第2章　1 次元の確率分布の代表的モデル

2.1　離散型確率変数のモデル

ベルヌーイ分布　確率変数 X が母数 p のベルヌーイ分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,p) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0,\,1$$

ときをいう．ただし，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{Ber}(p)$ と記す．成功の確率が $p\,(0 < p < 1)$，失敗の確率が $1-p$ の試行を**ベルヌーイ試行**とよび，この試行の成功を 1，失敗を 0 に対応させたものが X である．

定理 2.1 (ベルヌーイ分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= p\\ \mathbb{VAR}[X] &= p(1-p)\end{aligned}$$

証明　$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0,\,1} x f_X(x|\,p) = 0 \times f_X(0|\,p) + 1 \times f_X(1|\,p) = p$ よりわかる．分散も同様に $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ に注意すれば，

$$\mathbb{VAR}[X] = \sum_{x=0,\,1}(x-p)^2 f_X(x|\,p) = (0-p)^2 \times f_X(0|\,p) + (1-p)^2 \times f_X(1|\,p) = p(1-p)$$

からわかる．　□

二項分布　確率変数 X が母数 n と p の二項分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,n,\,p) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,\,1,\,\ldots,\,n$$

ときをいう．ただし，$n \geq 1$ は整数，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{BN}(n,\,p)$ と記す．

定理 2.2 (二項分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np\\ \mathbb{VAR}[X] &= np(1-p)\\ M_X(t) &= (pe^t + (1-p))^n, \qquad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．二項定理を用いると $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f_X(x|\,n,\,p) = \sum_{x=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} (pe^t)^x(1-p)^{n-x} = (pe^t + (1-p))^n$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.8（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0} = n(pe^t+(1-p))^{n-1}pe^t\bigg|_{t=0} = np \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\bigg|_{t=0} = n(n-1)(pe^t+(1-p))^{n-2}(pe^t)^2\bigg|_{t=0} + n(pe^t+(1-p))^{n-1}pe^t\bigg|_{t=0} \\ &= n(n-1)p^2+np\end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = np(1-p)$$

がわかる． □

幾何分布　確率変数 X が母数 p の幾何分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,p) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1,\,2,\,\ldots$$

ときをいう．ただし，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{G}(p)$ と記す．

定理 2.3 (幾何分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{p}{1-p} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{1-p}{p^2} \\ M_X(t) &= \frac{p}{1-t(1-p)}, \qquad t < \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

証明　略． □

負の二項分布　確率変数 X が母数 n と p の負の二項分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,n,\,p) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n(1-p)^x, \qquad x = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

ときをいう．ただし，$n \geq 1$ は整数，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{NBN}(n,\,p)$ と記す．負の二項展開式：

$$\frac{1}{p^n} = (p-(1-p))^n = \sum_{x=0}^{\infty}\binom{-n}{x}(-(1-p))^x = \sum_{x=0}^{\infty}\binom{n+x-1}{n-1}(1-p)^x$$

の両辺に p^n をかけた式の各項が確率関数である．ここで負の二項係数は

$$\binom{-n}{x} = \frac{1}{x!}(-n)(-n+1)\cdots(-n-x+1) = (-1)^x\binom{n+x-1}{n-1}$$

である．

定理 2.4 (負の二項分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= n\frac{p}{1-p} \\ \mathbb{VAR}[X] &= n\frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

証明　略. □

ポアソン分布　確率変数 X が母数 λ のポアソン分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \qquad x = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

ときをいう．ただし，$\lambda > 0$ である．この分布を $\mathrm{Po}(\lambda)$ と記す.

定理 2.5 (ポアソンの平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \lambda \\ \mathbb{VAR}[X] &= \lambda \\ M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)}\end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．$t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,n,\,p) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.8（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\bigg|_{t=0} = \lambda \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\bigg|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\bigg|_{t=0} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)}\bigg|_{t=0} \\ &= \lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \lambda$$

がわかる. □

分布	母数	確率関数 $P(X = x)$	平均	分散
ベルヌーイ分布	$0 < p < 1$	$p^x(1-p)^{1-x},\, x = 0,\,1$	p	$p'1-p)$
二項分布	$n \geq 1,\, 0 < p < 1$	$\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}$ ただし，$x = 0,\,1,\,\ldots,\,n$	np	$np(1-p)$
幾何分布	$0 < p < 1$	$p(1-p)^{x-1}$ ただし，$x = 1,\,2,\,\ldots$	$\dfrac{p}{1-p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
負の二項分布	$n \geq 1,\, 0 < p < 1$	$\begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} p^n(1-p)^x$ ただし，$x = 1,\,2,\,\ldots$	$n\dfrac{p}{1-p}$	$n\dfrac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布	$0 < \lambda < \infty$	$\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\, x = 0,\,1,\,2,\,\ldots$	λ	λ