今野　(2005 年 6 月 15 日)

統計解析演習の問題 (その８)

$\boxed{\text{問題 38}}$　X と Y の同時確率密度関数が

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy - 2x - 2y + 2 & (0 < x, y < 1), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられとする.

(i) Y の平均と分散を求めよ.

(ii) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

を確認せよ.

(iii) X と Y の共分散と相関係数を求めよ.

(iv) $\hat{Y} = \mathbb{E}[Y|X]$ を求めよ.（ヒント：答えは X の関数となる．また，$\mathbb{E}[Y|X]$ は $g(x) = \mathbb{E}[Y|x]$ としたとき，$\mathbb{E}[Y|X] = g(X)$ で定める．）

(v) $\widetilde{Y} = a + bX$ （a と b は定数）としてとき、$\mathbb{E}[\{\widetilde{Y} - Y\}^2]$ を最小にする a と b を $\mathbb{E}[X]$、$\mathbb{E}[Y]$、$\mathbb{E}[XY]$、および $\mathbb{E}[X^2]$ で表現した後、それを求めよ．

$\boxed{\text{問題 39}}$　X と Y は互いに独立な確率変数でそれぞれは正規分布 $N(0,1)$ と $N(0,4)$ に従うとする.

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y$$

とおく.

(i) U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,v)\,du\,dv = 1$$

を確認せよ.

(ii) U と V の分散共分散行列

$$\begin{pmatrix} \mathbb{VAR}[U] & \mathbb{COV}[U,V] \\ \mathbb{COV}[U,V] & \mathbb{VAR}[V] \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

$\boxed{\text{問題 40}}$　X と Y 互いに独立な確率変数でそれぞれは標準正規正規分布に従うとし，

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$$

とおく.

(i) U と V の期待値と U と V の分散共分散行列

$$\begin{pmatrix} \mathbb{VAR}[U] & \mathbb{COV}[U,\, V] \\ \mathbb{COV}[U,\, V] & \mathbb{VAR}[V] \end{pmatrix}$$

を求めよ.

(ii) U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,\, v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,\, v)\, du\, dv = 1$$

を確認せよ.

$\boxed{\text{問題 41}}$　確率変数 X と Y は同時確率密度関数

$$f_{X,Y}(x,\, y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1,\, 0<y<1, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする.

(i) $U = X+Y, V = X$ とおく．U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,\, v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,\, v)\, du\, dv = 1$$

を確認せよ.

(ii) U の周辺確率密度関数 $f_U(u)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_U(u)\, du = 1$$

を確認せよ.

(iii) $Z = XY$ とおく．Z と X の同時確率密度関数 $f_{Z,X}(z,\, x)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{Z,X}(z,\, x)\, dz\, dx = 1$$

を確認せよ.

(iv) Z の周辺確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\, dz = 1$$

を確認せよ.

(v) $T = X/Y$ とおく．T と Y の同時確率密度関数 $f_{T,Y}(t,\, y)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{T,Y}(t,\, y)\, dt\, dy = 1$$

を確認せよ．

(vi) T の周辺確率密度関数 $f_T(t)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\, dt = 1$$

を確認せよ．

$\boxed{\text{問題 42}}$ X と Y は独立同一の分布に従い，それぞれは確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

を持つとする．

(i) $V = X + Y, U = Y$ としたとき，U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,\, v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,\, v)\, du\, dv = 1$$

を確認せよ．

(ii) V の周辺確率密度関数 $f_V(v)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\, dv = 1$$

を確認せよ．

(iii) $W = X/Y$ とおく．W と Y の同時確率密度関数 $f_{W,Y}(w,\, y)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{W,Y}(w,\, y)\, dw\, dy = 1$$

を確認せよ．

(iv) W の周辺確率密度関数 $f_W(w)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_W(w)\, dw = 1$$

を確認せよ．

$\boxed{\text{問題 43}}$ 連続型確率変数 X, Y は同時確率密度関数

$$(1) \qquad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(2+x+y+\beta xy) & (-1<x<1,\ -1<y<1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする．ただし，β は $0 \le \beta \le 1/2$ なる定数とする．また，$0 \le \beta \le 1/2$ かつ $-1<x<1,\ -1<y<1$ ならば，$f_{X,Y}(x,y) \ge 0$ となっていることに注意せよ．この事実の証明は不要とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) X と Y の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ をそれぞれ求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1,$$

を確認せよ．

(ii) XY の期待値 $\mathbb{E}[XY]$ を求めよ．

(iii) X と Y が無相関になるときの β の値を求めよ．

(iv) X と Y が無相関になるとき（すなわち，X と Y の同時確率密度関数が問い (c) で求めた β の値をもつ (1) で与えられるとき)，X と Y は独立であるかどうかを調べよ．

$\boxed{\text{問題 44}}$ 離散型確率変数 X は確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & (x=-1,\,0,\,1), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする．

(i) X の分布関数 $F_X(x)$ のグラフを描け．

(ii) X の平均 $\mathbb{E}[X]$ ，X の 2 次と 3 次の原点まわり積率 $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[X^3]$ を求めよ[1]．

(iii) $Y = X^2$ としたとき，X と Y の相関係数を求めよ．

$\boxed{\text{問題 45}}$ 取りうる値の集合が $\{1, 2, 3\}$ である確率変数 X と Y の同時確率分布 $f_{X,Y}(x,y)$ が以下のように与えられているとする．以下の問いに答えよ．

