \\
&\quad = c\Big\{\alpha - \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big]\Big\} \geq 0 \qquad (\because (8.6)\text{より})
\end{aligned}
$$

を得る. したがって

$$
\mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] \geq \mathsf{Pr}_{\boldsymbol{\theta}_1}\big[\phi(\boldsymbol{X})\big]
$$

となるので, ϕ_0 は有意水準 α の m.p. 検定となる. □

例 8.3. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ i.i.d. $N(\theta, \sigma^2)$ で $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ は既知とする. このとき検定問題

$$
H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0)
$$

に対する MP 検定を求める. まず $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ の同時 p.d.f. は

$$
\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (x_j-\theta)^2\right], \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top
$$

で与えられるので

$$
\begin{aligned}
\log\left[\frac{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)}\right] &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^n (x_j-\theta_1)^2 - \sum_{j=1}^n (x_j-\theta_0)^2\right] \\
&= \frac{(\theta_1-\theta_0)^2}{\sigma^2}\left(\overline{x}_n - \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right), \qquad \left(\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0) > c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1) &\iff \log\frac{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)} > \log c \\
&\iff \overline{x}_n > c' \qquad (\because (8.7)\text{ より}) \qquad (8.8)
\end{aligned}
$$

である．$\boldsymbol{X}$ は連続型確率変数なので, $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j = c'$ である確率は 0 となるので, MP 検定の形は

$$
\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\overline{x}_n > c'), \\ 0 & (\overline{x}_n < c') \end{cases}
$$

となる．定数 c' は

$$
\alpha = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\{\overline{X}_n > c'\} \tag{8.9}
$$

から定まる．(8.9) は

$$
\alpha = \mathsf{Pr}_{\theta_0}\left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c'-\theta_0)}{\sigma}\right\} \tag{8.10}
$$

と書き直せ, $\theta=\theta_0$ のもとで $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)/\sigma \sim \mathsf{N}(0,\,1)$ であるので

$$
\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx
$$

とすると (8.10) は

$$
\alpha = 1 - \Phi\left[\frac{\sqrt{n}(c'-\theta_0)}{\sigma}\right]
$$

となる．標準正規分布の上側 $100\times\alpha\%$ を z_α とすると

$$
\frac{\sqrt{n}(c'-\theta_0)}{\sigma} = z_\alpha \iff c' = \theta_0 + \frac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}
$$

を得る．よって有意水準 α の MP 検定は

$$
\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \left(\overline{x}_n > \theta_0 + \frac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ 0, & \left(\overline{x}_n < \theta_0 + \frac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}
$$

となる．次に ϕ_0 の検出力は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\beta_{\phi_0}(\theta_1) = \mathsf{P}_{\theta_1}\big[\phi_0(\boldsymbol{X})\big] &= \mathbb{P}_{\theta_1}\left\{\overline{X}_n > \theta_0 + \frac{z_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \mathbb{P}_{\theta_1}\left\{\frac{\sqrt{n}\big(\overline{X}_n-\theta_1\big)}{\sigma} > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\big(\theta_1-\theta_0\big)}{\sigma}\right\}. \qquad (8.11)
\end{aligned}
$$

$\theta=\theta_1$ のとき $\sqrt{n}\big(\overline{X}_n-\theta_1\big)/\sigma \sim \mathsf{N}(0,\,1)$ なので, (8.11) より仮説間の平均の差 $\theta_0-\theta_1(>0)$ が大きいほど検出力は大きくなる．また標本 n が大きくなっても検出力が大きくなることがわかる．　□

例 8.4. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ i.i.d. $\mathsf{Ber}(\theta)$ $(0<\theta<1)$ とする．このとき検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1 \qquad (\theta_1 > \theta_0) \tag{8.12}$$

に対する MP 検定を求める．まず $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ の同時確率関数 p.m.f. は

$$\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta) = \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{1-x_j}, \qquad \bigl(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top\bigr) \tag{8.13}$$

で与えられるので

$$\log \frac{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)} = \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j\right\} \log\left\{\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{(1-\theta_1)\theta_0}\right\} + n\log\left\{\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right\}$$

となる．$\theta_1 > \theta_0$ としたので

$$\begin{aligned}\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1) > c\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0) &\iff \log\left[\frac{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_1)}{\mathsf{p}(\boldsymbol{x}|\,\theta_0)}\right] > c' \\ &\iff \sum_{j=1}^{n} x_j > c''\end{aligned}$$

である．よって有意水準 α の MP 検定は

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \bigl(\sum_{j=1}^{n} x_j > c''\bigr), \\ \gamma, & \bigl(\sum_{j=1}^{n} x_j = c''\bigr), \\ 0 & \bigl(\sum_{j=1}^{n} x_j < c''\bigr) \end{cases} \tag{8.14}$$

の形になる．ここで γ と c'' を

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathsf{Pr}_{\theta_0}\bigl[\phi_0(\boldsymbol{X})\bigr] \\ &= \mathsf{Pr}_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j > c''\right\} + \gamma\mathsf{Pr}_{\theta_0}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j = c''\right\}\end{aligned} \tag{8.15}$$

