2005 年 6 月 15 日（今野）

6 月 08 日出題のレポートのコメント

よくできているとレポートには $\boxed{\text{よくできました}}$ の判が押してあります．判のないレポートは下記を参考にして考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．レポートに質問を書くときは，$\boxed{\text{質問}}$ を赤色等で表示すると助かる．

$\boxed{\text{全体の注意}}$　積分する範囲は問題にある確率密度関数をよく観察すること！そうすれば，わかるようになっているはずである．

$\boxed{\text{問題 33}}$(i)

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,\,y)=1$$

を調べる．

(ii)

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,\,y)$$

からわかる．これから

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)$$

に注意する．

(iii)

$$f_{X,Y}(x,\,y)=\frac{d^2}{dxdy}F_{X,Y}(x,\,y)$$

である．

$$\int\int f_{X,Y}(x,\,y)\,dx\,dy=1$$

を積分は微分の逆演算であることに注意すればよい．

(iv) (ii) の注意より $f_X(x)$ は簡単に求まるが，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\,y)\,dy$$

という関係もあることを理解しておくこと．

X, Y はともに離散型確率変数であることに注意する．したがって，計算をするときは和の記号が登場する．

(ii) X の周辺確率関数の定義から

$$f_X(x)=f_{X,Y}(x,\,-1)+f_{X,Y}(x,\,0)+f_{X,Y}(x,\,1)+f_{X,Y}(x,\,4),\qquad (x=1,\,2,\,3)$$

に注意すればよい．Y の周辺確率関数 $f_Y(y)$ も同様に求めればよい．

$\boxed{\text{問題 35}}$ (ii) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ である．しかし，

$$X \text{ と } Y \Longrightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

であることに注意せよ．独立性がないときには，上の等式は一般には成立しない．したがって，

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,\, y)\, dx\, dy$$

とすること．

(v) $f_{Y|X}(x,\, y)$ の $\underline{y\text{ の動く範囲}}$ に注意すること．

$$f_{Y|X}(x,\, y) = \frac{x+y}{x+\dfrac{1}{2}}, \qquad \underline{(0 < y < 1)}$$

となるので，

$$\mathbb{E}[Y|\, x] = \frac{1}{x+\dfrac{1}{2}} \int_0^1 y(x+y)\, dy =: g(x)$$

に注意すればよい．

(vi)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\, X]] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(x) f_X(x)\, dx$$

となる．

$\boxed{\text{問題 37}}$ (ii)

$$f_{X,Y}(x,\, y) = f_{Y|X}(y|\, x) f_X(x)$$

を利用すれば，

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x,\, y} y f_{X,Y}(x,\, y)$$

とすればよい．または，$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|\, X)]$ が成立することに注意する．これより

$$\mathbb{E}(Y|\, x) = \sum_{y} y f_{Y|X}(y|\, x) =: g(x)$$

を求める．あとは

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) f_X(x)$$

とすればよい．

問題 49　問題にタイプミスがありました．確率密度関数は

$$
f_{X,Y}(x,\, y) = \begin{cases} \underline{8}xy & (0 < x < y < 1), \\ & \\ 0 & \text{その他} \end{cases}
$$

とするべきでした．この場合には，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_x^1 f_{X,Y}(x,\, y)\, dy \right) dx &= 8 \int_0^1 x \left(\int_x^1 y\, dy \right) dx = 8 \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^1 dx \\
&= 8 \int_0^1 x \frac{1 - x^2}{2}\, dx = 1
\end{aligned}
$$

となる．

(i)　$0 < x < 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\, y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(x,\, y)\, dy + \int_x^1 f_{X,Y}(x,\, y)\, dy + \int_1^{\infty} f_{X,Y}(x,\, y)\, dy
\end{aligned}
$$

に注意せよ．ただし，2 番目の積分は講義積分の意味であるが，形式的な計算はそのまますればよい．また，$0 < y < 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\, y)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_{X,Y}(x,\, y)\, dx + \int_0^y f_{X,Y}(x,\, y)\, dx + \int_y^{\infty} f_{X,Y}(x,\, y)\, dx
\end{aligned}
$$

となることに注意せよ．

(iii)

$$
f_{X|Y}(x|\, y) = \frac{f_{X,Y}(x,\, y)}{f_Y(y)}, \qquad \underline{(0 < x < y)}
$$

である．x の動く範囲に注意して，

$$
\mathbb{E}[X|\, y] = \int_0^y x f_{X|Y}(x|\, y)\, dx
$$

とすればよい．