

3.2 条件付き分布と独立性

3.2.1 離散型確率変数の場合

定義 3.8 (X, Y) は離散型確率ベクトルとし, 同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ および周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を持つとする.

(i) $P(X = x) = f_X(x) > 0$ なる任意の x に対して, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付確率関数を $f_{Y|X}(y|x)$ で記し,

$$f_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

で定める.

(ii) $P(Y = y) = f_Y(y) > 0$ なる任意の y に対して, $Y = y$ が与えられたときの X の条件付確率関数を $f_{X|Y}(x|y)$ で記し,

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

で定める.

注意 3.4 $f_{Y|X}(y|x)$ は確率関数であることに注意せよ. すなわち, 各 x に対して,

- $f_{Y|X}(y|x) \geq 0, y \in \mathbb{R},$
- $\sum_{y \in S_Y} f_{Y|X}(y|x) = 1$

となっている.

例 3.2 離散型確率ベクトル (X, Y) の同時確率関数が以下のように与えられているとする:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(0, 10) &= f_{X,Y}(0, 20) = \frac{2}{18}, & f_{X,Y}(1, 10) &= f_{X,Y}(1, 30) = \frac{3}{18}, \\ f_{X,Y}(1, 20) &= \frac{4}{18}, & f_{X,Y}(2, 30) &= \frac{4}{18}. \end{aligned}$$

ただし, その他の (x, y) では $f_{X,Y}(x, y) = 0$ である. $X = x, x = 0, 1, 2$ が与えられたときの Y の条件付確率関数を求めよう. そのために, X の周辺確率関数を求める:

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f_{X,Y}(0, 10) + f_{X,Y}(0, 20) = \frac{4}{18}, \\ f_X(1) &= f_{X,Y}(1, 10) + f_{X,Y}(1, 20) + f_{X,Y}(1, 30) = \frac{10}{18}, \\ f_X(2) &= f_{X,Y}(2, 30) = \frac{4}{18}. \end{aligned}$$

$x = 0$ のとき, $y = 10, 20$ のとき $f_{X,Y}(0, y) > 0$ であるので, $y = 10, 20$ のとき $f_{Y|X}(y|0) > 0$ となり,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(10|0) &= \frac{f_{X,Y}(0, 10)}{f_X(0)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{4}{18}} = \frac{1}{2}, \\ f_{Y|X}(20|0) &= \frac{f_{X,Y}(0, 20)}{f_X(0)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{4}{18}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる. したがって, $X = 0$ という情報から Y の条件付確率は $y = 10, 20$ にそれぞれ $1/2$ の確率を与える.

$x = 1$ のとき, $y = 10, 20, 30$ のとき $f_{Y|X}(y|1) > 0$ となり,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(10|1) &= \frac{f_{X,Y}(1, 10)}{f_X(1)} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{3}{10}, \\ f_{Y|X}(20|1) &= \frac{f_{X,Y}(1, 20)}{f_X(1)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{4}{10}, \\ f_{Y|X}(30|1) &= \frac{f_{X,Y}(1, 30)}{f_X(1)} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{3}{10}, \end{aligned}$$

となる. したがって, $X = 1$ という情報から Y の条件付確率は $y = 10, 20, 30$ にそれぞれ $3/10, 4/10, 3/10$ の確率を与える.

$x = 2$ のとき, $y = 30$ のとき $f_{Y|X}(y|2) > 0$ となり,

$$f_{Y|X}(30|2) = \frac{f_{X,Y}(2, 30)}{f_X(2)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18}} = 1$$

となる. したがって, $X = 2$ という情報から $Y = 30$ がわかる.

たとえば,

$$\begin{aligned} P(Y > 10 | X = 0) &= f_{Y|X}(20|0) = \frac{1}{2}, \\ P(Y > 10 | X = 1) &= f_{Y|X}(20|1) + f_{Y|X}(30|1) = \frac{7}{10}, \end{aligned}$$

となる.

3.2.2 連続型確率変数の場合

定義 3.9 (X, Y) は連続型確率ベクトルとし, 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ および周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を持つとする.

(i) $f_X(x) > 0$ なる任意の x に対して, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付確率密度関数を $f_{Y|X}(y|x)$ で記し,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

で定める.

(ii) $f_Y(y) > 0$ なる任意の y に対して, $Y = y$ が与えられたときの X の条件付確率密度関数を $f_{X|Y}(x|y)$ で記し,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

で定める.

例 3.3 連続型確率ベクトル (X, Y) は同時確率密度関数

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする. $X = x$ が与えられたときの Y の条件付確率密度関数を求めるために, X の周辺確率密度関数を求めよう. $x \leq 0$ の場合, すべての y に対して $f_{X,Y}(x, y) = 0$ なので, $f_X(x) = 0$ となる. $x > 0$ の場合, $y > x$ ならば, $f_{X,Y}(x, y) > 0$ なので,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_x^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = e^{-x}$$

となる。したがって

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となる。これより、 $X = x$ が与えられたときの Y の条件付確率密度関数は $x > 0$ の場合のみに定義される。各 $x > 0$ に対して

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-(y-x)}, & y > x, \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{0}{e^{-x}} = 0, & y \leq x \end{aligned}$$

となる。

3.2.3 独立性との関係

注意 3.5 もし、 X と Y が独立ならば、 x の値に関わらず

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

となる。