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

[1] X の平均 は X の期待値と同じこと．また，X の 2 次の原点まわり積率は X^2 の期待値と同じこと．

(i) X と Y の周辺確率分布 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ．さらに

$$\sum_x f_X(x) = 1, \qquad \sum_y f_Y(y) = 1$$

を確認せよ．

(ii) $Y = y\,(y = 1, 2, 3)$ が与えれたときの X の条件付確率関数 $f_{X|Y}(x|\,y)$ を求めよ．さらに，$Y = y\,(y = 1, 2, 3)$ が与えれたときの X の条件付確率関数 $f_{X|Y}(x|\,y)$ が定義される各 y に対して

$$\sum_x f_{X|Y}(x|\,y) = 1$$

を確認せよ．

(iii) $Y = y\,(y = 1, 2, 3)$ が与えれたときの X の条件付期待値 $\mathbb{E}[X|\,y]$ を求めよ．

(iv) $g(y) = \mathbb{E}[X|\,y]$ とおいたとき，$g(Y)$ の期待値 $\mathbb{E}[g(Y)]$ を求めよ．

$\boxed{\text{問題 46}}$ 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする．ただし，c は正の定数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $f_X(x)$ が確率密度関数になるように c を定めよ．

(ii) X の期待値と分散 $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{VAR}(X)$ を求めよ．

(iii) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ を求めよ．ただし，$-\infty < x < \infty$ である．

(iv) 確率 $\mathbb{P}(-0.9 < X < 0.9)$ を求めよ．

(v) チェビシェフの不等式を用いて確率 $\mathbb{P}(-0.9 < X < 0.9)$ の下限を求めよ．

$\boxed{\text{問題 47}}$ 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を持つとする．ただし，μ, σ は定数で $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$ とし，$\exp(x) = e^x$ である．

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

と定義したとき，以下の問いに答えよ．

(i) Z の分布関数

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) \qquad (-\infty < z < \infty)$$

を求めよ．

(ii) Z の期待値と分散は

$$\mathbb{E}[Z] = 0, \qquad \mathbb{VAR}[Z] = 1$$

で与えられることを示せ．ただし，$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ および $\lim_{x\to\pm\infty} x\exp(-x^2/2) = 0$ は証明なしで用いてよい．

(iii) X の期待値と分散 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{VAR}[X]$ を求めよ．

問題 48　離散型確率変数 X, Y の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ は下の表のように与えられているとする．

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	α	β	α
0	β	0	β
1	α	β	α

ただし，α, β は定数で $\alpha > 0, \beta > 0$ かつ $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ である．

(i) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ．

(ii) X の周辺分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ を求め，$F_X(x)$ のグラフを作図せよ．

(iii) X, Y, XY の期待値 $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(XY)$ を計算せよ．

(iv) X と Y の共分散 $\mathbb{COV}[X, Y]$ を求めよ．

(v) X と Y は独立か従属かを調べよ．さらに，その理由を述べること．

問題 49　連続型確率変数 X, Y は同時確率密度関数

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{8} & (0 < x < y < 1), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする．

(i) $f_{X,Y}(x, y)$ が同時確率密度関数であるためにどのようなことを満足していなければならないかを述べた上でそれらを実際にみたしているかを確認せよ．

(ii) X と Y の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ．なお，解答には $f_X(x) > 0$ と $f_Y(y) > 0$ となる範囲を明示すること．

(iii) $Y = y$ が与えられたときの X の条件付確率密度関数 $f_{X|Y}(x|y)$ を求めよ．ただし，解答には $f_{X|Y}(x|y)$ が定義される y の範囲を明示すること．

(iv) $Y = y$ が与えられたときの X の条件付期待値 $\mathbb{E}(X|y)$ を求めよ．

問題 50　Ω を標本空間とし，$\mathcal{F}$ を Ω 上の完全加法族[2]とする．確率 $\mathbb{P}$ は $\mathcal{F}$ 上で定義された実数値関数でつぎの条件をみたすものであった．

(P1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathbb{P}(A) \ge 0$

(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

[2] Ω の部分集合のなす集まりで任意の可算回の集合演算に関して閉じている．

(P3) $i = 1, 2, \ldots$ に対して $A_i \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ ならば，

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(P1) から (P3) をどこでどのように使ったかを明示（例に倣って）して以下の (i)–(iii) を証明せよ．

(i) (P1)–(P3) および (3) を用いてつぎのことを示せ：$B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ とする．

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \quad \text{ならば，} \quad \mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) \tag{2}$$

(ii) (P1)–(P3) および (3) を用いてつぎのことを示せ：$B_3, B_4 \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mathbb{P}(B_3 \cup B_4) \leq \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4)$$

(iii) (P1)–(P3)，(2) および (3) を用いてつぎのことを示せ：$C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ とする．

$$C_1 \subset C_2 \quad \text{ならば，} \quad \mathbb{P}(C_1) \leq \mathbb{P}(C_2)$$

例：たとえば，

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \tag{3}$$

をを示すには，$A_1 = \Omega,\ A_i = \emptyset\,(i \geq 2)$ とおくと

$$\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \tag{4}$$

と

$$A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j) \tag{5}$$

となることに注意すれば，

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$

となる．ただし，1 番目の等号は 4 からわかり，2 番目の等号は (5) と (P3) からわかる．したがって，

$$\sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \tag{6}$$

となる．しかし，(P1) から $\mathbb{P}(\emptyset) \geq 0$ なることと (6) から $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ がわかる．