1.5 確率変数の期待値

定義 1.15 確率変数 X は確率関数または密度関数 $f_X(\cdot)$ を持つとき，X の期待値を

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x f_X(x), & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx, & \text{(連続型)} \end{cases}$$

で定義する．ただし，離散型の場合は $\sum_x |x| f_X(x) < \infty$ のとき，連続型の場合は $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$ のとき，X の期待値を定義することにする．期待値が定義されるとき，X の期待値が存在するという．

一般に，$\mathbb{R}$ 上のボレル可側関数(1-3) $g(\cdot)$ に対し，$g(X)$ の期待値を

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x), & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx, & \text{(連続型)} \end{cases}$$

で定める．$g(X)$ の期待値の存在は X の期待値の存在と同様に定める．

例 1.4 X の確率分布は

X の取る値	0	1	合計
確率	1/2	1/2	1

とする．このとき，

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times f_X(0) + 1 \times f_X(1) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となる．

例 1.5 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & (0 \le x \le 1) \\ 0, & \text{(その他)} \end{cases}$$

を持つとする．このとき，

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$$

例 1.6 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

を持つとする．このとき，X の期待値は存在しない．なぜならば，$M \ge 1$ に対して

$$\mathbb{E}[|X|] \ge \int_1^M x \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx \ge \int_1^M \frac{x}{\pi(2x^2)}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_1^M \frac{dx}{x}$$

よって

$$\mathbb{E}[|X|] \ge \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_1^M \frac{dx}{x} = \infty$$

よりわかる．

定理 1.6 (期待値の性質) (i) 定数 c に対して，$\mathbb{E}[c] = c$

(ii) ふたつのボレル可側関数 $h(\cdot)$ と $g(\cdot)$ および定数 a, b に対して

$$\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$$

(iii) $h(x) \geq 0$ ならば，$\mathbb{E}[h(X)] \geq 0$

(iv) $|\mathbb{E}[h(X)]| \leq \mathbb{E}[|h(X)|]$

(v) X が非負値確率変数$^{(1\text{-}4)}$のとき，$\mathbb{E}[X] = 0$ ならば，$P(X = 0) = 1$ である．

ただし，上記において，いずれの期待値も存在するものと仮定する．

証明 積分の性質からわかる． □