2.2 連続型確率変数のモデル

一様分布 確率変数 X が区間 (α, β) の一様分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(\beta-\alpha), & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．この分布を $U(\alpha, \beta)$ と記すことにする．

定理 2.6 (一様分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x\,dx = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x^2\,dx = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} \end{aligned}$$

となることから

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} - \left\{\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

となる． □

正規分布 $(N(\mu, \sigma^2)$ 確率変数 X が母数 (μ, σ^2) の正規分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

を持つときをいう．

ただし，$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ である．

特に，$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のとき，正規分布 $N(0, 1)$ のことを**標準正規分布**という．

定理 2.7 (正規分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mu \\ \mathbb{VAR}[X] &= \sigma^2 \\ M_X(t) &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \qquad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

証明 まず，Z が標準正規分布に従うとき，$X = \sigma Z + \mu$ とおくと X は $N(\mu, \sigma^2)$ に従うことを示す．$g(z) = \sigma z + \mu$ と $g^{-1}(x) = (1/\sigma)(x-\mu)$ として命題 1.8 を用いると

$$f_X(x) = f_Z(g^{-1}(x))\left|\frac{d}{dx}g^{-1}(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\left|\frac{1}{\sigma}\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

となり，X は $N(\mu, \sigma^2)$ に従うがわかった．Z の確率密度関数を $f_Z(z) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$ とおくことにする．つぎに，期待値の線形性と分散の性質より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sigma\mathbb{E}[Z] + \mu \\ \mathbb{VAR}[X] &= \sigma^2\mathbb{VAR}[Z] \end{aligned}$$

となることに注意する．$zf_Z(z)$ は奇関数であるので，

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} zf_Z(x)\,dz = 0$$

がわかる．また， $z^2 f_Z(z)$ は偶関数であることと部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{VAR}[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(x)\,dz = 2\int_0^{\infty} z^2 f_Z(x)\,dz 2\int_0^{\infty} z(f(z))'\,dz \\ &= [-zf_Z(z)]_0^{\infty} + \int_0^{i} nftyf_Z(z)\,dz = 1 \end{aligned}$$

がわかる．最後の等号は $\lim_{z\to\infty} zf_Z(z) = 0$ と $f_Z(z)$ は偶関数であることからわかる． □

指数分布 $(EX(\lambda))$　確率変数を X が母数 λ の指数分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．

ただし，$0 < \lambda < \infty$ である．この分布を $Ex(\lambda)$ と記すことにする．

定理 2.8 (指数分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad -\infty < t < \lambda \end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．$t < \lambda$ に対して，

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\lambda)\,dx == \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\lambda)\,dx = \lambda\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.8（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \left.\frac{d}{dt}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left.\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

がわかる． □

ガンマ分布　確率変数 X が母数 $\alpha,\,\beta$ のガンマ分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\alpha,\,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta), & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．この分布を $GA(\alpha,\,\beta)$ と記すことにする．

特に，$\alpha = n/2,\,(n \in \mathbb{N})$ と $\beta = 1/2$ のとき，ガンマ分布 $GA(n/2,\,1/2)$ を自由度 n のカイ自乗分布という．ただし，$0 < \alpha, beta < \infty$ である．

注意 2.1 $\beta = 1/\lambda$ と $\alpha = 1$ のとき，指数分布になる．

定理 2.9 (ガンマ分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\ \mathbb{VAR}[X] &= \alpha\beta^2 \\ M_X(t) &= (1-\beta t)^{-\alpha}, \qquad t < 1/\beta \end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta)\,dx = 1$$

に注意する．$t < 1/\beta$ に対して，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\alpha,\,\beta)\,dx == \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\alpha,\,\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\lambda\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x(1-\beta t)/\beta)\,dx = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.8（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \left.\frac{d}{dt}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\alpha\beta}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}\right|_{t=0} = \alpha\beta \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left.\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{\alpha(\alpha+1)\beta^2}{(1-\beta t)^{\alpha+2}}\right|_{t=0} = \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \alpha\beta^2$$

がわかる．　□

分布	母数	確率密度関数	平均	分散
一様分布	$\alpha,\,\beta\,(\alpha < \beta) \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(\beta-\alpha)},\,\alpha < x < \beta$	$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$	$\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}$
標準正規分布	なし	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$	0	1
正規分布	$\mu \in \mathbb{R},\,\sigma^2 > 0$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
指数分布	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x},\,x > 0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布	$\alpha,\,\beta > 0$	$\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta),\,x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
カイ自乗分布	$n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}e^{-x/2}x^{(n/2)-1},\,x > 0$	n	$2n$