

2004 年 6 月 15 日

総合科目 数理・自然 6 「統計学入門」講義レジュメ (今野)

期待値とは

確率変数 X に対して、それがとる値の重み付き平均である。これを $E(X)$ と記す。

$$E(X) = \sum_x xf(x) \quad \text{〔離散型〕}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad \text{〔連続型〕}$$

期待値はひとつの定数である。無限和、積分であるから、存在しないこともある。

X の関数 $\phi(X)$ についても期待値が定義できる。

$$E(\phi(X)) = \sum_x \phi(x)f(x) \quad \text{〔離散型〕}$$

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x) dx \quad \text{〔連続型〕}$$

例〔さいころ〕

さいころをふって出る目に対応する確率変数を X の期待値を求めよう。確率分布は

X の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

であった。したがって、

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

となる。

例〔宝くじの期待値〕

等級	当せん金	本数
1等	2億円	146本
1等の前後賞	5千万円	292本
1等の組み違い賞	十万円	1万4454本
2等	1千万円	292本
3等	百万円	2920本
4等	5万円	36万5千本
5等	1万円	146万本
6等	3百円	7300万本

この宝くじは 1 枚 300 円で 7 億 3 千万枚発売された。したがって、その期待値は

$$\begin{aligned} & (2 \times 10^8) \cdot \frac{146}{73 \times 10^7} + (5 \times 10^7) \cdot \frac{292}{73 \times 10^7} + (1 \times 10^5) \cdot \frac{14454}{73 \times 10^7} \\ & + (1 \times 10^7) \cdot \frac{146}{73 \times 10^7} + (1 \times 10^6) \cdot \frac{2920}{73 \times 10^7} + (5 \times 10^4) \cdot \frac{365 \times 10^3}{73 \times 10^7} \\ & + (1 \times 10^4) \cdot \frac{146 \times 10^4}{73 \times 10^7} + (3 \times 10^3) \cdot \frac{73 \times 10^6}{73 \times 10^7} \doteq 145 \end{aligned}$$

となる。

例 (指数分布) 確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \quad \lambda > 0$$

で与えらるときの X の期待値を求めよう。

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-x e^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる。

例 (一様分布) 確率変数 X が一様分布

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとする。このとき、 X の期待値と X^2 の期待値を求めよう。

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

期待値の性質

- (a) $E(c) = c$
- (b) $E(X + c) = E(X) + c$
- (c) $E(cX) = cE(X)$
- (d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (期待値の加法性)

例 (さいころを 2 回投げる) さいころを 2 回投げたとき、ふたつのさいころの目の和に対応する確率変数を X とする。このとき、確率分布表は

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

とあった．直接， X の期待値を求めることはできる：

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} \\
 &\quad + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\
 &= \frac{252}{6} = 7
 \end{aligned}$$

しかし，2個のさいころの目に対応する確率変数を X_1 と X_2 とすれば， $X = X_1 + X_2$ となるので，性質 (d) ととなる．さらに， $E(X_1) = 7/2$ と $E(X_2) = 7/2$ を利用すれば，

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

を得る．

分散と標準偏差

確率変数 X の期待値 $E(X)$ に X がどれだけ集中しているかを測る指標として， X の分散を

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

で定義する．また，標準偏差を $\sqrt{V(X)}$ と定義する．期待値の定義から

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \sum_x (x - E(X))^2 f(x) && \text{(離散型)} \\
 V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx && \text{(連続型)}
 \end{aligned}$$

となる． $V(X) \geq 0$ であることに注意せよ．また，

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
 &= E(X^2) - (E(X))^2
 \end{aligned}$$

と書きかえることができる．

分散の性質

- (a) $V(c) = 0$
- (b) $V(X + c) = V(X)$
- (c) $V(cX) = c^2V(X)$
- (d) $V(X) \geq 0$

例(さいころ)

X を1個のさいころをふったときの目, Y を2個のさいころをふったときの目に対応する確率変数 X_1 と X_2 のふたつの目の平均に対応する確率変数とする. すなわち, $Y = (X_1 + X_2)/2$ である. このとき,

$$E(X_1) = \frac{7}{2}, \quad E(Y) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{7}{2}$$

である. しかし, Y のほうがその期待値に集中している. まず, X_1 の分散を求める:

$$E(X_1^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

より

$$V(X_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

となる. つぎに, Y の分散を求める:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + (3/2)^2 \cdot \frac{2}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + (5/2)^2 \cdot \frac{4}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + (7/2)^2 \cdot \frac{6}{36} \\ &\quad + 4^2 \cdot \frac{5}{36} + (9/2)^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + (11/2)^2 \cdot \frac{2}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{24} \end{aligned}$$

から

$$V(Y) = \frac{329}{24} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{24}$$

となり, $V(Y) < V(X)$ となる.

例 (一様分布の分散)

確率変数 X が一様分布

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとする. このとき,

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad E(X^2) = \frac{1}{3}$$

であった. したがって,

$$V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

となる.

標準化変換

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

とおく . すると , 期待値と分散の性質から

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E(X - E(X)) = 0$$
$$V(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}} \right)^2 V(X - E(X)) = \frac{1}{V(X)} V(X) = 1$$

問題 8 コインを 3 回投げる実験 . 3 回中に表の出た回数に対応する確率変数を X の確率分布表は

X の値	0	1	2	3	合計
確率	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

であった .

- (i) X の期待値を求めよ .
- (ii) X の分散を求めよ .