1.2 条件つき確率と独立性

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$B \in \mathcal{F}$ かつ $P(B) > 0$ とする．事象 B 上の条件つき確率とは，完全加法族 $\mathcal{F}$ 上で定義された確率であって，任意の $A \in \mathcal{F}$ について

$$P(A|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定める．$P(A|\,B)$ を**事象 B が与えられたときの事象 A の条件つき確率**という．

命題 1.4 $P(\cdot\,|\,B)$ は確率測度である．すなわち，

(i) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し，$P(A|\,B) \geq 0$

(ii) $P(\Omega|\,B) = 1$

(iii) $i = 1, 2, \ldots$ に対し，$A_i \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ ならば，

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|\,B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|\,B)$$

証明 条件付確率と確率の定義 1.3 よりわかる． □

Ω を互いに排反な事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に分割されるとする．すなわち，$A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ かつ $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ である．$i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$P(A_i) > 0$ のとき，任意の事象 B の確率は条件つき確率を用いてつぎのように表現できる．

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|\,A_i)$$

これを**全確率の法則**という．

事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ は互いに排反で Ω を分割するとする．事象 B が起こる前と後のことを事前と事後とよぶことにする．事象 A_i に対して $P(A_i)$ は事象 B が起こる前に与えられる確率であるから**事前確率**といい，$P(A_i|\,B)$ は B が起こった後で与えられる確率であるから**事後確率**という．

定理 1.2 (ベイズの法則) 事後確率は事前確率を用いてつぎのように表現できる．

$$P(A_i|\,B) = \frac{P(A_i)P(B|\,A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|\,A_i)}$$

証明 全確率の法則を用いればよい． □

定義 1.7 2 つの事象 A, B が**確率的に独立**であるとは

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをいう．独立でないとき，**従属**という．

注意 1.3 事象 A と B は独立で $P(A) > 0$，$P(B) > 0$ とする．このとき，

$$P(B|\,A) = P(B), \qquad P(A|\,B) = P(A)$$

である．

定義 1.8 事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が独立であるとは，すべての $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と $i_1 < i_2 < \cdots < i_k, i_l \in \{1, 2, \ldots, n\}, l = 1, 2, \ldots, k,$ に対し

$$P(\cap_{l=1}^{k} A_{i_l}) = \Pi_{l=1}^{k} P(A_{i_l})$$

が成り立つことである．すべての $A_i, A_j, i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j$ に対し

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

が成り立つとき，**対独立**という．

注意 1.4 対独立であっても，独立でない場合がある．

定義 1.9 $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ を完全加法族 $\mathcal{F}$ の部分完全加法族とする．このとき， $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ が独立であるとは，すべての $A \in \mathcal{F}_1$ と $B \in \mathcal{F}_2$ に対し

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをいう．