第1章　確率・確率変数・期待値

1.1　確率

不確実性や変動というものは多くの状況では避けることができないものである．確率論はこれらの概念を数学的に定式化する道具である．

1.1.1　試行・標本空間・事象

実験とか観測とか調査とかを総称して**試行**という．試行を行ったときに起こり得る結果のすべての集まりを**標本空間**といい，Ω と記すことにする．標本空間 Ω の点を**標本点**とか**根元事象**という．Ω が有限または可算の場合を離散的という．

例 1.1 硬貨投げを考えよう．硬貨には表 (H) と裏 (T) があることから，試行のすべての集まりである標本空間は $\Omega = \{H, T\}$ となる．

部分集合 $A \subset \Omega$ を**事象**といい，Ω を**全事象**，$\emptyset$ を**空事象**という．事象に対して，和，交わり (積)，直積，補集合，差などの演算を考える．

事象の記法　$\in$，$\notin$，$\emptyset$，$A \subset B$，$A \cap B$，$A \cup B$，A^c．ただし，A, B は事象とし，$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$，$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \quad \text{または} \quad \omega \in B\}$ 等である．和と交わりに対して

$$
\begin{array}{lll}
A \cup A = A & A \cap A = A & \text{(ベキ等律)} \\
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A & \text{(交換律)} \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) & \text{(結合律)}
\end{array}
$$

が成り立つ．

命題 1.1 (事象の演算に関する基本的性質) A, B, C を事象とする．

(i)
$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
\qquad \text{(分配法則)}
$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
\end{aligned}
\qquad \text{(ド・モルガンの法則)}
$$

証明　証明は略．(「集合・位相」(佐久間カ一浩著，共立) や「集合・位相入門」(松坂和夫著，岩波) 等を参照のこと) □

Γ を添え字の空間とし，$\gamma \in \Gamma$ の元によって添え字付けられる集合 A_γ の集まりを考え，これを

$$\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

と書く．任意の濃度を持つ添え字集合 Γ に対して

$$\begin{aligned} \cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma &= \{\omega\in\Omega : \text{ある } \gamma\in\Gamma \text{ が存在して，} \omega\in A_\gamma\ \} \\ \cap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma &= \{\omega\in\Omega : \text{すべての } \gamma\in\Gamma \text{ に対して，} \omega\in A_\gamma\ \} \end{aligned}$$

とする．

例 1.2　たとえば，$\Omega=(0,1]$ とし，$A_i=[1/i,1]$, $i=1,2,\ldots$ とする．したがって，$\Gamma=\mathbb{N}$ (自然数) である．このとき，

$$\begin{aligned} \cup_{i=1}^{\infty}A_i &= \cup_{i=1}^{n}[1/i,1] \\ &= \{\omega\in(0,1] : \text{ある } i\in\mathbb{N} \text{ が存在して，} \omega\in[1/i,1]\ \} \\ &= \Omega \end{aligned}$$

定義 1.1　$\{A_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ が互いに排反 (互いに素) であるとは，すべての $\alpha,\beta\in\Gamma$ に対して，$\alpha\neq\beta$ ならば，$A_\alpha\cap A_\beta=\emptyset$ が成り立つことである．

命題 1.2 (和と交わりおよびド・モルガンの法則の一般化) $\{A_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ を集合族(1-1)とする．このとき，

(i)　$\left(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)\cap B=\cup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B)$.

(ii)　$\left(\cap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)\cup B=\cap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup B)$.

(iii)　$\{\cup_{\gamma\in\Gamma}A\}^c=\cap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$

(iv)　$\{\cap_{\gamma\in\Gamma A}A\}^c=\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c$

証明　証明は略．　□

定義 1.2　可算無限個の事象列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，その**上極限事象**と**下極限事象**をそれぞれ

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n\to\infty}A_n &= \cap_{m=1}^{\infty}\cup_{n=m}^{\infty}A_n \\ \underline{\lim}_{n\to\infty}A_n &= \cup_{m=1}^{\infty}\cap_{n=m}^{\infty}A_n \end{aligned}$$

上極限事象は $\{A_n\}$ のうちの無限個が起きるという事象を，下極限事象は $\{A_n\}$ のうちのある番号から先のすべてが起こるという事象を表す．すなわち，$\omega\in\overline{\lim}\,A_n$ とは，無限に多くの n に対して，$\omega\in A_n$ となることであり，$\omega\in\underline{\lim}\,A_n$ とは，ある番号から先のすべての n に対して $\omega\in A_n$ である．上極限と下極限が一致するとき，$\lim_{n\to\infty}A_n$ と書き，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限事象という．

定理 1.1 つぎの関係式が成り立つ．

(i)　$\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n$.

