2005 年 6 月 15 日（今野）

6 月 01 日出題のレポートのコメント

よくできているとレポートには $\boxed{\text{よくできました}}$ の判が押してあります．判のないレポートは下記を参考にして考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．

<u>確率変数 X の分布関数とは</u>

$$F_X(x) = P(X \le x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

である．したがって，実数上の関数で (i) 単調増加，(ii) 左連続，(iii) $0 \le F_X(x) \le 1$，(iv) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ なる関数である．

特に，X が連続型確率変数で確率密度関数 $f_X(x)$ を持てば，

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

となる．

$\boxed{\text{問題 15}}$ 題意は与えられた関数のグラフを作図し，それが分布関数の条件をみたしているか確認すればよい．

$\boxed{\text{問題 16}}$

(i) 題意ですが，分布関数のグラフが書け，分布関数の性質を認識していれば十分．

$\boxed{\text{問題 17}}$ 離散型確率変数に関する問題であることに注意すること．計算をするときは和の記号が登場する．積分が登場するものは 0 点となる．

(i) (1) $0 \le f_X(x) \le 1$ と $\sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = 1$ を示せばよい．

(ii) $S = \{x \in \mathbb{R} :\ f_X(x) > 0\} = \mathbb{N}$ に注意する．さらに，$a, b \in \mathbb{R}(a < b)$ に対して，

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x \in A\cap\mathbb{N}} f_X(x), \qquad A = \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\}$$

に注意すればよい．問題では $A = [4, 7]$ となるので，$A \cap \mathbb{N} = \{4, 5, 6, 7\}$ となる．

$\boxed{\text{問題 21}}$ 離散型確率変数に関する問題であることに注意すること．計算をするときは和の記号が登場する．

(iii) 期待値の性質を利用して，

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X-1)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] + 1$$

として前の問の結果を利用する．または，

$$\mathbb{E}[(X-1)^2] = \sum_{x=1}^{3} (x-1)^2 f_X(x)$$

から求めてもよい．

(iv) 分散公式から $\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2]=\mathbb{E}[Y^2]-\{\mathbb{E}[Y]\}^2$ となることにまず注意する．右辺の一項目は

$$\mathbb{E}[Y^2]=\mathbb{E}[(X-1)^4]=\sum_{x=1}^{3}(x-1)^4 f_X(x)$$

と考えればよい．

(v) 分布関数は階段関数になります．ジャンプする点は $\{x\in\mathbb{R}:\ f_X(x)>0\}=\{1,\,2,\,3\}$ でジャンプの高さはその点の $f_X(x)$ の値．

$\boxed{\text{問題 26}}$ $x<0$ のとき，$f_X(x)=0$ なので，期待値等の計算は x が正の部分のみになることに注意せよ．

(i) 分布関数は $0\le F_X(x)\le 1$ であることに注意せよ．

(ii) 広義積分の意味と式の書き方については微積分の教科書で確認しておいてください．

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}\,dx=\lim_{M\to\infty}\left([-xe^{-x}]_0^M+\int_0^M e^{-x}\,dx\right)$$

の意味である（上の式で $\lim_{M\to\infty}$ のない式は駄目）が，

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx=[-xe^{-x}]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

のように簡単に書いてもよい．

(iii) 確率密度関数（$x<0$ のとき，$f_X(x)=0$）より $y\le 0$ のときは，$P(X^3\le y)\le P(X\le 0)=0$ となることに注意する[1]．したがって，$F_Y(y)=0\,(y\le 0)$ となる．つぎに，$y>0$ のときを考える．

$$X^3\le y\iff X\le y^{1/3}$$

となるので，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^3\le y)=P(X\le y^{1/3})=\int_{-\infty}^{y^{1/3}}f_X(x)\,dx=\int_0^{y^{1/3}}f_X(x)\,dx$$

となる．

(iv) $u=y^{1/3}$ とおく．微積分の基本定理

$$\frac{d}{du}\int_0^u f_X(t)\,dt=f_X(u)$$

と合成関数の微分

$$\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{du}\int_0^u f_X(t)\,dt\cdot\frac{du}{dy}$$

に注意すること．

(v) 命題 1.8(i) をそのまま適用するだけ．その具体的な計算を (iii) と (iv) でやっている．

[1] $y\le 0$ のとき，$X^3\le y$ ならば，$X\le 0$ より確率の不等式を得る．