

2004 年 6 月 15 日

総合科目 数理・自然 6 「統計学入門」講義レジュメ (今野)

確率分布 $\left\{ \begin{array}{l} \text{離散型分布} \quad \text{---} \quad \text{ベルヌーイ分布} \cdot \text{二項分布} \cdot \text{ポアソン分布} \\ \text{連続型分布} \quad \text{---} \quad \text{一様分布} \cdot \text{正規分布} \cdot \text{指数分布} \cdot \text{ワイブル分布} \end{array} \right.$

ベルヌーイ試行と二項分布

2種類の可能な結果(それぞれを S と F と呼ぼう)を生じる実験で,それぞれの結果が起こる確率が p と $1-p$ とし,この実験を同じ条件でかつ独立に n 回繰り返すことを考える.これをベルヌーイ試行という.

X : n 回中 S が x 回, F が $n-x$ 回生じるとすれば,その確率は

$$P(X=x) = f(x) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

となる.ただし, $0! = 1$ とする.この分布を二項分布といい, $Bi(n, p)$ と書き,特に $Bi(1, p)$ をベルヌーイ分布とよぶ.

二項分布の性質

- $\sum_{x=0}^n {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} = 1$
- $E(X) = \sum_{x=0}^n {}_n C_x x p^x (1-p)^{n-x} = np$
- $V(X) = \sum_{x=0}^n {}_n C_x (x-np)^2 p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$

ポアソン分布

X が確率関数

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

を持つとき, X はポアソン分布に従うという.ただし, $\lambda > 0$ である.

ポアソンの性質

- $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1$
- $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$
- $V(X) = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$

正規分布

正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

正規分布の性質

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \mu$
- $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2$
- X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, その線形変換 $Y = aX + b$ は正規分布 $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う.
- $Z = (X - \mu)/\sigma$ は $N(0, 1)$ に従う.

$$P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827$$

$$P(-2 < Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9545$$

$$P(-3 < Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9973$$

ただし, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds$

指数分布

確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \quad \lambda > 0$$

で定義される分布

指数分布の性質

- $E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \int_0^{\infty} (x-\lambda)^2 f(x) dx = \frac{1}{\lambda^2}$

ワイブル分布

確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} (bx^{b-1}/a^b) \exp(-(x/a)^b) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \quad \lambda > 0$$

で定義される分布

ワイブルの性質

- $E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = a\Gamma(1 + (1/b))$
- $V(X) = \int_0^{\infty} (x - a\Gamma(1 + (1/b)))^2 f(x) dx = a^2\{(\Gamma(2 + (1/b)) - (\Gamma(1 + (1/b)))^2)\}$

問題 9 X は $Bi(4, 1/2)$ に従うとする .

- X の確率分布表を求めよ .
- X の期待値と分散を定義に従い求め , 期待値と分散の公式で求めたものと一致することを確認せよ .

問題 10 X が $N(100, 15^2)$ に従うとき , つぎの確率を求めよ .

- $P(100 \leq X \leq 127)$
- $P(X \leq 118)$
- $P(X > 76)$
- $P(85 \leq X \leq 112)$