1.6 積率と積率母関数

定義 1.16 正の各整数 n に対して，$\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ のとき，

$$\mu_n' = \mathbb{E}[X^n]$$

を X の n 次の**積率**という．さらに，

$$\mu_n = \mathbb{E}[(X-\mu)^n]$$

を**中心まわりの n 次の積率**という．ただし，$\mu = \mathbb{E}[X]$ である．

定義 1.17 X の中心まわりの 2 次の積率を**分散**といい，$\mathbb{VAR}[X]$ と書く．すなわち，$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ である．

注意 1.9 $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ ならば，$\mathbb{E}[|X|] < \infty$ であることに注意せよ．これは Hölder の不等式からわかる．以下では直接的に確認する．簡単なために，X を連続型確率変数とし，確率密度関数 $f_X(x)$ を持つとして議論を進める．

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} |x| f_X(x)\,dx + \int_{-1}^{1} |x| f_X(x)\,dx + \int_{\infty}^{1} |x| f_X(x)\,dx$$

となる．$x \leq -1$ または $x \geq 1$ のときは，$|x| f_X(x) \leq x^2 f_X(x)$ となり，$-1 \leq x \leq 1$ のときは $|x| f_X(x) \leq f_X(x)$ となることに注意すれば，

$$\mathbb{E}[|X|] \leq \int_{-\infty}^{-1} x^2 f_X(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f_X(x)\,dx + \int_{\infty}^{1} x^2 f_X(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X^2] + 1 < \infty$$

がわかる．

定理 1.7 (分散の性質) (i) $\mathbb{VAR}[a+bX] = b^2 \mathbb{VAR}[X]$．ただし，$a, b$ は定数である．

(ii) $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$

(iii) $\mathbb{VAR}[X] = 0 \Longrightarrow P(X = \mathbb{E}[X]) = 1$

証明 □

定義 1.18 ある正の数 t_0 が存在して，すべての $t \in (-t_0, t_0)$ に対し，e^{tX} の期待値が存在するならば，X の**積率母関数**を

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}], \qquad t \in (-t_0, t_0)$$

で定義する．このような t_0 が存在しないとき，X の積率母関数は存在しないという．

定理 1.8 (積率母関数の性質) $M_X(t)$ を X の積率母関数とする．このとき，正の整数 n に対して

$$\mathbb{E}[X^n] = \left.\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\right|_{t=0}$$

となる．

証明　X が連続型の場合のみを示す．微分記号と積分記号の交換が可能であると仮定すれば，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M_X(t) &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}e^{tx}\right) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(xe^{tx}f_X(x)\right)\,dx = \mathbb{E}[Xe^{tX}]\end{aligned}$$

したがって

$$\left.\frac{d}{dt}M_X(t)\right|_{t=0} = \mathbb{E}[Xe^{tX}]\big|_{t=0} = \mathbb{E}[X]$$

□

例 1.7　X の確率分布は

X の取る値	0	1	合計
確率	1/2	1/2	1

とする．このとき，$t \in \mathbb{R}$ に対し

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = 1 \times f_X(0) + e^t \times f_X(1) = \frac{1}{2}(1+e^t)$$

となる．よって

$$\mathbb{E}[X] = \left.\frac{d}{dt}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{2}e^t\right|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

となる．X の分散は

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = (0-\frac{1}{2})^2 \times f_X(0) + (1-\frac{1}{2})^2 \times f_X(1) = \frac{1}{4}$$

となる．一方，

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}M_X(t) = \left.\frac{1}{2}e^t\right|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

より

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となる．

命題 1.7　確率変数 X と Y の分布関数を $F_X(\cdot)$ と $F_Y(\cdot)$ とする．ある正の整数 t_0 が存在して，すべての $t \in (-t_0, t_0)$ に対し，X と Y の積率母関数 $M_X(t)$ と $M_Y(t)$ が存在して，$M_X(t) = M_Y(t)$ ならば，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $F_X(x) = F_Y(x)$ である．

証明　証明は略.　□