

### 3.7 確率不等式 2

定理 3.11 (ヘルダーの不等式) 正数  $p, q$  は  $1/p + 1/q = 1$  をみたすとする.  $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$  なる確率変数  $X, Y$  を確率変数に対して,

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \{\mathbb{E}[|X|^p]\}^{1/p} \{\mathbb{E}[|Y|^q]\}^{1/q}$$

が成立する. ときに,  $p = 2, q = 2$  のときの不等式

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]} \sqrt{\mathbb{E}[|Y|^2]}$$

をシュバルツの不等式という.

証明 まず, 任意の正の数  $a, b$  に対して,

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab \quad (3.3)$$

が成立することを示す. ただし, 等号成立は  $a^p = b^q$  の時に限る.  $b$  を固定して,

$$g(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$$

とおき,  $g(a)$  を  $a$  に関して最小化する:

$$\frac{d}{da}g(a) = a^{p-1} - b = 0 \iff b = a^{p-1}$$

となり, 2 次の導関数を確認すれば,  $a = b^{1/(p-1)}$  のとき, 最小となる. したがって,

$$g(a) \geq g(b^{1/(p-1)}) = \frac{1}{p}b^{p/(p-1)} + \frac{1}{q}b^q - b^{1/(p-1)}b = \frac{1}{p}b^q + \frac{1}{q}b^q - b^q = 0$$

となる. 最後から 2 番目の等号は  $p/(p-1) = q$  よりわかる.

次に,

$$a = \frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}}, \quad b = \frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}},$$

として, (3.3) を用いてば,

$$\frac{1}{p} \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q} \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \geq \frac{|XY|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}}$$

を得る. この両辺の期待値を取れば, 定理は証明された. □

例 3.9  $X$  と  $Y$  を確率変数とし,  $\mathbb{E}[X^2] < \infty, \mathbb{E}[Y^2] < \infty$  とする. このとき,  $-\infty < \mu_X = \mathbb{E}[X], \mu_Y = \mathbb{E}[Y] < \infty$  がただちにわかる. さらに, Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]| \leq \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2]}$$

より

$$(\text{COV}[X, Y])^2 \leq \text{VAR}[X] \text{VAR}[Y]$$

を得る. したがって,

$$|\rho[X, Y]| \leq 1 \iff -1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$$

を得る.