

1.7 確率変数の変換

確率変数 X は分布関数 $F_X(\cdot)$ を持つとする。 $g(\cdot)$ をボレル可測関数としたとき、 $Y = g(X)$ も確率変数になり、 Y の分布 F_Y はつぎのように定まる：任意のボレル集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(Y \in A) = P(g(X) \in A)$$

また、 Y の分布関数は

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

となる。 F_Y は P_X と g に依存するので、 $F_Y(\cdot)$ は $F_X(\cdot)$ と g に依存するであろう。さらに、存在するならば、 $F_Y(\cdot)$ の確率密度関数 $f_Y(\cdot)$ も求めることができれば便利である。

以下の例では、 $F_X(\cdot)$ は微分可能とする。

例 1.8 X の線形変換を考える。すなわち、 $Y = a + bX$ である。ここで、 a, b は定数で $b \neq 0$ とする。 $b > 0$ のとき

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + bX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) = F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

また、 $b < 0$ のとき

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \geq \frac{y-a}{b}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

となる。したがって

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

となる。線形関数は狭義単調関数である。

例 1.9 X を正値確率変数とする。すなわち、 $P(X \leq 0) = 0$ である。 $Y = \log X$ とおく。このとき、 $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$$

となる。したがって

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = e^y f_X(e^y)$$

となる。 $g(x) = \log x$ も \mathbb{R}^+ 上では狭義単調関数である。

例 1.10 $Y = X^2$ とおく。これは \mathbb{R} 上の単調関数ではない。しかし、 \mathbb{R}^+ 上と \mathbb{R}^- 上では単調である。 $y \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\omega \in \Omega : (X(\omega))^2 \leq y) \\ &= P(\omega \in \Omega : (X(\omega))^2 \leq y, X(\omega) > 0) + P(\omega \in \Omega : (X(\omega))^2 \leq y, X(\omega) < 0) \\ &\quad + P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 0) \\ &= P(0 < X < \sqrt{y}) + P_X(-\sqrt{y} \leq X < 0) + P(X = 0) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

となる. $y < 0$ に対しては $F_Y(y) = 0$ となるので, $f_Y(y) = 0$ となることは容易にわかる. よって

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{-y}}f_X(-\sqrt{y}), & (y > 0), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる.

これらの例を踏まえて, 一般の $Y = g(X)$ の場合を考える. そのために

$$\mathcal{X} = \{x : f_X(x) > 0\}, \quad \mathcal{Y} = \{y : y = g(x), x \in \mathcal{X}\}$$

とおく. \mathcal{X} と \mathcal{Y} を X と Y の台とよぶ. たとえば, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ で $Y = X^2$ のとき, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ならば, $\mathcal{Y} = [0, \infty)$ となる.

いま, 関数 $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を考える. もし, g が一対一上への写像ならば, 逆写像 $g^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ は定義できる. しかし, 一般には, 逆像で定義する. すなわち,

$$g^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}$$

さらに, ボレル集合 A に対し

$$g^{-1}(A) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) \in A\}$$

とする. すると

$$P(Y \in A) = P(\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \in A) = P(X \in g^{-1}(A))$$

となる. しかし, Y の確率密度関数を求めるためには, 追加の条件が必要となる.

命題 1.8 X を連続型確率変数とし, f_X をその確率密度関数とし, \mathcal{X} 上で連続とする.

(i) 逆関数 $g^{-1}(\cdot)$ は \mathcal{Y} 上で定義され, 連続微分可能とする. このとき

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, & (y \in \mathcal{Y}), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる.

(ii) $\{\mathcal{X}_i\}_{i=0}^k$ を \mathcal{X} の分割⁽¹⁻⁵⁾とし, $P(X \in \mathcal{X}_0) = 0$ とし, $f_X(\cdot)$ は各 \mathcal{X}_i , $i = 1, 2, \dots, k$, 上で連続とする. さらに, 各 \mathcal{X}_i , $i = 1, 2, \dots, k$, 上で定義された関数 $g_i(\cdot)$ が存在して, $x \in \mathcal{X}_i$ に対し, $g(x) = g_i(x)$ が成立し, $g_i(x)$ は \mathcal{X}_i 上で狭義単調関数とし, $g_i^{-1}(\cdot)$ は $\mathcal{Y} \setminus g(\mathcal{X}_0)$ 上で定義され, 連続微分可能とする. このとき,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right|, & (y \in \mathcal{Y} \setminus g(\mathcal{X}_0)), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる.

証明 (i) g が狭義単調増加のとき, $y \in \mathcal{Y}$ に対し,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

となる. よって

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$$

となる. また, g が狭義単調減少のとき,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

となる . よって ,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(g^{-1}(x)) \left(-\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \right)$$

となる . g が単調増加のときは $(d/dy)g^{-1}(y) > 0$, g が単調減少のときは $(d/dy)g^{-1}(y) < 0$ に注意すればよい .

(ii) $y \in \mathcal{Y}$ に対し ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{i=1}^k P(g(X) \leq y, X \in \mathcal{X}_i) = \sum_{i=1}^k P(X \in g_i^{-1}((-\infty, y]))$$

となる . 最右辺の各項に対して , (i) の議論を適用すれば , (ii) は証明される . □

例 1.11 確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

を持つとする . $Y = X^2$ としたとき , Y の確率密度関数を求めよう . 関数 $g(x) = x^2$ は $(-\infty, 0)$ 上と $(0, \infty)$ 上のそれぞれで単調関数である . $\mathcal{Y} = (0, \infty)$ として , 命題 1.8 を利用するために ,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \{0\}, \\ \mathcal{X}_1 &= (-\infty, 0), \quad g_1(x) = x^2, \quad g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y} \\ \mathcal{X}_2 &= (0, \infty), \quad g_2(x) = x^2, \quad g_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{aligned}$$

とおく . Y の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{y})^2/2} \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{y})^2/2} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2}, \quad 0 < y < \infty \end{aligned}$$

となる .

例 1.12 確率変数 X は連続で分布関数 $F_X(\cdot)$ を持つとし , $Y = F_X(X)$ とおく . このとき , Y は確率密度関数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 < y < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (1.1)$$

を持つ .

$F_X(x)$ は x に関して狭義単調増加として証明⁽¹⁻⁶⁾をする . $0 \leq F_X(x) \leq 1$ であり , $P(F_X(X) < 0) = 0$ と $P(F_X(X) > 1) = 0$ となる確率はゼロなので , $y \leq 0$ のときは $P(Y \leq y) = 0$ である . $0 < y < 1$ に対して ,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(F_X(X) \leq y) \\ &= P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(y)) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

となる . $y \geq 1$ に対しては $P(Y \leq y) = 1$ となる . したがって ,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & (y \leq 0), \\ y, & (0 < y < 1), \\ 1, & (y \geq 1) \end{cases}$$

となる. $0 < y < 1$ 上で $F_Y(y)$ は微分可能で導関数は 1 となる. また, $y = 0$ における $F_Y(y)$ の導関数を左微分で, $y = 1$ における $F_Y(y)$ の導関数を右微分で定めると Y の確率密度関数は (1.1) となることがわかる.