から定まる．$\sum_{j=1}^{n} X_j$ は $\theta = \theta_0$ のとき二項分布 $\mathsf{Bino}(n,\,\theta_0)$ に従うので，(8.15) は

$$\alpha = \sum_{j=c''+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j}(1-\theta_0)^{n-j} + \gamma \binom{n}{c''} \theta_0^{c''}(1-\theta)^{n-c''}$$

となる．まずは c'' を

$$\sum_{j=c''+1}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j}(1-\theta_0)^{n-j} \le \alpha < \sum_{j=c''}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^{j}(1-\theta_0)^{n-j}$$

をみたす整数を定め, これから c_0 と書くと γ は

$$\gamma = \left[\alpha - \sum_{j=c_0+1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j}\right] \bigg/ \begin{pmatrix} n \\ c_0 \end{pmatrix} \theta_0^{c_0} (1-\theta_0)^{n-c_0}$$

で定められる. □

8.3 検定統計量の導出方法

$\mathbb{X}$ を標本空間とし, $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k)$ とする. 検定関数 $\phi : \mathbb{X} \longrightarrow [0, 1]$ によって定まる検定方式は, 以下のように定まることがある. ある統計量 $S : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ と定数 c が存在して

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{x}) \leq c &\Longrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = 1, \\ S(\boldsymbol{x}) > c &\Longrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

となる. この場合, $S(\boldsymbol{X})$ のことも検定統計量と呼ぶことにする.

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k)$ とする. 各 $\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ は同時 p.d.f. $p(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta})$ をもつとする. 母数空間 Θ は Θ_0, Θ_0 に分割されたとする. すなわち $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, $\Theta_0 \neq \varnothing$, $\Theta_1 \neq \varnothing$ である.

定義 8.5. 検定問題

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0, \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

を検定するための**尤度比検定統計量** (likelihood ratio statistic=l.r. 統計量) は

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathsf{p}(\boldsymbol{X}|\,\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathsf{p}(\boldsymbol{X}|\,\boldsymbol{\theta})}$$

で与えらる. このとき正の定数 C が存在して H_0 の棄却域が

$$R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\, \lambda(\boldsymbol{x}) \leq C\}$$

で与えられる検定を**尤度比検定** (likelihood ratio test=l.r.t.) という. すなわち

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_R(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in R), \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin R) \end{cases}$$

となる.

注意 8.6. $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$ を母数空間 Θ での $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量とし, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0(\boldsymbol{X})$ を母数空間を Θ_0 に制限したときの $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量とする．このとき

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathsf{p}\big(\boldsymbol{X} \,|\, \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})\big)}{\mathsf{p}\big(\boldsymbol{X} \,|\, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0(\boldsymbol{X})\big)}$$

と表現できる．

定理 8.7. $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\,(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k)$ とする．Θ の次元を k, Θ_0 の次元を $r\,(r < k)$ とする．検定問題

$$H_0 : \Theta_0, \quad H_1 : \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0$$

に対する尤度比検定統計量を $\lambda(\boldsymbol{X})$ とする．このとき H_0 のもとで次が成り立つ．

$$-2\log\lambda(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \chi^2_{k-r}.$$

Proof. □

注意 8.8. 定理 8.7 の結果を用いると尤度比検定の棄却域は

$$R = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\, -2\log\lambda(\boldsymbol{x}) > \chi^2_{k-r,\,\alpha}\right\}$$

で与えらる．ただし $\chi^2_{k-r,\,\alpha}$ は自由度 $k-r$ の χ^2 分布の上側 $100 \times \alpha\%$ 点である．したがって検定手続きは

$$\boldsymbol{x} \in R \Longrightarrow H_0 \text{ は棄却}$$

となる． □

8.4 区間推定の考え方

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{P}_\theta\,(\theta \in \Theta \subset R)$ とする．$0 < \alpha < 1$ を固定する．母数　θ に依存しない区間 $\big[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\big] \subset \Theta$ が $\forall\theta \in \Theta$ に対して

$$\mathsf{Pr}_\theta\Big\{L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le U(\boldsymbol{X})\Big\} \ge 1 - \alpha \tag{8.16}$$

をみたすとき区間 $\big[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\big]$ を信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の**信頼区間** (confidence interval) という．$L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})$ を**信頼限界** (confident limit) という．通常 α として 0.05, 0.01, 0.1 等が用いられる．(8.16) の関係式は, たとえば 100 組の実現値を発生させると 100α 回程度は信頼区間に真の母数 θ を含まれないと考える．

例 8.9. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ i.i.d. $\mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$ とする．ただし $\theta \in \mathbb{R}$ で $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ の値は既知である．このとき標本平均 $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j$ は

$$\overline{X}_n \sim \mathsf{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる．このことより

$$S_\theta(\boldsymbol{X}) = \frac{\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \theta\big)}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0, 1)$$

となる．ここで $z_{\alpha/2}$ を標準正規分布 $\mathsf{N}(0, 1)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点ととると