(ii)　$\left(\liminf_{n\to\infty}A_n\right)^c=\limsup_{n\to\infty}A_n^c$.

(iii)　$\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)^c=\liminf_{n\to\infty}A_n^c$.

(iv)　$A_1\subset A_2\subset\cdots$ ならば，$\lim_{n\to\infty}A_n=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(v)　$A_1\supset A_2\supset\cdots$ ならば，$\lim_{n\to\infty}A_n=\cap_{n=1}^{\infty}A_n$.

証明　証明は略．　□

1.1.2 確率の定義

定義 1.3 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{F}$ は次の条件をみたすとき，Ω 上の**有限加法族**であるという．

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{F}$

さらに，

(iii)' $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$

をみたすとき，Ω 上の**完全加法族** (σ-加法族) という．

注意 1.1 $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{F}$ ならば，$\cap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$ である．Ω 上の完全加法族で最も大きなものは Ω のすべての部分集合からなる族であり，最小の完全加法族は $\{\emptyset, \Omega\}$ である．

確率論において用いられる完全加法族の重要な例をいくつか考察する．まず，一般的な定義から始めよう．

定義 1.4 $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合の任意の族とする．$\mathcal{F}$ を含む最小の完全加法族を $\sigma(\mathcal{F})$ と表す．言い換えれば，$\sigma(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ を含む完全加法族全体の交わりである．Ω のすべての部分集合全体は完全加法族であることから，少なくとも 1 つは $\mathcal{F}$ を含む完全加法族は存在することに注意しよう．

例 1.3 $\Omega = \mathbb{R}$ とし，次の部分集合族を考える．

(i) $\mathcal{F}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

(ii) $\mathcal{F}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

(iii) $\mathcal{F}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

(iv) $\mathcal{F}_4 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

(v) $\mathcal{F}_5 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$

(vi) $\mathcal{F}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

(vii) $\mathcal{F}_7$ は $\mathbb{R}$ の開集合の族

(viii) $\mathcal{F}_8$ は $\mathbb{R}$ の閉集合の族

とする．このとき，

$$\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_3) = \sigma(\mathcal{F}_4) = \sigma(\mathcal{F}_5) = \sigma(\mathcal{F}_6) = \sigma(\mathcal{F}_7) = \sigma(\mathcal{F}_8)$$

である．この完全加法族を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と記し，$\mathbb{R}$ の**ボレル**集合族という．

定義 1.5 $\mathcal{F}$ を Ω 上の完全加法族としたとき，$(\Omega, \mathcal{F})$ のことを**可測空間**という．

定義 1.6 任意の可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対して，確率とは $\mathcal{F}$ 上で定義された関数 P で以下の条件をみたすものである．

(i) 任意の $A \in \mathcal{F}$ について，$P(A) \geq 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $i = 1, 2, \ldots$ について $A_i \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ ならば,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$P(A)$ は事象 A の起きる確率とよばれる. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間**とよぶ.

注意 1.2 Ω が離散のとき, $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合の集まりと通常する. また, $\Omega = \mathbb{R}$ のとき, $\mathbb{R}$ のすべての部分集合の集まりを採用するのでなく, ボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を採用するのが標準的である.

命題 1.3 (確率の性質) (i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し, $P(A) \leq 1$

(iii) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し, $P(A^c) = 1 - P(A)$

(iv) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対し, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(vi) $A \subset B$ ならば, $P(A) \leq P(B)$

(vii) $i = 1, 2, \ldots$ に対し, $A_i \in \mathcal{F}$ ならば,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(viii) $A_i \subset A_{i+1}$ ならば,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

(ix) $A_i \supset A_{i+1}$ ならば,

$$P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

[(x) $A_i \supset A_{i+1}$ かつ $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ ならば,

$$P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i) = 0$$

証明 (i)-(vi) は証明は略. □