1.3 確率変数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，X を Ω から $\mathbb{R}$ への写像とする．X によるボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ の**逆像**は Ω の部分集合で $X^{-1}(B)$ と記し

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\ X(\omega) \in B\}$$

で定義する．

定理 1.3 (逆像の性質) $B, B', \{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ はボレル集合とする．このとき

(i) $B \subset B'$ ならば，$X^{-1}(B) \subset X^{-1}(B')$

(ii)
$$X^{-1}(\cup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma} X^{-1}(B_\gamma)$$
$$X^{-1}(\cap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \cap_{\gamma\in\Gamma} X^{-1}(B_\gamma)$$

(iii) B と B' が互いに排反ならば，$X^{-1}(B)$ と $X^{-1}(B')$ も互いに排反である．

(iv) $X^{-1}(B^c) = \{X^{-1}(B)\}^c$

証明 集合・位相入門（松坂和夫，岩波）等を参照.） □

定義 1.10 写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の (**実**) **確率変数**であるとは，任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ をみたすときをいう．

注意 1.5 すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ をみたすことと同値である．また，すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{X < a\} \in \mathcal{F}$ とも同値である．

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X により $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P_X がつぎのように定まる：任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(\omega \in X^{-1}(B)) = P(X^{-1}(B))$$

P_X のことを X の分布という．

$X_1, X_2, \ldots, X_p$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数のとき，$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)'$ を p-次元確率変数という．

定理 1.4 (確率変数の性質) X，Y および $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 *(列)* とする．

(i) すべての $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$aX + bY$ も確率変数である．

(ii) $\max\{X, Y\}$ も $\min\{X, Y\}$ も確率変数である．

(iii) XY も確率変数である．

(iv) 各 $\omega \in \Omega$ に対し，$Y(\omega) \neq 0$ ならば，X/Y も確率変数である．

(v) $\sup_n X_n, \inf_n X_n, \limsup_{n\to\infty} X_n, \liminf_{n\to\infty} X_n$ も確率変数である．

.

証明 (i) を示すために，$X + Y$ と aX も確率変数であることを示す．各 t に対して，

$$\{X + Y < t\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}}(\{X < r\} \cap \{Y < t - r\}) \in \mathcal{F}$$

となる．ただし，$\mathbb{Q}$ は有理数とする．つぎに，aX も確率変数であることを示す．$a > 0$ の場合，$\{aX \leq t\} = \{X \leq t/a\} \in \mathcal{F}$．$a < 0$ の場合，$\{aX \leq t\} = \{X \geq t/a\} \in \mathcal{F}$.

(ii) を示すためには，

$$\{\max\{X, Y\} \le t\} = \{X \le t\} \cup \{Y \le t\}$$

と

$$\{\min\{X, Y\} \le t\} = \{X \le t\} \cap \{Y \le t\}$$

に注意すればよい．
(iii) を示すためには，

$$\{X^2 \le t\} = \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} = \{X \le \sqrt{t}\} \setminus \{X \le -\sqrt{t}\}$$

から X^2 は確率変数になることに注意する．さらに，

$$XY = \frac{1}{2}\{(X+Y)^2 - (X-Y)^2\}$$

から証明される．
(iv) を示すためには，

$$\{\sup_n X_n \le t\} = \cap_n \{X_n \le t\}, \qquad \{\inf_n X_n \ge t\} = \cap_n \{X_n \ge t\}$$

から $\sup_n X_n$ と $\inf_n X_n$ は確率変数であることがわかる．さらに，

$$\limsup_n X_n = \inf_n \sup_{k \ge n} X_k, \qquad \liminf_n X_n = \sup_n \inf_{k \ge n} X_k$$

から (iv) は示された． □

定義 1.11 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X の**分布関数**を

$$F_X(x) = P((-\infty, x]) = P(X \le x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \le x)$$

で定義する．ただし，x は任意に実数である．

定理 1.5 (分布関数の性質) (i) *(単調性)* $x, y \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$x < y$ ならば，$F_X(x) \le F_X(y)$

(ii) *(右連続性)* $\lim_{y \to x+0} F_X(y) = F_X(x)$

(iii) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$0 \le F_X(x) \le 1$ で $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ である．

証明 □

確率変数 X の分布関数が $F_X(\cdot)$ である場合「確率変数 X は分布 $F(\cdot)$ に従う」といい，“$X \sim F_X$ ” と書くことにする．

注意 1.6 分布関数 $F(\cdot)$ が与えれたとき，$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の確率測度 μ で

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}$$

となるものが一意的に存在することが知られている．

X と Y を確率変数としたとき，X と Y の**分布が等しい**とは，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$P_X(A) = P_Y(A)$$

が成り立つ(1-2)ときをいう．

X と Y の分布が等しいために必要十分条件は，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$F_X(x) = F_Y(x)$ が成り立つことである．