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathsf{Pr}_\theta\left\{-z_{\alpha/2} \le S_\theta(\boldsymbol{X}) \le z_{\alpha/2}\right\} \\ &= \mathsf{Pr}_\theta\left\{\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} \le \theta \le \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\} \end{aligned}$$

なることがわかる．したがって

$$\big[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\big] = \left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right]$$

は信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間となる．□

8.5　信頼区間の構成法

8.5.1　検定方式の反転

$\Theta \subset \mathbb{R}$ とし, $\theta_0 \in \Theta$ を取る．検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta \ne \theta_0$$

を考える．有意水準 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ の検定の受容域を $A(\theta_0)$ とおく．すなわち

$$\mathsf{Pr}_{\theta_0}\big\{\boldsymbol{X} \in A(\theta_0)\big\} \ge 1 - \alpha$$

が成り立っている．そこで $\boldsymbol{X} \in A(\theta_0)$ を θ_0 に関して解くことによって

$$C(\boldsymbol{X}) = \{\theta \in \Theta; \boldsymbol{x} \in A(\theta)\}$$

が得られる．一般に $C(\boldsymbol{X})$ は連結区間になるという保証はない．$C(\boldsymbol{X})$ が連結区間となれば

$$\mathsf{Pr}_\theta\big\{\theta \in A(\theta)\big\} \ge 1 - \alpha$$

となるので, $C(\boldsymbol{X})$ は信頼係数 $(1-\alpha)$ の信頼区間となる．

例 8.10. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ i.i.d. $\mathsf{Ber}(\theta)$ $(0<\theta<1)$ とする．$\theta_0 \in (0, 1)$ と固定し, 検定問題

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

を考える．この検定問題に対する尤度比検定統計量は

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{X}) &= \frac{\prod_{j=1}^n \theta_0^{X_j}(1-\theta_0)^{1-X_j}}{\prod_{j=1}^n \overline{X}_n^{X_j}(1-\overline{X}_n)^{1-X_j}} \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta_0}{\overline{X}_n}\right)^{X_j}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\overline{X}_n}\right)^{1-X_j}\end{aligned}$$

となる．これより受容域 $A(\theta_0)$ は

$$\begin{aligned}&A(\theta_0) = \Bigg\{\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n; \\ &-2\log\lambda(\boldsymbol{x}) = 2n\overline{x}_n \log\left(\frac{\overline{x}_n}{\theta_0}\right) + 2n(1-\overline{x}_n)\log\left(\frac{1-\overline{x}_n}{1-\theta_0}\right) \le \chi^2_{1,\alpha}\Bigg\}\end{aligned}$$

となる．ただし $\overline{x}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n x_j\,\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ である．よって

$$C(\boldsymbol{X}) := \left\{\theta;\, \overline{X}_n \log\left(\frac{\overline{X}_n}{\theta_0}\right) + (1-\overline{X}_n)\log\left(\frac{1-\overline{X}_n}{1-\theta_0}\right) \le \frac{\chi^2_{1,\alpha}}{2n}\right\}$$

となる．ただし信頼限界 $L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})$ を陽に求めることはできない．□

8.5.2 枢軸量 (pivotal quantity)

一般に $Q(\boldsymbol{X}, \theta)$ の分布が θ に依存しないとき, $Q(\boldsymbol{X}, \theta)$ を**枢軸量** (pivotal quantity) という．このとき

$$\mathsf{Pr}_\theta\Big(a \le Q(\boldsymbol{X}, \theta) \le b\Big) = 1-\alpha$$

をみたす a, b を定めて, $a \le Q(\boldsymbol{X}, \theta) \le b$ を θ に関して解くことにより, 信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間

$$C(\boldsymbol{X}) = \big\{\theta \in \Theta;\, a \le Q(\boldsymbol{X}, \theta) \le b\big\}$$

が得られる．もちろん $C(\boldsymbol{X})$ が連結区間になる保証は一般的にはないが, うまく連結区間になれば, 信頼区間として使用できる．

例 8.11. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \text{i.i.d.}\ \mathsf{Exp}(\theta)\ (\theta > 0)$ とする．すると $2\theta \sum_{j=1}^n X_j$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布に従うので

$$Q(\boldsymbol{X}, \theta) = 2\theta \sum_{j=1}^n X_j$$

とおく．よって $\chi^2(2n, \alpha)$ を自由度 $2n$ の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点とすると

$$\mathsf{Pr}_\theta = \left(\chi^2_{2n,\,1-\alpha/2} \leq Q(\boldsymbol{X}, \theta) \leq \chi^2_{2n,\,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

となるので,

$$\bigl[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})\bigr] = \left[\frac{\chi^2_{2n,\,1-\alpha/2}}{2\sum_{j=1}^n X_j}, \frac{\chi^2_{2n,\,\alpha/2}}{2\sum_{j=1}^n X_j}\right]$$

は信頼係数 $(1-\alpha)$ の θ の信頼区間となる．　□

8.6　章末注釈と参考文献

8.7　演習問題