

### 3.5 2次元の確率変数の変換

$(X, Y)$  を 2次元の確率ベクトルとし, 実数値関数  $g_1(x, y), g_2(x, y)$  によって定められる新たな確率ベクトル  $(U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$  の分布を求めることを考える.  $\mathbb{R}^2$  の任意の部分集合  $B$  に対して,  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $A$  を

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (g_1(x, y), g_2(x, y)) \in B\}$$

で定めると

$$P((U, V) \in B) = P((X, Y) \in A)$$

となる. したがって, 固定された  $g_1, g_2$  に対して,  $(U, V)$  の分布は  $(X, Y)$  の分布のみに依存することがわかる.

#### 3.5.1 離散型確率ベクトルの場合

$(X, Y)$  が離散型確率ベクトルの場合をまず考えよう.  $(X, Y)$  の同時確率関数を  $f_{X,Y}(x, y)$  とし,  $(U, V)$  の同時確率密度関数  $f_{U,V}(u, v)$  を求めよう. そのために,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$  とし,

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{ある } (x, y) \in S \text{ に対して, } u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\}$$

とする. すると  $(u, v) \in T$  ならば,  $f_{U,V}(u, v) > 0$  となり,  $T$  は可算集合となることに注意する. 任意の  $(u, v) \in T$  に対して,

$$S_{uv} = \{(x, y) \in S : g_1(x, y) = u, g_2(x, y) = v\}$$

とおけば,

$$f_{U,V}(u, v) = P(U = u, V = v) = P((X, Y) \in S_{uv}) = \sum_{(x, y) \in S_{uv}} f_{X,Y}(x, y)$$

となる.

**定理 3.9**  $X$  と  $Y$  は独立に平均  $\theta (\theta > 0)$  と  $\lambda (\lambda > 0)$  のポアソン分布に従うとする. このとき,  $X + Y$  は平均  $\theta + \lambda$  のポアソン分布に従う.

**証明** 仮定より  $(X, Y)$  の同時確率関数は

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, y = 0, 1, 2, \dots$$

となる. したがって,  $S = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$  である.

いま,  $U = X + Y, V = Y$  とおく. すなわち,  $g_1(x, y) = x + y, g_2(x, y) = y$  である.  $y = v, x = u - v$  から  $v = 0, 2, \dots$  かつ  $u - v = 0, 1, \dots$  から  $u = v, v + 1, v + 2, \dots$  を得る. したがって,

$$T = \{v = 0, 1, 2, \dots; u = v, v + 1, v + 2, \dots\} = \{u = 0, 1, 2, \dots; v = 0, 1, \dots, u\}$$

となる. 任意の  $(u, v) \in T$  に対して,  $S_{uv} = \{(u, u - v)\}$  となるので,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, u - v) = \frac{\theta^{u-v} e^{-\theta}}{(u - v)!} \frac{\lambda^v e^{-\lambda}}{v!},$$

をえる.  $U$  の周辺確率関数を求めるために, 固定した非負整数  $u$  を考える.

$$\{U = u\} = \cup_{v: f_{U,V}(u, v) > 0} \{U = u, V = v\}$$

と

$$\{v : f_{U,V}(u, v) > 0\} = \{0, 1, \dots, u\}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f_U(u) &= P(U = u) = P(\cup_{v=0}^u \{U = u, V = v\}) = \sum_{v=0}^u P(U = u, V = v) = \sum_{v=0}^u f_{U,V}(u, v) \\ &= \sum_{v=0}^u \frac{\theta^{u-v} e^{-\theta} \lambda^v e^{-\lambda}}{(u-v)! v!} = e^{-(\theta+\lambda)} \sum_{v=0}^u \frac{\theta^{u-v} \lambda^v}{(u-v)! v!} \\ &= \frac{e^{-(\theta+\lambda)}}{u!} \sum_{v=0}^u \binom{u}{v} \theta^{u-v} \lambda^v = \frac{e^{-(\theta+\lambda)} (\theta + \lambda)^u}{u!} \end{aligned}$$

となり、定理は証明された。 □

### 3.5.2 連続型の場合

$(X, Y)$  を連続型確率変数とし、同時確率密度関数  $f_{X,Y}(x, y)$  を持つとする。前節と同様、確率ベクトル  $(U, V)$  は  $U = g_1(X, Y)$ ,  $V = g_2(X, Y)$  で定義され、

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\} \\ T &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{ある } (x, y) \in S \text{ に対して, } u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\} \end{aligned}$$

であったことを思い出そう。議論を簡単にするために、 $g_1, g_2$  は一対一対応の変換と仮定し、逆変換を

$$x = h_1(u, v), \quad y = h_2(u, v)$$

と書くことにする。さらに、

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

と(3-7)おく。ただし、

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial v},$$

である。ヤコビアン  $J$  は恒等的にゼロではないとする。このとき、

$$f_{U,V} = \begin{cases} f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) |J|, & (u, v) \in T \\ 0, & (u, v) \notin T \end{cases}$$

となる。これは、 $(u, v) \in T$  に対して、重積分の変数変換の公式を使えば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(U \leq u, V \leq v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int \int_{g_1(x, y) \leq u, g_2(x, y) \leq v} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v f_{X,Y}(h_1(s, t), h_2(s, t)) |J| ds dt \end{aligned}$$

となることからわかる。

例 3.8  $X$  と  $Y$  は独立に標準正規分布に従っていると仮定し、変換

$$U = X + Y, \quad V = X - Y$$

を考える。したがって、 $g_1(x, y) = x + y$ ,  $g_2(x, y) = x - y$  である。(X, Y) の同時確率密度関数は

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

であるので、 $S = \mathbb{R}^2$  となる。また、 $g_1, g_2$  は一対一対応で逆変換は

$$x = h_1(u, v) = \frac{u+v}{2}, \quad y = h_2(u, v) = \frac{u-v}{2}$$

となる。したがって、 $T = \mathbb{R}^2$  となる。さらに、

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

となるので、(U, V) の同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) |J| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{(u+v)^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{(u-v)^2}{4}\right) \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-u^2/4}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-v^2/4}\right) \end{aligned}$$

となる。これと補題 3.1 から U と V は独立となる。

**定理 3.10** X, Y は独立な確率変数とし、 $g_1(x)$  は x のみの関数で  $g_2(y)$  は y のみの関数とする。このとき、 $U = g_1(X)$  と  $V = g_2(Y)$  も独立である。

**証明** U, V は連続型の場合を示すことにする。任意の  $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$  に対して、

$$S_u = \{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \leq u\}, \quad S_v = \{y \in \mathbb{R} : g_2(y) \leq v\},$$

とおく。このとき、(U, V) の同時分布関数は

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(X \in S_u, Y \in S_v) = P(X \in S_u)P(Y \in S_v) \end{aligned}$$

となる。これより (U, V) の同時確率密度関数は

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U,V}(u, v) = \left(\frac{d}{du} P(X \in S_u)\right) \left(\frac{d}{dv} P(Y \in S_v)\right)$$

となる。したがって、補題 3.1 から定理は証明された。□